This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

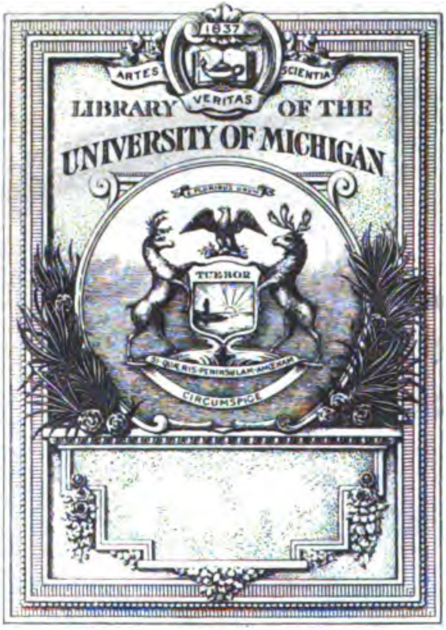
Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/


1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

E Bibliotheca Colle. [illegible] H. G. [illegible]

QA
31
.E88
S731
1725

ELEMENTA EUCLIDEA GEOMETRIÆ, PLANÆ AC SOLIDÆ; ET SELECTA EX ARCHIMEDE THEOREMATA, QUIBUS ACCEDIT TRIGONOMETRIA,

AUCTORE
ANDREA TACQUET.
Soc. Jeſ. Sacerdote, & Matheſeos Profeſſore.

Noviſſimam hanc Editionem adornavit, plurimisque *Corollariis* varios Propoſitionum uſus exhibentibus illuſtravit, & Schemata XL addidit

GULIELMUS WHISTON. A. M.
Matheſeos Profeſſor LUCASIANUS.



AMSTELODAMI,
Apud PETRUM DE COUP.
MDCCXXV.

Hist. of science
Burgerdijk
3-8-29
18679

P. V. MUSSCHENBROEK

SUIS

AUDITORIBUS

S. D.

INter eos, qui Elementa Euclidis Mathematica ſuis demonſtrationibus illuſtrarunt, haud mediocrem meruit deportavitque laudem Cel: ANDR. TACQUETUS; ſuffragia approbantia adeo unanimia fuerunt, ut aliquoties in diverſis Europæ locis ejus com-mentarii typis mandati ſint; nec miror eos quàm plurimum placuiſſe, eminet enim in omnibus demonſtrationibus, tam directis, quàm quæ ad abſurdum ducunt, magna perſpicuitas & amabilis brevitas, ut fere nihil melius exſpectari poſſe videatur: utramque probandi methodum, directam & indirectam, Auctor ſapienter retinuit, ut tyrones aſſueſcerent methodis veterum Geometrarum omnibus; tum ut hæc Elementa inſervirent lo-

 co

co Logicæ ad docendum varios ratiocinii & demonſtrationis modos. Quæcunque in Euclideis minùs utilia, aut nimis prolixa ſunt, omiſit; ubi utiliora addi poſſe judicavit, Corollaria & Scholia egregia adjunxit: hinc ſi palmam omnibus non eripuiſſe, ſaltem cum optimis de eâ certaſſe cenſeri poteſt. Quamobrem digna hæc Elementa cenſuit Clar. Britanniæ Mathematicus GUIL. WHISTONUS, quæ ornaret ſuis lucubrationibus & eruditis commentariis; hi, ut & ipſum opus, quamplurimum placuerunt Orbi Mathematico, ut intra anguſtum temporis ſpatium typis excuſi ſint tribus vicibus in Britanniâ, hoc tempore diſciplinas Mathematicas ferventiſſime colente, & meritò de ſummis in hiſce Viris gloriante. Deerant in noſtrâ regione exemplaria, ſæpiusque dolui VOS hoc præſtanti opere deſtitui; idcirco conſului P. Coupio, Bibliopolæ diligenti, ut juxta ultimò editum Brittannicum exemplar hoc opus Tacquetianum typis iterum mandaret; nec defuit, curans ut nitidiſſime prodiret, correctum ſatis accurate à ſphalmatibus, & ornatum figuris æri inciſis melioribus, quàm in omnibus antecedentibus impreſſionibus. Veſtros in uſus A. A. elegi hunc Auctorem potiſſimùm; qui, præterquam

quam quòd Doctiſſimi WHISTONI operâ fulget, non tantùm hæret in ſex prioribus Libris Euclidis, quemadmodum Commentatores plurimi; ſed ea, quæ fundamenta Planorum & Solidorum ſpectant, addidit; quæque ab aliis non niſi longis exhibita demonſtrationibus, ſolitâ ſuâ brevitate ac facilitate explicuit, ut abſque tædio legi, abſque difficultate res ſubtiles intelligi poſſint. Poſteriora æque Vobis ſcitu neceſſaria quàm priora: omnia enim cùm didiceritis, apti demum eſtis ad Philoſophiam Mathematicam cum fructu intelligendam; quâ alioquin ignaro Matheſeos nihil obſcurius, perito nihil clarius dici poteſt. Nolui huic Libro aliquid adjicere ex meo penu deſumtum, ne in opus Clavianum excreſcat, tum quia me vivâ voce explicantem variis hæc Elementa modis, & plurima inſerentem audire ſoletis. Addita fuit huic editioni TRIGONOMETRIA PLANA noſtri Auctoris, brevis quidem, ſed clara, ſufficiens ad omnia intelligenda, quæ in Geometriâ Practicâ occurrunt: adjecta hæc quoque fuit impreſſioni Patavinæ, ſimul cum TRIGONOMETRIA SPHÆRICA ex P. Schotti Encyclopædia deprompta; retinui utram-

que; PLANAM, quia utilitate ſuâ & jucundiſſimis problematibus deleret ex animis veſtris, quicquid tædii anteacto labore cepiſſetis. SPHÆRICAM deſiderabam, ut me Aſtronomica tractantem methodo Mathematica, facile & cum voluptate intelligeretis. Haſce igitur Matheſeos partes commendare Vobis volui, quas dum explicuero, vera me ſtraviſſe fundamenta ad reliquas, ut & ad Philoſophiam hodiernam arbitror; his fruamini, & valete.

Trajecti ad Rhenum
1 Novembris 1724.

PRÆ-

PRÆFATIO.

CUM apud nos decretum eſſet Elementa Geometriæ Euclideæ juxta V. Cl. Andreæ Tacquet editionem recudere, dedi operam ut quàm emendatiſſime, nec ſine auctariis e novo noſtro Typographeo prodirent. Atque equidem Editio hæcce Tacquetiana, quam haud immeritò elegantiſſimam vocat noſtræ profeſſionis Pater Cl. Barrovius, præ aliis mihi ſemper viſa eſt, & explicandi facilitate, & demonſtrandi perſpicuitate reliquis palmam præripuiſſe. Neque aliam fuiſſe Doctiorum de eâdem ſententiam, publicus Geometrarum uſus ſuadere videtur. Vix aliam enim Elementorum Euclideorum formam ſæpius impreſſam, aut manibus frequentiùs tritam videre licet. Quin & illa quoque ad accurandam hanc præ reliquis editionem, quam integram hîc damus; animos addiderunt, quòd & præcipua Archimedis, Geometræ plane ſummi, de Sphærâ, Cono, atque Cylindro Theoremata, auro contra non cara ad calcem exhiberet; & in reliquis Editoris noſtri operibus Mathematicis, eruditiſſimis ſane, & ad uſum Tyronum ſcientias haſce proprio Marte aggredientium optime accommodatis, paſſim citata extaret. Defuerunt quidem, aut mihi ſaltem defuiſſe viſa ſunt etiam in optimis hiſce elementis nonnulla, quæ ſi haberentur, diſcentibus eſſent haud parum emolumenti allatura. Nempe in ſecundo libro methodum demonſtrandi incipientibus paulo difficiliorem: In quinto proportionum doctrinam in ſe facillimam per ambages nimias expoſitam; Atque etiam ob corollariorum practicorum de-

fectum, Elementa nimis abſtracta, gracilia, & tædii plena cauſabar. Quocirca omnia ad incudem revocare, & quæ deſiderari poſſe videbantur ſupplere, in animum induxi. Secundi itaque libri demonſtrationes pleraſque tum rectangulorum conſtructione, tum exemplis numericis illuſtravi; Doctrinam de proportione, quam quintus liber complectitur, ſummatim & breviſſime expoſui: Et quod in noſtro opere, & in univerſo hoc ſtudiorum genere palmarium reor, varios propoſitionum Uſus *ſive theoreticos, ſive practicos, (faciliores nimirum, & quales diſcentium captui eſſent accommodi) condimenti inſtar, atque incitamenti haud rarò appoſui. Quæ cùm ita ſint, fas ſit ſperare Elementa Geometrica jam tandem, etiam ordine Euclideo non mutato, & facilitate, & uſu ita fore comparata, ut Elementis aliis novo ordine atque methodo demonſtrandis non ſit opus futurum. Minime enim placet eorum ratio, qui prima Geometriæ elementa alibi quàm apud Euclidem, quem ſolum tanquam unicum Elementorum Conditorem citant ubique Mathematicorum libri, & bis mille annorum uſus ſatis commendat, quæſitum eunt. Hiſce quidem perlectis, atque in ſuccum & ſanguinem verſis, pergant ulteriùs Tyrones quoquo patet Matheſeos Campus, quaqua ducit Neotericorum ſolertia, in pleriſque ſane longe feliciſſima: ſed Duce, atque Auſpice Euclide pergant.* Juvat antiquos exquirere fontes: *& ingens erit more, operæque pretium calculo analytico, indiviſibilium methodo, Infinitorum Arithmeticæ, & noviſſime fluxionum doctrinæ Conſtructionem Veterum Geometrarum Syntheticam, tanquam Scientiarum Mathematicarum baſin inconcuſſam, præſtaviſſe & prælibaſſe.*

Sciat autem Lector, me Corollaria iſta, quibus uſus propoſitionum continentur, e celeberrimis Elementorum ſcriptoribus, De Chales, Barrovio, Pardies, Sturmio,

ex ipſo etiam Tacqueta alibi, atque e Geometrarum Principe Iſaaco Newtono, quem honoris etiam causâ nomino, potiſſimum mutuò accepiſſe; perpauca enim quæ de penu proprio profero, digna non ſunt quæ ſeorſim memorentur. Quæ verò de Elementis a Cl. Dno. de Chales editis depromſi, cùm haud pauca ſint, ſine lineolis ſeparatricibus cernuntur; reliqua verò hujuſmodi uncinulis [] includuntur; ita tamen univerſa, ut quæ Tacqueto noſtro aliunde accedunt, characteris diverſitate ubique dignoſci poſſint.

Cuiquam autem autor eſſe nollem, ut librum integrum ſimul & ſemel ſibi perlegendum imponat: In ſecundo enim libro, probationibus & illuſtrationibus noſtris contentus eſſe poteſt, primâ ſaltem vice: & in libro quinto, e Monito noſtro ad Tyrones, *generalium de proportionalibus ratiocinandi modorum probe memor, ad Librum ſextum illico accedat; quem ſane ſi tum nequeat intelligere, cauſam non dicam quin propoſitiones libri 5. particulares priùs omiſſas repetat. Quæ etiam circa Paradoxorum de Contactûs Angulo ſolutionem poſt prop. 16. lib. 3. afferuntur, cùm ad Elementa non pertineant, neque ita ſolida videantur; tutò omitti poterunt. Reliqua autem omnia (niſi forte nonnullas axiomatum ſuâ luce clariſſimorum demonſtrationes minùs neceſſarias exceperis) digna ſunt omnino quæ non tantùm legantur, ſed & firmiter memoriæ atque animis infixa hæreant; tanquam Scientiæ inter humanas longe præſtantiſſimæ & certiſſimæ principia vere Aurea, & nunquam ſatis laudanda; quibus quidem ducibus non tantùm Geometria, ſed & Phyſica etiam, & Aſtronomia extra Syderum Soliſque vias in immenſum creverunt, & etiamnum creſcunt; dum ſcientiæ hujus Parentes* Exæquat Victoria Cælo.

Scribebam Cantabrigiæ III. Calendarum Martii A. D. 170$\frac{2}{3}$.

De Editione tertiâ CANTABRIGIENSI Monitum.

EDITIONEM hanc Euclidis Elementorum juxta Cl. Tacquetum, quo Tyronum uſibus accommodatior atque inſtructior prodiret, quantùm fieri poſſet perſpicuam & explicatam dare ſeriò adlaboratum eſt. Theoremata bene multa novis demonſtrationibus muniuntur: alia, quibus ea penitus deerant, iiſdem ſuppeditantur. Corollariis ac ſcholiis ſparſim inſertis, fulciuntur demonſtrationes inde ſubſecutæ, ut iis ſua firmitas & evidentiæ vis fortiùs ac meliùs conſtet. Propoſitionum complurium, quas uſui quaſi vix futuras omiſerat Tacquetus, non pauca revocata ſunt; atque eorum Auctori poſtliminio reſtitutæ. Additamenta quibus Vir Cl. Gulielmus Whiſtonus Editionem primam adornaverat, perſæpe ulteriùs tranſponuntur, ne propoſitione aliquâ viderentur niti, quæ ante demonſtrata non fuiſſet. Theorematum demonſtrationes, ubicunque nimiùm breves viſa ſint, aut ad amuſſim non conſtructa, ſupplementis inditis pleniores, Tyronibuſque (ut ſpero) faciliores redduntur. Nonnulla afferuntur, quæ maximâ ex parte, ab inclytis Geometris, magni nominis Viris decerpta ſunt, ut inde inſtructior evadat hiſce ſtudiis proſequendis, quicunque ad veram Philoſophiam tendit iter.

Hortandus eſt Matheſeos ſtudioſus; ut Elementis Geometriæ Analyticam adjungat praxin. Hinc ei in diſciplinâ tam ſublimi feliciùs progredi, & cum illâ familiariùs verſari licebit; imo & in ejuſdem receſſus abditos intimaque penetralia ei tandem introire fas erit.

Dabam XIII. Kal. April, Anno Dom. 1732.

Ὁ ΘΕΟΣ

Ὁ ΘΕΟΣ Γεωμετρεῖ.

TU autem, DOMINE, quantus es Geometra? Quùm enim hæc ſcientia nullos terminos habeat; cùm in ſempiternum novorum theorematum inventioni locus relinquatur, etiam penes humanum ingenium, TU uno hæc omnia intuitu perſpecta habes, abſque catenâ conſequentiarum, abſque tædio demonſtrationum. Ad cætera pene nihil facere poteſt intellectus noſter; & tanquam brutorum phantaſia videtur non niſi incerta quædam ſomniare, unde in iis quot ſunt homines, tot exiſtunt fere ſententiæ: in his conſpiratur ab omnibus, in his humanum ingenium ſe poſſe aliquid, imo ingens aliquid & mirificum viſum eſt, ut nihil magis mirum; quod enim in cæteris pene ineptum, in hoc efficax, ſedulum, proſperum, &c. TE igitur vel ex hac re amare gaudeo; TE ſuſpicere, atque illum diem deſiderare ſuſpiriis fortibus, in quo purgatâ mente & claro oculo non hæc ſolùm omnia abſque hac ſucceſſivâ & laborioſâ imaginandi curâ, verùm multò plura & majora, ex Tuâ Bonitate & immenſiſſimâ ſanctiſſimâque Benignitate conſpicere & ſcire concedetur, &c.

Cl. Barrovii verba Apollonio ſuo præfixa.

SIG-

SIGNORUM *quorum frequens uſus eſt in additionibus* EXPLICATIO.

$=$ *Signum æqualitatis.* Sic $a = b$ denotat quantitates *a* & *b* æquales eſſe.

$+$ *Signum additionis.* Sic $a + b$ denotat ſummam quantitatum *a* & *b*.

$-$ *Signum ſubductionis.* Sic $a - b$ denotat exceſſum quantitatis *a* ſupra *b*.

o *Signum nihili.* Sic $a - b = 0$ denotat *a minus b* (ſive exceſſum ipſius *a* ſupra *b*) æquari nihilo; & proinde quantitates *a*, *b* eſſe inter ſe æquales.

$\times$ *Signum multiplicationis.* Sic $a \times b$ denotat productum ex quantitatibus *a*, *b* in ſe invicem multiplicatis.

Quandoque etiam quantitates productum efficientes, abſque ſigno interpoſito conjunguntur. Sic *AqE* denotat productum ex multiplicatione quantitatis *Aq* per quantitatem *E*. [Et ſic quoque apud ipſum Tacquetum (*ſchol. p.* 36. *l.* 11.) ABC denotat ſolidum ex rectarum A, B, C *multiplicatione* continuâ productum. Aliquando tamen, Tacquetus quantitates *addendas* abſque ſigno interpoſito conjungit. Sic in demonſtr. p. 24. l. 5. AI denotat ſummam quantitatum A & I]

Sit quantitas A dividenda per B: Quotiens ſic $\left(\frac{A}{B}\right)$ notatur.

Et ſimiliter, $\frac{7}{4}$ eſt quotiens numeri 7 per 4 diviſi, ſive $1\frac{3}{4}$. Et cujuſlibet fractionis (ut $\frac{1}{3}$) numerator (1) pro dividendo, denominator (3) pro diviſore habendus eſt, & ipſa fractio ($\frac{1}{3}$) pro quoto.

:: *Signum rationum æqualium.* Sic $A : B :: \alpha : \beta$, (vel $A . B :: \alpha . \beta$) denotat eandem eſſe rationem inter *A* & *B*, ac inter α & β.

∺ *Signum proportionis continuæ.* Sic *A*, *B*, *C* ∺ denotat *A* eſſe ad *B*, ut *B* eſt ad *C*.

q *Signum quadrati.* Sic *CBq* denotat quadratum lateris *CB*.

c *Signum cubi.* Sic *Ac* eſt cubus lateris *A*.

√ *Signum radicis quadraticæ.* Sic $\sqrt{5}$ eſt radix quadratica numeri 5; & $\sqrt{A+B}$ eſt radix quadratica ſummæ quantitatum *A* & *B*. Hoc eſt, ſi area quadrati ſit 5, vel $A + B$; ejuſdem latus quodlibet per $\sqrt{5}$, vel $\sqrt{\overline{A+B}}$ denotabitur.

√c *Signum radicis cubicæ.* Sic √c5 eſt radix cubica numeri 5: Et √c*AqE* eſt radix cubica quantitatis *AqE*; hoc eſt, ſi ſupponatur cubus ſolido *AqE* æqualis, erit √c*AqE* linea recta, lateri ejuſdem cubi æqualis; quæ nempe in ſui ipſius quadratum ducta, ipſum cubum generat.

AMICE
LECTOR.

CUM multis jam annis Elementorum Geometricorum, minoris formæ, in hiſce locis penuriâ laboratum eſſet, viſum denique eſt ad uſum ſtudioſæ juventutis, cujus gratiâ hunc laborem qualemcunque ſuſcepi, novam editionem adornare; in quâ quid præſtitum ſit, paucis accipe.

1. *Imprimis Geometriæ planæ ac ſolidæ elementa conjunxi, ne (ut fit plerumque) ſemper in planis tyrones hæreant; ſed ab his tranſeant ad ſolida; quorum ſumme neceſſaria cognitio eſt.*

2. *Propoſitionum hypotheſibus & aſſertionibus literas, parentheſi incluſas, quibus ad figuram referri poſſint, appoſui: quod eo conſilio feci, ne ante demonſtrationem, iterum explicanda aſſertio, adeoque idem bis repetendum eſſet: & tamen literis a reliquo ſenſu parentheſi ſeparatis, ſua aſſertioni univerſalitas conſtaret. Aſſertionem igitur conveniet legere primùm literis prætermiſſis; tum ſi non intelligas, te literæ ad figuram ducent.*

3. *Propoſitiones aliquas prætermiſi, quarum fere vel nullus uſus eſt, aut certe non alius, quàm ut per eas demonſtrentur aliæ, quas ſine illis faciliori viâ poteram demonſtare. Eoſdem tamen propoſitionum retineo numeros, quos Euclides, ordinemque ſervo, quem bis mille annorum uſus probavit.*

4. *Demonſtrationes vel novas affero, vel antiquas breviores plerumque ac faciliores conor efficere. Et prolixitas quidem rarò prodeſt. Ea ſiquidem tardiores & hebetiores non juvat, ſubtilibus autem & ingenioſis moleſta eſt.*

5. *Quamvis autem brevis eſſe ſtuduero, exiſtimavi*

mavi tamen, me a propoſitio non recedere, ſi ea adderem, quæ Geometriam diſcere volentibus futura uſui videbantur. Itaque Corollaria & ſcholia adjunxi non pauca, quæ uſu longo didici in elementis deſiderari. Geometriæ practicæ fontes indico ſuis locis. Tum ſi quid illuſtre ad rem occurreret, non omiſi. Varia deinde in quibus laboratum huc uſque fuit, vel explicare vel demonſtrare conatus ſum.

6. In libro primo parallelarum theoria demonſtratur independenter ab undecimo axiomate, quod non axioma, ſed theorema eſt, & quidem non niſi difficulter ac longo circuitu demonſtrabile.

7. Secundum librum, in quo laborare multùm tyrones ſolent; diſpoſui ad eum fere modum, quo jam analyſtæ ſcribunt æquationes ſuas. Quem ſi exacte tenere voluiſſem, fuiſſet quidem res brevior; ſed minùs; ut arbitror, tyronibus accommodata.

8. In libro tertio ad prop. 16. paradoxa anguli contactûs, quæ hactenus torſere omnes, ſolvuntur.

9. In quinto libro, proportionum doctrinam, ut quidem ab Euclide traditur, ſatis ſpinoſam, efficere planiorem conatus ſum. Itaque primùm proportionum elementa faciliori quadam methodo, multiplicibus ablegatis, traduntur. Deinde hujus libri ſextam definitionem, quâ proportionum æqualitas per multiplices explicatur, oſtendi non definitionem eſſe, ſed theorema, & quidem difficile & perobſcurum; cujus etiam demonſtrationem exhibemus, hactenus a nullo datam. Atque ita demonſtrationes Euclideas quæ hinc ducuntur omnes, ſi quis forte illas præ noſtris probationibus deſideret, ſtabilivimus. Tum aliud quoddam æqualium proportionum aſſigno ac demonſtro indicium univerſale, primum, facillimum, ex quo omnes quinti libri propoſitiones demonſtrare potuiſſem, ſi hoc conducere diſcentibus judicaſſem. Poſtremò de proportionibus non pauca ſcitu

me-

neceſſaria ſubjungo; ac imprimis demonſtro axioma illud percelebre ſeu potiùs theorema, proportionem extremorum ex quotlibet intermediorum proportionibus componi, id quod hactenus in Geometriâ fuit deſideratum.

10. *Librum duodecimum, cujus difficiles ac prolixæ demonſtrationes diſcentibus terrori eſſe ſolent, aliâ viâ plus quàm decies breviori demonſtravi. Quod ita ſe habere, qui hæc noſtra cum Euclide ejuſque commentatoribus contulerit. deprehendet.*

11. *In libris quarto, ſexto, undecimo præſtantur ea quæ univerſim ſupra indicavimus.*

12. *Denique ſelecta ex Archimede theoremata, aliâ ſimiliter ac breviori viâ demonſtrata adjunxi; eximiamque illius de cylindro ac ſpherâ doctrinam poſtremis tredecim propoſitionibus adjectis, ampliavi; quibus inter cætera demonſtro ſeſquialteram proportionem ab eo in cylindro ſphærâque repertam, ab æquilatero cono eidem ſphæræ circumſcripto, tam in ſoliditate, quàm in ſuperficie continuari. Euclidi porro Archimedea illa ſubnexui; non quaſi adhuc elementa, ſed quia ſubtilitate pariter atque uſu eximia ſunt; tum deinde ut Geometriæ candidatus intelligat, cùm maximi Geometræ inventa admiranda aſſequi ſeſe viderit, nihil in Matheſi futurum tam ſubtile vel arduum, quod his inſtructus elementis percipere non poſſit.*

Tu hæc habe; & , ſi placuerint, lege ac diſce; inventurus in his principia nobiliſſima, & forte omnium antiquiſſimæ ſcientiæ; quod oſtendit tibi, quam ſubmetto,

HIS-

HISTORICA
NARRATIO
De ortu & progreſſu Matheſeos.

MATHEMATUM elementa tradituro, viſum eſt de illorum origine ac præſtantiâ præfari quædam, ut intelligant Matheſeos candidati, cujuſmodi ea ſcientia ſit, cui ſe conſecraturi ſunt; & planum fiat adverſus eos qui, quæ ignorant, contemnunt; quantæ dignitatis ſint hæ diſciplinæ, quas omnium ætatum ſapientiſſimi viri incredibili ſtudio ſibi putaverint comparandas. Uſui porro mihi fuit, in hac relatione concinnandâ, Petri Rami diligentia, qui ſcholarum toto primo libro bene magno Mathematicam Hiſtoriam ex Proclo, Laertio, Vitruvio, Gellio, Polybio, Tzetze, aliiſque accurate copioſeque conſcripſit.

Prima hominum ſcientia Matheſis fuit, ſi Joſepho credimus. Is lib. 1. cap. 3. ſcribit Sethi nepotes Cœlorum ordinem ac Siderum curſus obſervaſſe. Ne autem hæc inventa ex hominum notitiâ dilaberentur, cùm Adamus univerſalem mundi interitum fore prædixiſſet, unum diluvio, incendio alterum, excitarunt duas columnas, alteram lateritiam, alteram lapideam; & utrique ſua inventa inſcripſerunt, ut ſi lateritiam diluvio deleri contingeret, lapidea ſuperſtes, hominibus diſcendi copiam faceret, & quæ inſcripta continebat, ſpectanda exhiberet. Aiunt autem lapideam illam ab ipſis dedicatam, quæ & noſtris temporibus extat in Syriâ. Hæc ille, penes quem fides eſto.

Poſt

Poſt diluvium primos mortalium Aſſyrios & Chaldæos Mathemata coluiſſe tradunt idem Joſephus, Plinius, Diodorus, Cicero. Sed ortæ & florentes apud Chaldæos Mathematicæ artes, deinde ex Chaldæâ & Aſſyriâ ad Ægyptios tranſlatæ ſunt Auctore Abrahamo. Is enim cùm Deo jubente ex patrio ſolo in Palæſtinam, ac deinde in Ægyptum profectus eſſet, cerneretque Ægyptios artium bonarum capi ſtudio, atque indole ad diſcendum egregiâ eſſe, ut apud eundem Joſephum eſt lib. 1. cap. 9. Arithmeticam illis Aſtronomiamque, quam præcedere Geometriam neceſſe fuit, communicavit. Quibus deinde ſtudiis adeo Ægyptii floruere, ut Ariſtoteles 1. Metaph. cap. 1. affirmet Mathematicas artes primùm in Ægypto à ſacerdotibus publicâ vacatione fretis inventas eſſe.

Exinde Matheſis ex Ægypto mare trajiciens ad Græciæ Philoſophos pervenit: Thales enim Mileſius, qui ante Chriſtum floruit annis 584. primus Græcorum cùm in Ægyptum veniſſet, Geometriam inde in Græciam tranſtulit. Is ſane, præter alia, primi libri propoſitiones 5. 15. 26. invenit. Eidem debentur 2. 3. 4. 5. l. 4. cujus inventi lætitiâ elatus bovem immolaſſe dicitur. Idem Æquinoctia & Solſtitia obſervare cœpit, Laertio teſte; & Solis eclipſim, ut ſcribunt Hippias & Ariſtoteles, primus prædixit; & Tzetzes Auctor etiam eclipſim Lunæ Regi Cyro prænunciaſſe. Quapropter hic primus in Græciâ Mathematicæ ſcientiæ parens atque Auctor fuit.

Poſt hunc Pythagoras Samius ille Philoſophorum antiquiſſimus, Mathematicas diſciplinas vehementer auxit ornavitque. Et Arithmeticam quidem ita coluit, ut omnis prope illi ratio philoſophandi ex numeris duceretur. Geometriam verò, ut re-

ſert Laertius, à materiâ abſtraxit primus; in quâ mentis elatione invenit 32. 44. 47. 48. lib. 1. Sed imprimis ob inventas 32 & 47 lib. 1. celebratur, & hujus quidem inventionis lætitiâ tantâ affectus eſt, ut teſte Apollodoro apud Laertium, Hecatombem immolarit. Idem incommenſurabiles magnitudines, & regularia quinque corpora primus aperuit. Idem Aſtrologiam & Muſicam impenſe & docuit & exercuit. Neque ſolùm acute & ſubtiliter multa invenit, ſed etiam ludum primus aperuit, in quo juventus tam honeſtas tamque nobiles artes addiſceret.

Pythagoram Anaxagoras Clazomenius & Oenopides Chius ſecuti ſunt, quorum meminit Plato in Amatoribus, ubi adoleſcentes de Anaxagorâ & Oenopide in circulorum deſcriptionibus concertantes inducit. Ab Anaxagorâ Geometriam quandam ſcriptam indicat Ariſtoteles; & ex Laertio accepimus oſtenſum ab eo Solem Peloponneſo majorem (nota Aſtronomiæ incunabula;) eundemque de habitationibus in Lunâ nonnulla diſputaſſe. Oenopidi adſcribit Proclus 12. & 23. l. 1. Hos excepere Briſo, Antipho, & Chius Hippocrates, omnes, tentatâ circuli quadraturâ, ab Ariſtotele reprehenſi pariter & celebrati. Sed hos inter longe clariſſimus Hippocrates fuit, ille è mercatore Philoſophus & Geometra, qui præter circuli quadraturam, etiam cubi duplicationem primus tentavit per duas medias proportionales, quam viam ut ſingularem & unicam omnis poſteritas amplexa eſt. Illius etiam illa propria & magna laus eſt, quòd Proclo teſte, elementa primus ſcripſerit, & ab aliis inventa ordinaverit.

Democritus non in Philoſophiâ ſolùm, ſed etiam in Matheſi admirabilis fuit. Ejus tum Phyſica, tum forte etiam Mathematica monumenta perierunt in-

vi-

vidiâ (ut quidam ferunt) Ariſtotelis, ſua unius ſcripta cupientis legi. Democriti Philoſophiam Petrus Gaſſendus eruditiſſimo opere nuper edito inſtauravit. Theodorus Cyrenæus, licèt ejus inventa Mathematica non extant, vel eo nomine magnus eſt, quòd Platonis Magiſter fuiſſe memoretur.

Ad Platonem igitur aliquando pervenimus, quo nemo alius ſplendorem majorem attulit Mathematicis diſciplinis. Ille Geometriam maximis acceſſionibus amplificavit, ſtudio incredibili in eam collocato. Et inprimis reperta eſt ab eo Analyſis, certiſſima inveniendi & ratiocinandi via. Philoſophiæ ſuæ libros, Mathematicis rationibus diſtinxit, ac quicquid in Mathematicis admirabile conjunctum cum Philoſophiâ eſſet, excitavit. Academiæ foribus inſcriptum legebatur: *οὐδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω*: *nullus Geometriæ expers accedito*: illuſtri ſane argumento quàm non aliena ſed propria, quàmque non inutilis, vel indecora, ſed honeſta & commoda Matheſis, ſanæ certæque Philoſophiæ ſit. Quantus certe Plato Matheſeos fuerit & admirator & cultor, is demum intelliget, qui ejus monimenta perlegerit.

Ex Platonis Academiâ prope innumeri deinceps Mathematici prodierunt. Tredecim Platonis familiares a Proclo commemorantur, quorum ſtudiis Mathematica ſit abſoluta. Hinc Leodamas Thaſius, Archytas Tarentinus, Theætetus Athenienſis; à quibus Mathemata egregie ſunt amplificata. Leodamas Analyſim à Platone acceptam exercuit, ejuſque ope inveniſſe multa a Laertio dicitur. Theætetum tum inventa ſua, inter quæ Elementa ab eo ſcripta & regularium corporum inſcriptio celebrantur, illuſtrem faciunt, tum Platonis encomia, qui etiam illius nomini dialogum inſcripſit.

 Ar-

Archytas Elementa ſcripſit etiam ipſe, ejuſque duplicatio cubi apud Eutocium legitur, cujus etiam illa ſingularis fuit laus, quòd Mathematicam ad humanos uſus traduxerit fere primus; unde & lignea columba ab eo facta volaſſe legitur apud Gellium. Quem ſecuti *Dædalus aliique artifices, fabulis poëtarum materiam præbuere. Archytas porro & Mathematicus fuit & exercitûs Imperator, qui nimirum in patriis bellis, copiis civium ſuorum quinquies præfuit & quinquies vicit. Neoclidis tantùm nomen celebratur, Leonte fortaſſis diſcipulo illuſtrior quàm inventis ſuis. Leon ſane Mathematicæ univerſæ elementa conſcripſit, auxit, & ad uſum aptiora fecit. Quare inter præcipuos elementorum conditores ſuo merito cenſeri debet.

Eudoxus Cnidius ſuperiorum æqualis, in Arithmeticis magnus, & (ſi Scholiaſtæ Græco credimus) totum ei Quintum librum debemus; Elementa item conſcripſit; & generaliora effecit, & ſectiones a Platone inchoatas auxit; inſuper Aſtronomicarum hypotheſium primus fabricator extitit, & Geometriæ fontes, ut ſupra Archytas, ad organicam ac mechanicam derivavit. Amyclas Heracleotes & Menæchmus, ejuſque frater Dinoſtratus, Helicon Cyzicenus, Theudius, Hermotimus Colophonius, Philippus Medmæus, omnes Platonici, Geometriam multò perfectiorem reddiderunt. Et Menæchmus quidem ſectiones conicas invenit, ac harum ope duas medias, cujus inventio ab Eutocio reliquis præfertur. Theudius & Hermotimus elementa fecerunt univerſaliora & auctiora. Atqui hi omnes ex Platonis Academiâ, Mathematicam Philoſophiam ad perfectionem adduxerunt, ait Proclus. Sed & Xenocrates Platonis auditor, &

* *Error: multis enim ſeculis poſt Dædalum floruit Archytas.*

& Ariſtotelis magiſter, ipſeque Ariſtoteles cognitione Mathematum clari fuere. Illius cùm auditor quidam eſſe vellet Geometriæ imperitus, Abi, inquit, anſas enim Philoſophiæ non habes.

De Ariſtotele verò quid dicam? libri illius omnes locis Mathematicis ſunt referti, ex quibus in unum collectis librum confecit Blancanus. Ex Ariſtotelis ſcholâ duo præcipue celebrantur, Eudemus & Theophraſtus. Hic ſcripſit de numeris libros duos, de Geometriâ quatuor, de lineis individuis unum: ille hiſtoriam Mathematicam condidit; ex quo Proclus aliique ſua mutuati ſunt. Ariſtæo, Iſidoro, Hypſicli, Geometris ſubtiliſſimis, ſolidorum libros maxime debemus. Denique Euclides aliorum inventa collegit, ordinavit, auxit, demonſtravitque accuratiùs, eaque nobis reliquit elementa, quibus jam ubique terrarum ad Mathematicam juventus inſtituitur. Obiit anno ante Chriſtum 284. Euclidem ſecuti ſunt centum fere poſt annis Eratoſthenes & Archimedes. Eratoſthenis clarum imprimis nomen fuit: ſed ejus ſcripta periere [*quàm plurima, ſed non omnia.*] Archimedis habemus multa, multa amiſimus.

Sed Archimedem cùm nomino, apicem quendam humanæ ſubtilitatis, totiuſque Mathematicæ diſciplinæ abſolutionem animo concipio. Ejus inventa admiranda prodidere Polybius, Plutarchus, Tzetzes, aliique. Archimedi coævus fuit Cònon Geometra & Aſtronomus, cujus mortem Archimedes deflet in lib. de quad. parab. Archimedem & Cononem intervallo non magno ſequitur Apollonius Pergæus, alter Geometriæ princeps, qui egregiæ laudis encomio magnus Geometra fuit appellatus. Illius extant quatuor [*imo ſeptem*] Conicorum ſubtiliſſimi libri.

Eidem adſcribuntur Euclidis libri 14. & 15. ab Hypſicle contracti. Hipparchus & Menelaus, de ſubtenſis in circulo, hic 6. ille 12. libros primi conſcripſere, pro quo invento tam utili & neceſſario non parva utrique laus & gratia debetur. Extant etiam Menelai de triangulis ſphæricis libri tres. Theodoſii Tripolitæ utiliſſimi ſphæricorum libri tres in omnium manibus verſantur. Atque hi quidem, ſi Menelaum [*Iſidorum, atque Hypſiclem*] excipias, ante Chriſtum vixere omnes.

Anno poſt Chriſtum 70. venit in lucem Claudius Ptolemæus, Aſtronomorum princeps, vir plane mirabilis, ſupraque (inquit * Plinius) naturam mortalium. Is verò non Aſtronomiæ tantùm, ſed etiam Geometriæ peritiſſimus fuit; quod teſtantur, tum alia multa ab eo ſcripta., tum in primis libri de ſubtenſis, Menelai quidem 6. Hipparchi verò 12. ab illo ad 5. theoremata contracti. Plutarchi etiam nominatiſſimi Philoſophi extant Mathematica problemata. Jam Eutocii Aſcalonitæ erudita in Archimedem [*& Apollonium*] commentaria quis ignorat? Ab eo Philonis, Dioclis, Nicomedis, Spori, Heronis, tanquam excellentium in Mathematicis Magiſtrorum inventa de duplicando cubo recenſentur. Et Heronis quidem tam in Mechanicis quàm in Geometricis excellens ingenium fuit. Cubi certe duplicatio ab eo tradita, a Pappo l. 3. p. 7. laudatur præ omnibus. Cteſibii Alexandrini, cui antlias debemus noſtras, admiranda opera à Vitruvio, Proclo, Plinio, Athenæo celebrantur. Gemini quoque non minimum inter Mathematicos nomen eſt, quem Euclidi ipſi Proclus in quibuſdam præpoſuit.

Diophantus, & ipſe Alexandrinus, in Arithmeti-

* *Error: Plinius enim Ptolemæo ætate prior erat.*

meticâ tantus fuit, quantus in Geometriâ Archimedes, Apollonius, Euclides; vere totius numericæ ſubtilitatis magiſter; a quo reperta ſit admirabilis illa ars, quam Algebram dicimus; quæ hiſce temporibus a Franciſco Vieta, & Renato Carteſio multò perfectior & univerſalior effecta eſt. Reliqui inter veteres celebrantur Nicomachus Arithmeticis, Geometricis, Muſicis clarus monimentis; Serenus binis de cylindri [*& coni*] ſectione libris, Geometris notiſſimus; Proclus, Pappus, Theon. Quantus Mathematicus fuerit Proclus, ex doctiſſimis ejus in Euclidem commentariis, aliiſque ſcriptis manifeſtum eſt. Atque hic, opinor, ille eſt, qui, ut refert Zonaras, & ex eo Ramus, ac Baronius, ſub annum Chriſti 514. Vitaliani claſſem Conſtantinopolim obſidentis, opticorum ſpeculorum artificio combuſſit*. Theonis laudes vere magnas mirabiliter exaggerat Petrus Ramus, ut etiam libros; quos Euclidi hactenus adſcripſere omnes, Theoni putet attribuendos. Sed iniquior ubique in Euclidem Ramus; neque ullo ſolido nixus fundamento, hîc audiendus non erit. Ut finis aliquando ſit, agmen Pappus claudat tempore inter veteres [*fere*] poſtremus, ut qui vixerit circa annum 400. ſed nominis claritudine, omnique laude Mathematum primis adnumerandus. Quæ ante Hypſiclem, Cteſibium, & Diophantum protulerat fœcunda ingeniorum parens Alexandria, hunc quoque ingenti bono Matheſeos dedit. Scripſit collectionum Mathematicarum

* *Duos ejuſdem nominis male confundit Tacquetus. Proclus enim Lycius, quamplurimis in Philoſophiâ ac Matheſi ſcriptis clarus, anno Chriſti 485. e vitâ deceſſit, ac proinde diverſus eſt ab illo Proclo, qui Anaſtaſio imperante Vitaliani claſſem incendit.*

rum libros ſeptem † a quibus duo primi perierunt*; Reliqui quinque § tam multis abundant, tamque variis, ex omni prope genere Mathematum nobiliſſimis inventis, ut inter prima quæ extant veterum monimenta, ab omnibus cenſeantur.

Habetis originis ac progreſſionis Mathematicæ hiſtoriam brevem. Ex quâ Matheſeos antiquitas, præſtantia, ac dignitas apparet. Sane Reip. litterariæ Principes iidem qui Philoſophiam, etiam Mathematicam genuere, gemellas ſorores partu velut uno, quas qui diſtrahere ab invicem violente velit, næ ille in nativam illarum concordiam, cum inſigni injuriâ crudelis ſit; quando, quod fieri in gemellis ſolet, uno vel loco vel morte ſublato, languere, quin & contabeſcere alterum neceſſe ſit.

† *Octo ſaltem.* * *Aut in Bibliothecis deliteſcunt.* § *Sex.*

Ad Bibliopegum.

Tabulæ Æneæ 1. 2. 3. 4. 5. & 6. adjungantur poſt Paginam 330.

Bericht aan den Boekbinder.

De 6. Plaaten geteekent Tab. 1, 2, 3, 4, 5, & 6, moeten geplaatſt worden na Pag. 330.

ELE-

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ

LIBER PRIMUS.

SCIENTIÆ proprium munus eſt, ex notionibus quibuſdam ſimpliciſſimis, rationali naturæ à conditore Deo impreſſis, elicere aliquid quod prius ignorabatur, atque inde rurſum aliud ex alio; ut prior cognitio ſemper ad ulteriorem ſit gradus. Quæ ratio ſi accurate teneatur, ex minimis & per ſe notis ad rerum abditiſſimarum cognitionem pertingemus. Hanc methodum, rationemque ſcientiæ, præ omnibus amplexæ ſunt eæ diſciplinæ, quæ in quantitatis contemplatione verſantur. Quo fructu id factum ſit, ſciunt omnes, qui hiſce ſtudiis imbuti ſunt. Et ſane Geometria (ut de aliis Matheſeos partibus jam nihil dicam) mirum eſt, quàm brevi ex apertiſſimis ad obſcuriſſima trahat, & ex humillimis ad altiſſima ſtatim aſſurgat. Statuuntur primo ſimpliciſſima quædam facillimaque principia, quibus nemo ratione præditus diſſentire poſſit. Deinde nihil aſſeritur, vel admittitur, quod ex iis infallibili ratiocinio non ſit deductum. Atque ita demum admiranda theoremata, ab omni humano ſenſu & cognitione remota, incredibili certitudine ac evidentiâ innoteſcunt.

Principiorum genera ex quibus Geometria omnis derivatur, ſunt tria; *Definitiones*, *Poſtulata*, *Axiomata*.

V*Oluit autem Euclides in* primo *hoc elementorum ſuorum libro prima* Geometriæ *principia exponere. Quod ut ordine fieret*, Definitiones, *ſive vocum uſitatiſſimarum explicationem præmittit: hiſce vero* Poſtulata *ſuperaddit nonnulla; ab omnibus ſanæ mentis facile concedenda. Poſtea* Axiomatis *illis clariſſimis quibus, naturâ atque ratione ducibus, non poſſumus non aſſentiri omnes, propoſitis*, Demonſtrationes *ſive argumenta infallibilia ubique adhibet, ut veritatum Mathematicarum fidem vel à pervicaciſſimo Adverſario, maximeque invito extorqueat. In primis autem de* Lineis, *variiſque quos illæ concurrendo formant* Angulis *tractat: & propoſitionibus primis* 6. *de* Triangulis *planis agit; ſimulque* Angulorum *planorum naturam explicat. Poſt propoſitiones iſtas*, Angulos Li-

neaſque *biſecandi, & Perpendicula ſive excitandi ſive demittendi methodum oſtendit. Deinde verò alias* Triangulorum, *quin & linearum æquidiſtantium ſive* Parallelarum *affectiones aperit. Hiſce verò peractis, Quadrilaterorum, & ſpeciatim* Parallelogrammorum *proprietates conſiderat; oſtenditque qua ratione* Polygona, *ſive figuræ multangulæ & irregulares ad rectangula, aut parallelogramma, aut etiam triangula, figuras nimirum magis notas atque regulares, reduci queant. Poſtremò autem agmen claudit celeberrimum illud Theorema Pythagoricum, ejuſque converſum:* In omni Triangulo Rectangulo Quadratum Lateris quod recto angulo opponitur æquale eſſe duobus ſimul reliquorum laterum quadratis: Et, ſi quadratum unius lateris æquetur duobus ſimul reliquorum laterum quadratis, angulum illi lateri oppoſitum rectum eſſe.

DEFINITIONES.

1. PUnctum eſt ſignum in magnitudine individuum.

Hoc eſt, quod dividi ne cogitatione quidem poſſit.

Punctum omnis magnitudinis quaſi principium eſt, ſicut unitas numeri.

2. Linea eſt magnitudo tantum longa.

Nimirum carens omni latitudine. Intelligitur generari ex fluxu puncti.

3. Lineæ termini ſunt puncta.

Fig. 1. Tabula 1. 4. Recta linea eſt, quæ ex æquo ſuis terminis interjicitur.

Vel ut Archimedes: Recta linea eſt minima linearum eoſdem terminos habentium; ſive eſt omnium breviſſima, quæ inter duo puncta duci poſſunt.

Vel ut Plato: Recta linea eſt, cujus extrema obumbrant omnia media. [*Oculo nimirum in ipſa linea producta poſito.*]

Unus omnium ſenſus eſt.

Inſtrumentum quo rectæ lineæ deſcribuntur, regula eſt: quæ utrum recta ſit, hoc examine licebit cognoſcere.

Juxta regulam deſcribatur linea; tum regulam inverſam, ſic ut extremitas prius dextra jam ſit ſiniſtra, rurſum applica lineæ prius deſcriptæ: ſi plane cum illa congruat, recta eſt regula; ſi non congruat, non erit recta. Ratio pendet ex axiomate 13.

5. Superficies eſt magnitudo tantum longa & lata.

Duas ergo habet dimenſiones. Intelligitur generari ex fluxu lineæ.

6. Superficiei extrema ſunt lineæ.

7. Planum, ſive ſuperficies plana eſt, quæ ex æquo inter ſuas extremas lineas jacet.

Vel ut Hero: Superficies plana eſt, cujus omnibus partibus recta linea accommodari poteſt.

Generatur enim ſuperficies plana ex fluxu lineæ rectæ; [*Nimirum ex fluxu directo lineæ rectæ: alias enim fieri poteſt ut linea recta deſcribat etiam ſuperficiem curvam.*]

Vel, Plana ſuperficies eſt, cujus extrema obumbrant omnia media. [*Oculo nimirum in ipſa ſuperficie producta poſito.*]

Vel, Plana ſuperficies eſt minima omnium eoſdem terminos habentium. Idem ſenſus eſt omnium.

Non definivit hic corpus, ſive ſolidum Euclides, quia nondum hic erat acturus de corpore. Ne quis tamen illius definitionem deſideret; Corpus eſt magnitudo longa, lata & profunda. Tres igitur dimenſiones habet corpus, ſuperficies duas, linea unam, punctum nullam.

8. Angulus planus eſt duarum linearum, in plano ſe mutuo tangentium, & non in directum jacentium, alterius ad alteram inclinatio.

Angulum igitur efficiunt duæ lineæ B A, C A ſe mutuò tangentes in A, ſic ut non exiſtant ſibi mutuò in directum; hoc eſt, non efficiant unam lineam. *Fig. 1, 4.*

9. Latera ſeu crura anguli, ſunt lineæ quæ angulum efficiunt.

10. Vertex anguli eſt punctum (A) in quo crura ſibi mutuò occurrunt. *Fig. 2, 6.*

Cum angulus eſt unicus, una littera ad verticem poſita deſignatur: Cum plures ad unum punctum exiſtunt, deſignatur tribus litteris, quarum media denotat verticem anguli; vel etiam ſubinde unica lateribus prope verticem interpoſita. Sic in figura 5. angulus qui fit à lineis B A, C A deſignatur vel litteris tribus BAC, vel unica O. *Fig. 5.*

11. Anguli æquales, [vel potius ſimiles] dicuntur; ſi, cum ſibi invicem vertices imponuntur, latera unius congruant lateribus alterius. Ad hoc non requiritur, ut latera ſint æque longa. *Fig. 2, 3.*

12. Inæquales, [ſeu diſſimiles] dicuntur anguli, cum vertice & uno latere congruentibus, alterum non congruit: & ille major dicitur, cujus latus cadit extra. Sic angulus BAE major eſt angulo BAC. [*Hanc autem & præcedentem def. de angulis rectilineis intellige. Vide def.* 13.] *Fig. 5.*

Angulus non minuitur vel augetur, licet crura minuas vel augeas.

Porro quia anguli natura in linearum inclinatione conſiſtit, inclinatio autem linearum quantitas non eſt, neque angulus ullus quantitas erit. Et ſane eodem jure curvitas eſſet quantitas, quo angulus, cum ab invicem non

A 2 magis

magis differant, quàm inflexio & infractio. Quando igitur cum Euclide, aliiſque Geometris angulos æquales eſſe dicemus, nihil aliud, quàm inclinationum ſimilitudo, hoc eſt, laterum congruentia indicabitur. Vide quæ de hac re plenius dicturi ſumus poſt propoſitionem 16. l. 3. [*Tacquetus hoc loco minus accurate de angulo diſſerere videtur. Angulus quidem non eſt* quantitas, *ſed tamen* quantus *eſt, hoc eſt,* augeri *poteſt, vel* minui. *Duæ enim lineæ rectæ in puncto concurrentes*, plures *vel* pauciores *gradus divaricationis à ſe invicem habere poſſunt, adeoque & angulum* majorem *vel* minorem *conſtituere. Unde in definitionib.* 15. *&* 16. *angulus ille* obtuſus *appellatur, qui recto* major *eſt; atque* acutus *qui recto* minor. *Angulus igitur quantitatis capax eſt, & alteri cuivis angulo propriè æqualis aut inæqualis eſſe dicetur. Eodem jure etiam curvitas eſt quantitatis capax, cùm una quævis linea (vel ſuperficies) à linea recta (vel ſuperficie plana) magis aut minus recedere, hoc eſt, magis aut minus curva poſſit eſſe quàm altera.*]

Fig. 2.4. 13. Angulus rectilineus eſt, quem rectæ lineæ efficiunt; curvilineus, quem curvæ; mixtus, quem recta & curva. [*Sed vide quæ ad coroll. poſt prop.* 16. *lib.* 3. *adjecimus.*]

Fig. 6. 14. Cùm recta (CA) ſuper rectam (BF) conſiſtens, in neutram inclinat partem, ac proinde angulos utrinque facit æquales (CAB & CAF,) rectus eſt uterque æqualium angulorum: Recta autem (CA) alteri inſiſtens dicitur perpendicularis, ſeu perpendiculum.

Angulus rectus ſic etiam definiri poteſt.

Fig. 4. Rectus angulus is eſt (BAC,) cui à parte altera æqualis oritur (CAF,) ſi unum latus (BA) produxeris.

Duæ regulæ ſic compactæ ut angulum rectum contineant, Inſtrumentum efficiunt, quod Norma appellatur Illius inventorem Vitruvius c. 2. l. 9. affirmat Pythagoram. Tanta vero anguli recti vis eſt in rebus omnibus conſtruendis, dimetiendis, formandis & firmandis, ut nihil fere effici ſine illo poſſit. Normæ Examen ſic inſtituitur: In quavis recta BF, ſumpto puncto A, Normæ latus AE applica rectæ lineæ AF, & juxta latus alterum deſcribatur recta CA; converſa deinde Norma verſus B, ſi utroque latere congruat rectis CA, AB, ſcito eſſe legitimam & exactam. Ratio patet ex ipſa def. 14.

Fig. 7. 15. Obtuſus angulus eſt (BAC,) qui recto (FAC) major eſt.

Fig. 8. 16. Acutus angulus eſt (LAI) qui recto (FAI) minor eſt.

17. Figura plana, eſt ſuperficies plana, una vel pluribus lineis undique terminata.

18. Circulus eſt plana ſuperficies, unius lineæ circuitu comprehenſa, quæ circumferentia dicitur, à qua, ad aliquod punctum intra contentum (A,) omnes quæ duci poſſunt rectæ lineæ, ſunt æquales. *Fig.* 9.

19. Hoc verò punctum centrum appellatur.

20. Diameter circuli eſt recta per centrum ducta (BC,) ad circumferentiam utrimque terminata, & circulum bifariam dividens; [*ut ex omnimoda ſemicirculorum ſibi invicem ſuperimpoſitorum congruentia abundè liquet.*] *Fig.* 9.

21. Semidiameter, ſive radius, eſt recta (AF,) ex centro ad circumferentiam ducta. *Fig.* 9.

22. Semicirculus eſt figura (BLC) comprehenſa à diametro (BC) & dimidia circumferentia (BLC.) *Fig.* 9.

Circulus ita generatur: Si recta linea (AB) uno extremo ſuo (A) manente fixo, in orbem circumagatur; recta ipſa circulum, extremitas illius altera (B) circumferentiam producet. *Fig.* 9.

Porro mira circuli indoles vel in ipſo exortu ſuo apparet. Ad ejus namque geneſim contraria concurrunt, motus & quies, dum linea movetur, & ejus extremum quieſcit. Dein lineæ generantis puncta omnia, cum inæquales eodem tempore periodos abſolvant, diverſa celeritate moventur. Tertio peripheria circulum ambiens, conſtat quodammodo ex contrariis & extremis ſine medio; ex concavo nimirum & convexo, inter quæ rectum ita medium eſt, ut æquale inter majus & minus; idque eo mirabilius eſt, quod ea contraria inſint lineæ nullam latitudinem habenti. Hæc tria Ariſtoteli viſa ſunt admiranda, ex quo illa deprompſimus. At prodigia circuli longe majora aperuimus in diſſertatione Phyſico-Mathematica, quam una cum Cylindricis & Annularibus in lucem emiſimus anno 1652. Iſthic ea leget, qui volet.

Circumferentiam Mathematici partiri ſolent in 360. æquales partes (quas gradus vocant) ob multas illius numeri commoditates: ſemicircumferentiam in 180. quadrantem in 90.

23. Rectilinea figura, eſt ſuperficies plana, rectis lineis undique terminata.

24. Triangulum, ſive trilaterum, eſt plana ſuperficies tribus rectis comprehenſa.

Hæc figurarum rectilinearum prima ac ſimpliciſſima eſt, in quam cæteræ omnes reſolvuntur.

25. Triangulum æquilaterum eſt, quod tria latera habet æqualia. *Fig.* 10.

26. Triangulum Iſoſceles, ſeu æquicrure, quod duo tantum latera habet æqualia. *Fig.* 11, 12.

Fig. 13. 27. Scalenum, quod tria latera inæqualia habet.

Fig. 13. 28. Rectangulum triangulum eſt, quod unum angulum habet rectum.

Fig. 12. 29. Obtuſangulum triangulum eſt, quod unum angulum habet obtuſum.

Fig. 10, 11. 30. Acutangulum triangulum eſt, quod tres habet acutos angulos.

Fig. 14, 15. 31. Inter figuras quadrilateras, rectangulum eſt, quod quatuor angulos habet rectos, adeoque æquales; ſive latera æqualia ſint, ſive non.

Fig. 15. 32. Quadratum eſt, quod æquilaterum & rectangulum eſt, ac proinde æquiangulum.

Omne quadratum eſt rectangulum, ſed non contra.

Fig. 16. 33. Rhombus eſt, qui æquilaterus, ſed non æquiangulus eſt.

Fig. 17. 34. Rhomboides, quæ adverſa latera & angulos habens æqualia, neque æquilatera, neque æquiangula eſt.

Fig. 14, 15, 16, 17. 35. Parallelogrammum eſt figura quadrilatera, cujus bina oppoſita latera (A B, F C, & B F, A C) ſunt parallela. Quid vero ſint parallelæ, dicetur ſeq. defin.

Omne rectangulum & quadratum eſt parallelogrammum, ut ſuo loco demonſtrabitur; ſed non contra.

Fig. 18. 36. Rectæ lineæ parallelæ ſeu æquidiſtantes ſunt, quæ in eodem plano exiſtentes, utrimque in infinitum protractæ, æqualibus ſemper intervallis inter ſe diſtant.

Æqualia intervalla deſumuntur penes perpendiculares. Quare ſi omnes ad unam ex duabus parallelam A B perpendiculares Q L, æquales fuerint, dicentur rectæ A B, C F parallelæ.

Generantur parallelæ, ſi recta L Q ad rectam A B perpendicularis, per A B ſemper perpendiculariter moveatur: tunc enim ejus extremum L deſcribit parallelam CF.

Euclides definit parallelas eſſe rectas lineas, quæ in eodem plano exiſtentes, utrimque in infinitum productæ, in neutram partem coincidunt. Verum quia dantur lineæ quæ ſimul in infinitum productæ, licet ad ſe mutuò appropinquent ad intervallum quovis dato minus, ac proinde, licet non ſint parallelæ, nunquam tamen concurrant, (cujuſmodi ſunt Hyperbola & recta linea; conchois & linea recta; item duæ æquales parabolæ circa eundem axem deſcriptæ, & plures aliæ;) Non videtur per ſe notum eſſe, duas rectas, licet nunquam concurrant, fore ſemper æquali intervallo diſſitas, hoc eſt æquidiſtantes: poſſet enim quiſpiam objicere, fieri fortaſſis poſſe, ut etiam ipſæ, licet ad ſe mutuò ſemper appropinquarent, tamen nunquam concurrerent.

Quare Euclidea definitio paralleliſmi naturam non ſatis explicat. [*At non neceſſe eſt ut definitio Mathematica naturam rei definitæ explicet: eſt enim definitio nominis, non rei. Cum igitur Euclides eas rectas lineas nominaverit* parallelas, *quæ in eodem plano exiſtentes, utrimque in infinitum productæ, in neutram partem coincidunt; & cum ſemper poſtea in hoc ſenſu parallelas uſurpaverit; cum denique eas definiverit per proprietatem ejuſmodi, quæ nullis rectis niſi verè parallelis ſeu æquidiſtantibus convenit, non video quo jure culpari poſſit.*]

37. Parallelogrammi & cujuſvis quadrilateri diameter, [*ſive diagonalis,*] eſt recta (AF) per angulos oppoſitos ducta. *Fig.* 17.

38. Figuræ planæ pluribus lateribus quam quatuor comprehenſæ, multilateræ, ſeu multangulæ, ſeu Græca voce, polygonæ vocantur.

39. Rectilineæ figuræ externus angulus eſt, qui latere producto extra figuram oritur. Tales ſunt FBC, GCA, HAB. Tot igitur figura quælibet habet externos angulos, quot latera & angulos internos. *Fig.* 19.

[40. *Quando linea vel angulus vel figura quævis* biſecari *vel* bifariam ſecari *dicitur; intellige illorum quodvis in duas æquales partes eſſe diviſum: Item* triſecari, *vel* trifariam ſecari *dicitur id quod in tres partes æquales dividitur; atque ita porro.*]

Poſtulata.

Poſtulatum, eſt quod facile fieri poſſe per ſe ſit manifeſtum. Poſtuletur ergo ut concedatur.

1. A quovis puncto ad quodvis punctum rectam lineam ducere.

2. Rectam lineam terminatam, in directum & continuum protendere.

3. Quovis centro ad quodvis intervallum circulum deſcribere.

Axiomata.

Axioma eſt ſententia per ſe manifeſta.

1. Quæ eidem ſunt æqualia, & inter ſe æqualia ſunt. Et, quod uno quovis æqualium majus aut minus eſt, majus quoque aut minus eſt altero æqualium.

2. Si æqualibus addas æqualia, tota erunt æqualia.

3. Si ab æqualibus demas æqualia, quæ remanebunt, erunt æqualia.

4. Si inæqualibus addas æqualia, tota erunt inæqualia.

5. Si ab inæqualibus tollantur æqualia, quæ remanent, erunt inæqualia.

6. Quæ ejuſdem [*vel æqualium*] dimidia ſunt, inter ſe ſunt æqualia: & quæ ejuſdem [*vel æqualium*] ſunt dupla, vel tripla, vel quadrupla, inter ſe æqualia ſunt. [*Item, inæqualium dimidia; vel dupla, tripla, &c. inæqualia erunt.*]

7. Quæ mutuò ſibi congruunt æqualia ſunt.

Non rectè Clavius hoc Axioma convertit. Falſum eſt enim, ea quæ univerſim inter ſe æqualia ſunt, ſibi mutuò congruere: Diſſimiles enim magnitudines poſſunt eſſe æquales, neque tamen congruunt. Quod ſi ſimiles & æquales fuerint, valebit converſa. Statuamus igitur axioma.

8. Si rectæ lineæ æquales fuerint, ſibi mutuò congruent; & anguli [*rectilinei*] ſi æquales fuerint, ſibi mutuò congruent. [*Et ſi circuli æquales fuerint, ſibi mutuò congruent; & ſi ejuſdem circuli, vel æqualium circulorum arcus fuerint æquales, ſibi mutuò congruent arcus iſti: Aut ſi quadrata, vel alia quæcunque figuræ ſimiles æquales fuerint, ſibi mutuò congruent.*]

9. Totum ſua parte majus eſt: [*æquale autem eſt omnibus partibus ſuis ſimul ſumptis.*]

10. Omnes anguli recti inter ſe æquales ſunt.

Fig. 20. Euclidis axioma undecimum eſt: Si in duas rectas (A B, CF) incidens recta (GI) angulos ad eandem partem interiores (BLQ, FQL) fecerit duobus rectis minores, duæ illæ rectæ ſi protrahantur, tandem concurrent ad illam partem, ad quam ſpectant anguli duobus rectis minores. Hoc verò non eſt clarius illo, quod Prop. demum 29. Euclides ipſe demonſtrat: videlicet; ſi anguli (B LQ, F Q L) fuerint duobus rectis æquales, rectæ (A B, C F) nunquam concurrent. Quare axioma illud è principiorum numero cum Gemino & Proclo, aliiſque Geometris rejecimus; eſt enim non axioma, ſed theorema, idque demonſtrabimus poſt Propoſitionem 31. Ex defin. 36. hujus libri. Ejus loco alia duo ſequentia ſubſtituo, quorum veritas ex definitione paralleliſmi ſtatim apparet. Eſto igitur axioma.

11. Parallelæ lineæ communi perpendiculo utuntur. Hoc eſt, recta, quæ ad parallelarum unam eſt perpendicularis, eſt quoque perpendicularis ad alteram.

Fig. 21. 12. Perpendicula bina (L O, Q I) ex parallelis æquales utrimque intercipiunt partes (LI, OQ.)

[*Euclidis axioma undecimum (proprietatibus paralleliſmi demonſtrandis inſerviens,) cuilibet perpendenti ſatis manifeſtum videtur. Quia vero Tacqueto libuit Euclideam Paralle-*

larum

larum Definitionem loco movere, eique novam ſubrogare, æquum erat ut in Axiomatis hujus Euclidei locum, nova etiam axiomata duo, definitioni ſuæ Parallelarum magis accommoda ſubſtitueret.]

13. Duæ rectæ lineæ ſpatium non comprehendunt.

Ad hoc ſiquidem opus eſt ad minimum tribus.

14. Duæ rectæ lineæ nequeunt habere ſegmentum commune: & omnes rectæ punctualiter ſe interſecant.

Rectæ AX occurrat recta ZD. ea ſi producatur non perget per DA, ſed in E, ſic ut rectam XA non niſi punctualiter interſecet. Axioma ex notione ipſa rectæ lineæ evidentiſſimum eſt. [*Imo verò ex ipſa definitione lineæ, quæ magnitudo tantum longa eſt, abſque latitudine, ſatis patet omnes omnium linearum, ſive rectarum, ſive curvarum, ſeu denique recta & curva interſectiones, puncta eſſe.*] *Fig. 22.*

Tamen quia nonnulli tam ſubtiliter philoſophantur, ut credant rectas lineas, aliqua ſui parte commiſceri poſſe, lubet in eorum gratiam hoc axioma amplius declarare.

Habeant, ſi fieri poteſt, duæ rectæ AX, AZ partem communem AD. Centro A deſcribatur circulus, ſecans rectas in B & C. tum accipiatur arcus BF æqualis arcui BC, & intelligatur ducta eſſe recta FA.

Rectæ igitur CA & FA eundem prorſus ſitum habent reſpectu rectæ BA. Sed recta CA cum recta BA habere dicitur commune ſegmentum DA: ergo etiam recta FA habet cum BA commune ſegmentum DA.

Tres jam igitur rectæ CA, BA, FA commune DA ſegmentum habent.

Sumatur rurſum arcus FG æqualis prioribus BF, & CB, & intelligatur ducta eſſe recta GA. Rurſum liquet rectas BA, GA, eundem habere ſitum reſpectu rectæ FA. Sed jam oſtenſum eſt rectam BA habere cum recta FA commune ſegmentum DA. Ergo etiam recta GA cum FA commune habet ſegmentum DA.

Jam ergo rectæ quatuor CA, BA, GA, FA commune DA ſegmentum habent, Eodem prorſus modo oſtendam, ſi per totam circuli circumferentiam ſumantur arcus prioribus æquales, omnes ſimul circumquaque rectas lineas ductas ad A unum idemque habituras commune ſegmentum DA. Hoc tam immane abſurdum ſequitur ex eo, quod ponerentur binæ rectæ CA, BA habere ſegmentum commune. Impoſſibile eſt igitur ut duæ rectæ ſegmentum commune habeant.

In hoc axiomate vis tota nititur illius celebrati in ſcholis argumenti, quo demonſtratur magnitudinem ex punctis

omnino indiviſibilibus numero finitis componi non poſſe: & eſt ejuſmodi. Conſtent, ſi fieri poteſt, magnitudines ex punctis. Circa idem centrum deſcriptæ intelligantur quotcumque circumferentiæ circulares, & ponatur extima ſeu maxima componi ex centies mille punctis, à quibus ſingulis ad centrum commune ductæ intelligantur rectæ lineæ.

Ex axiomate jam explicato certum eſt, rectas illas nuſquam commiſceri, niſi in centro ſolo. Quare dum omnes medias peripherias pertranſeunt, in iis æque multa deſignant puncta, ac erant in extima. Omnes igitur circumferentiæ concentricæ æque multis punctis conſtant, ac proinde omnes inter ſe æquales erunt. Atque ita circumferentia hac in charta deſcripta, æqualis probabitur circumferentiæ firmamenti. Aliis prope innumeris demonſtrationibus hic error obruitur. Sed unam illam hoc loco attuli præ cæteris, quod paſſim ſit decantata, & ex præſenti axiomate immediate pendeat.

[15. *Æqualium circulorum diametri erunt æquales; ut & eorum ſemidiametri ſive radii æquales erunt. Et, ſi duorum circulorum radii (aut diametri) æquales fuerint, circuli erunt æquales. Idem puta de æqualium quadratorum lateribus & diametris; aut de quarumcunque figurarum ſimilium & æqualium lateribus & diametris* (a) *homologis: & converſim, ex æqualitate homologorum laterum aut diametrorum, concludes figurarum ſimilium æqualitatem.*

(a) *Vide def. 11. l. 5. & def. 1. l. 6.*

16. *Porro etiam, majoris circuli diameter major eſt, minoris minor: & viciſſim. Idem puta de quadratorum inæqualium lateribus aut diametris; nec non de figurarum quarumcunque ſimilium & inæqualium lateribus & diametris homologis: & viciſſim.*]

Propoſitionum aliæ faciendum aliquid proponunt, & vocantur Problemata; aliæ in ſola contemplatione ſiſtunt, quæ idcirco Theoremata inſcribuntur.

PROPOSITIONES.

Citationes requiſitæ reperiuntur ad marginem. Cùm citantur propoſitiones, primus numerus deſignat propoſitionem, littera (*l*) cum numero ſequenti librum denotat: ut ſi occurrat (*per 5. l. 3.*) ita leges; (per propoſitionem quintam libri tertii.) Figura quærenda ſemper eſt inter figuras ejus libri, in quo tum verſamur: citationes reliquæ facile intelligentur.

Traduntur hoc libro affectiones primæ triangulorum & parallelogrammorum. Propoſitiones illuſtriores ſunt 32, 35, 37, 41, 44, 45, 47.

PRO-

PROPOSITIO PRIMA.

SUper data recta (AB) triangulum æquilaterum conſtituere. Fig. 23.

Centro A, intervallo AB (*a*) deſcribatur circulus FCB; & centro B, intervallo eodem BA deſcribatur circulus ACL, priorem ſecans in puncto C, ex quo ducantur rectæ CA, CB. (a) *Per poſtul.* 3.

Dico triangulum ACB factum eſſe æquilaterum. Nam recta AC eſt (*b*) æqualis rectæ AB, cum ſint ejuſdem circuli FCB ſemidiametri; & recta BC etiam æqualis eſt eidem rectæ BA, cum ambæ ſint ſemidiametri circuli LCA. Ergo AC, BC (*c*) ſunt æquales inter ſe: ac proinde omnia latera trianguli ſunt æqualia. Ergo triangulum ACB & (*d*) æquilaterum eſt, & ſuper data recta AB conſtitutum, quod erat faciendum. (b) *Per def.* 18. (c) *Per axio.* 1. (d) *Per def.* 25.

PROPOSITIO II.

AD datum punctum (A) data recta (EF) æqualem ponere. Fig. 24.

Accipe circino (*e*) intervallum EF, & transfer ex A in D, erit recta AD par datæ EF. (e) *Poſtul.* 3.

PROPOSITIO III.

DAtis duabus rectis inæqualibus, de majore (GH) minori (EF) parem auferre (GI.) Fig. 24.

Accipe circino (*f*) intervallum minoris datæ EF, & transfer in majorem ex G in I. (f) *Poſtul.* 3.

PROPOSITIO IV.

SI duorum triangulorum (X, Z) latus unum (BA) uni (FL) & alterum (CA) alteri (IL) ſit æquale, angulique (A & L) ab illis lateribus facti, etiam ſint æquales; æquabuntur etiam & baſes (BC, FI,) & tota triangula (X, Z,) & reliqui ad baſim anguli (B, F & C, I) qui lateribus æqualibus opponuntur. Fig. 25.

Nam

(a) Per axio. 8. Nam ſi intelligamus triangulum Z triangulo X ſuperponi, latera LF, LI perfectè congruent (*a*) ſibi æqualibus lateribus AB, AC, ſic ut puncta tria L, F, I, cadant ſupra tria puncta A, B, C. Ergo tum etiam baſis FI tota cadet ſupra totam baſim BC. Sed & anguli F, B, itemque I, C, totaque triangula ſibi mutuò tunc congruent. Omnia igitur per 7. ax. æqualia ſunt. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Fig. 25. Simili fere ratiocinio, theorema ſequens, cujus mox erit uſus, licebit demonſtrare.

Si duorum triangulorum X, Z, latera BC, FI æqualia fuerint, & anguli illis lateribus adjacentes, nimirum B & C ipſis F & I fuerint æquales, omnia reliqua, & triangula ipſa, æqualia erunt.

(b) Per axio. 8.
(c) Per axio. 8.
Quoniam enim anguli B & C æquantur angulis F & I, ſi latus FI imponas lateri ſibi æquali BC, illi (*b*) congruet. Tum vero ob æqualitatem angulorum F, B, & I, C, etiam (*c*) FL cadet ſupra BA, & IL ſupra CA. Ergo etiam punctum L incidet in punctum A; (ſi enim caderet extra A, latera FL, IL non inciderent in latera BA, CA.) Ergo omnia ſunt per axioma 7. æqualia.

PROPOSITIO V.

Fig. 26. *Trianguli Iſoſcelis ſeu æquicruris ad baſim anguli (A, C) æquales ſunt.*

(d) Per 4. I. Intelligatur triangulum ABC bis poſitum; ſed ſitu converſo *c b a*. Quoniam igitur in duobus triangulis ABC, *c b a*, ex hypotheſi æquale eſt latus AB, lateri *c b*, & latus CB lateri *a b*, & angulus B angulo *b*; etiam (*d*) ad baſim angulus A angulo *c* æqualis erit. Quod erat demonſtrandum. Iidem enim ſunt anguli C & *c*.

Corollarium.

Æquilaterum ergo triangulum, etiam æquiangulum eſt.

PROPOSITIO VI.

SI in triangulo (ABC) duo anguli (A & C) æquales fuerint, etiam latera (AB, BC) iis oppoſita, æqualia erunt. Fig. 26.

Intelligatur triangulum ABC bis poſitum; ſed ſitu converſo *cba*. Quoniam igitur in duobus triangulis ABC, *cba* æquatur latus unum AC uni lateri *ca*, & angulus A angulo *c*, & angulus C angulo *a*; etiam reliqua omnia (*a*) erunt æqualia, ac proinde latus AB æquabitur lateri *cb*; quod erat demonſtrandum. Eædem enim ſunt lineæ CB & *cb*.

(a) *Per Schol. prop.* 4.

Corollarium.

ÆQuiangulum ergo triangulum, etiam æquilaterum eſt.

PROPOSITIO VII.

EST propter 8. quæ ſine illa ſeorſim propoſita demonſtrabitur.

PROPOSITIO VIII.

SI duo triangula (X, Z) [vel X, Y] *habuerint omnia latera ſibi mutuò æqualia (AC ipſi EF; CB ipſi FI; AB ipſi EI;) etiam angulos omnes æqualibus lateribus oppoſitos habebunt æquales (C ipſi F; A ipſi E; B ipſi I.)* Fig. 27.

Ponatur enim latus AB ſupra ſibi æquale EI, [*ita ut punctum A coincidat cum E, ac B cum I, & reliqua latera cadant ad eandem partem rectæ AB vel EI.*] Tum vero punctum C, vel incidet in punctum F vel non. Si incidit in F, tota triangula congruent, ac proinde omnes anguli (*b*) æquales erunt. *Cadet vero punctum C in punctum F. Nam*

(b) *Per axio.* 8.

Centro E, ſemidiametro EF, deſcribatur circulus; & centro I, ſemidiametro IF, deſcribatur circulus. Punctum C ob latera

tera æqualia erit in circuli utriuſque circumferentia; atque adeò in utriuſque circumferentiæ communi interſectione F. Q. E. D.

Fig. 28. Si C cadat extra F, ducatur FC. Quoniam per hypotheſim latera EF, AC æquantur, erit (*a*) angulus EFC par angulo ECF. Ergo IFC major erit quam ECF. Ergo IFC multò major erit quam ICF. Rurſum, quia per hypotheſim IF, BC æquantur, erit IFC (*b*) par ICF. Ergo IFC & multò major eſt quam ICF, & æqualis, quod eſt impoſſibile. Ergo C non cadit extra F. Ergo, &c.

(a) Per 5. l. 1.
(b) Per 5. l. 1.

Plures caſus, quos hoc theorema admittit, conſultò prætermiſi, ne tyrones fatigarem. Neque verò difficulter eorum demonſtratio ex demonſtratione jam poſita elicietur.

PROPOSITIO IX.

Fig. 29. *Datum angulum rectilineum (IAL) biſariam ſecare.*

Ex lateribus anguli accipe circino æquales AB, AC; centris B ac C deſcribe duos æquales circulos ſe ſecantes in F, ducaturque recta FA. Hæc angulum biſecabit.

Ducantur enim BF, CF; triangula FAB, FAC ſunt ſibi mutuò æquilatera; nam latera AB, AC ex conſtitutione æqualia ſunt, & latera BF, CF, quia (*c*) æqualium circulorum ſemidiametri, etiam æquantur; & AF utrique triangulo commune eſt. Ergo anguli BAF, CAF (*d*) æquales ſunt. Biſectus (*e*) eſt ergo datus angulus IAL, quod erat faciendum.

(c) Per axio. 15.
(d) Per 8. l. 1.
(e) Per def. 10.

Corollarium.

Hinc patet quomodo angulus ſecari poſſit in æquales angulos 4. 8. 16. &c. ſingulas nimirum partes iterum biſecando.

Scholium.

Methodum ſecandi angulos in æquales quotcunque, circino & regula hactenus nemo docuit.

Ex Pappo tamen & Archimede habemus curvas quaſdam lineas, quadratricem videlicet & ſpiralem; quarum adminiculo id obtinetur. Anguli triſectio perficitur à Pappo l. 4. prop. 31. præſidio hyperboles, quod etiam obtineri poteſt ope parabolæ, vel conchoidis.

Mecha-

Mechanice datum angulum in quotcunque ſecabis æquales angulos, ſi ex anguli vertice A tanquam centro intra anguli crura arcum deſcribas, eumque dividas in quot placuerit æquales partes; rectæ enim ex A per diviſionum puncta emiſſæ, angulum ſecabunt in partes totidem æquales. *Fig.* 30.

PROPOSITIO X.

D*Atam rectam finitam (AB) ſecare biſariam.* *Fig.* 31.

Super data AB fac triangulum æquilaterum (*a*) AGB, [*vel etiam iſoſceles æqualium crurum AG, BG.*] Angulum ejus G (*b*) biſeca per rectam GC. Eadem biſecabit rectam AB datam.

Nam in triangulis X, Z, latus CG eſt commune, & per conſtructionem GB, GA æqualia, anguliqne iis contenti AGC, BGC æquales. Ergo baſes AC, BC (*c*) æquantur. Biſecta (*d*) eſt ergo data AB. Quod erat faciendum.

Pro praxi ſatis erit centris A & B duos æquales circulos deſcribere, ſe ſecantes in G & L, ac ducere rectam GL.

(a) *Per* 1. *l.* 1.
(b) *Per præced.*
(c) *Per* 4. *l.* 1.
(d) *Per def.* 40.

PROPOSITIO XI.

E*X dato puncto (A) in data recta (LI) perpendicularem excitare.* *Fig.* 32.

Circino cape æquales AC, AF. Centris C & F deſcribe duos æquales circulos ſe ſecantes in B. Ex B ad A ducta recta erit perpendicularis.

Ducantur enim CB, FB. Triangula X & Z ſibi mutuo æquilatera ſunt [*propter latus AB commune, latera AC, AF æqualia per conſtructionem, & latera BC, BF æqualia per axio.* 15.] Ergo anguli CAB, FAB (*e*) æquales ſunt. Ergo BA (*f*) perpendicularis eſt. Ex dato igitur puncto, &c. Quod erat faciendum.

Praxis tum hujus quam ſequentis expeditur facillime præſidio normæ.

(e) *Per* 8. *l.* 1.
(f) *Per defin.* 14.

PRO-

PROPOSITIO XII.

Fig. 33. *EX dato extra rectam infinitam (LQ) puncto (A) perpendicularem ducere.*

Centro A deſcribe circulum, qui ſecet datam LQ in C & I. Rectam CI biſeca (a) recta AB. Ea erit perpendicularis,

(a) Per 10. l. 1.

Ducantur enim AC, AI. Quoniam per conſtructionem triangula X & Z ſunt ſibi mutuò æquilatera; erunt anguli (b) CBA, IBA æquales. Ergo AB perpendicularis (c) eſt. Ex dato igitur puncto, &c. Quod erat faciendum.

(b) Per 8. l. 1.
(c) Per def. 14.

PROPOSITIO XIII.

Fig. 34. *REcta (BA) ſuper rectam (CF) conſiſtens, aut duos rectos angulos facit, aut duobus rectis æquales.*

Nam ſi BA inſiſtat perpendiculariter, erunt per def. 14. anguli BAC, BAF utrimque recti. Si vero BA inſiſtat oblique, excitetur (d) perpendicularis AL. Quia tum anguli inæquales CAB, FAB eundem locum occupant, quem duo recti CAL, LAF, ac proinde iis congruunt, erunt (e) his illi æquales. Quod erat demonſtrandum.

(d) Per 11. l. 1.
(e) Per axio. 7. l.

Corollaria.

1. EOdem modo demonſtrabitur, ſi plures rectæ quam una, eidem rectæ ad idem punctum inſiſtant, angulos effici duobus rectis æquales.

Fig. 37. 2. Duæ rectæ ſe invicem ſecantes BAC, FAL efficiunt angulos, quatuor rectis æquales. Patet ex propoſ.

Fig. 36. 3. Omnes anguli circa unum punctum conſtituti, conficiunt quatuor rectos. Patet ex Corol. 2. ſunt enim quatuor recti in plures partes ſecti.

PROPOSITIO XIV.

Fig. 35. *SI duæ rectæ (XR, ZR) ad idem utrimque punctum rectæ QR faciant angulos (XRQ, ZRQ) duobus*

duobus rectis æquales; (XR, ZR) unam rectam efficient.

Si negas, faciant XR, BR unam rectam. Ergo anguli XRQ, QRB (*a*) conficient duos rectos, quod (*b*) eſt abſurdum, cùm ex hyp. XRQ, QRZ duos rectos efficiant. (a) *Per* 13. *l.* 1. (b) *Contra axio.* 9.

Coroll. *Hinc in Catoptrica colligimus lucis radium, inter reflectendum, per angulum reflexionis angulo incidentiæ æqualem tendentem, per viam omnium breviſſimam ferri. Ubi nempe anguli BED, AEF æquantur, lineæ AE & EB ſimul ſumptæ, lineis quibuſcumque, puta AF & FB ſimul ſumptis ſunt breviores. A puncto enim B* (c) *demittatur linea perpendicularis BC: & fiant BD & CD æquales: ducantur etiam EC & FC. In triangulis BED & CED, cùm latus DE ſit utrique commune, & latus BD lateri DC ex conſtructione æquale, Angulus etiam BDE angulo CDE* (d) *æqualis;* (e) *æquabuntur reliqua omnia; eritque BE æqualis CE, anguluſque BED angulo DEC æqualis. Et, ſi æqualibus BE, CE addatur EA, erit ſumma linearum BE & EA æqualis ſummæ linearum CE & EA. Et cum ex hypotheſi æquentur anguli BED, AEF; & angulus BED antea oſtenſus ſit æqualis angulo DEC; ergo & angulus AEF æquatur* (f) *angulo DEC; & addito communi angulo DEA, ſumma angulorum DEA, DEC æquabitur ſummæ angulorum DEA, AEF. Sed anguli DEA, AEF conficiunt* (g) *duos rectos. Ergo & anguli DEA, DEC ſunt duobus rectis æquales, & proinde (per hanc prop.) lineæ AE, EC unam rectam CA efficiunt, quæ ex ante demonſtratis, æquatur ſummæ rectarum AE & EB.* Fig. 37. (c) *Per* 12. *l.* 1. (d) *Per def.* 14. (e) *Per* 4. *l.* 1. (f) *Per axio.* 1. (g) *Per* 13 *l.* 1.

Eodem modo in triangulis BDF, CDF, demonſtrabitur æqualitas linearum BF & CF; itemque addito communi AF, oſtendetur ſummam linearum AF & FB, ſummæ linearum AF & FC æqualem eſſe. Sed CA, (hoc eſt, ſumma linearum AE & EB) minor eſt quàm ſumma linearum AF & FC, (hoc eſt, quàm ſumma linearum AF & FB) per definitionem rectæ lineæ, quæ minima eſt omnium quæ inter puncta A & C duci poſſunt. Ergo lineæ AE & EB ſimul ſumptæ, lineis AF & FB ſimul ſumptis ſunt breviores. Q. E. D.

PROPOSITIO XV.

S*I duæ rectæ (BC, FL) ſe ſecuerint (in A,) erunt anguli ad verticem (A) oppoſiti, æquales.* Fig. 38.

(a) Per.13. l. 1. (b) Per eand. (c) Per axio. 1. (d) Per axio. 3. Fig. 39.

Nimirum LAB ipſi CAF, & BAF ipſi LAC. Nam quia BA inſiſtit rectæ LF, erunt LAB, FAB (*a*) pares duobus rectis. Et quia FA inſiſtit rectæ BC, erunt (*b*) quoque FAC, FAB pares duobus rectis. Ergo (*c*) duo ſimul LAB, FAB æquantur duobus ſimul CAF, FAB. Ablato igitur communi FAB, remanent (*d*) æquales LAB, CAF. Eodem modo oſtendam æquales eſſe BAF, LAC.

(e) Per 12. l. 1. (f) Per 4. l. 1. (g) Per 15. l. 1.

Coroll. *Hinc illi qui ſphærulis eburneis & proinde elaſticis ludunt, pilam adverſariam repercutiendo amovere diſcant. Sit ſphærularum altera impellenda B, altera quæ impellenda eſt A; Latus verò rectilineare CD: Eſto linea BE lineæ CD* (e) *perpendicularis, & ſit DE æqualis BD, & ducatur recta AE ſecans CD in F, & jungatur BF. Si pila ſecundum rectam AFE impellatur, ad punctum F ita reflectetur, ut poſt reflexionem ad B tendat. In triangulis enim BFD, EFD, Latus FD, eſt utrique commune, & Latus DB lateri DE æquale, & anguli ad D æquales ſive recti. Tota itaque triangula* (f) *æquantur: & proinde angulus BFD angulo DFE, ſive ad verticem oppoſito* (g) *AFC æqualis eſt. Angulus autem AFC eſt angulus incidentiæ, & Angulus BFD angulus reflectionis: qui cum in omnibus corporum perfectè elaſticorum reflectionibus ſibi invicem æquentur, liquet pilam A elaſticam verſus E tendentem, ad pilam B poſt reflectionem pergere, eamque impellere debere.* Q. E. D.

PROPOSITIO XVI. XVII.

Continentur in prop. 32. [Et in ejuſdem prop. corollariis demonſtrantur.] *Neque ante illam adhibentur.*

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 40.

In omni triangulo, angulus (A) major eſt, qui majori lateri (BO) opponitur: (B) minor, qui minori (AO.)

(h) Per 6. l. 1.

Nequit A eſſe par B, aliàs (*h*) latera BO, AO æquarentur, contra hypotheſim. Neque etiam A minor eſſe quàm B. Nam ſi A minor eſt, B major, poterit intra angulum B, per rectam BF, fieri angulus ABF æqualis A. Tum verò per 6. æquales erunt BF, AF, & ſi addas utrique OF, erunt BF, FO æquales AO. Sed AO per hyp. minor eſt

quàm BO. Ergo etiam BF, FO minores ſunt quàm BO, quod repugnat definitioni lineæ rectæ, quæ eſt omnium breviſſima. Angulus igitur A nec minor eſt angulo B, nec æqualis. Ergo major; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XIX.

IN omni triangulo, latus (BO) majus eſt, quod opponitur majori (A) angulo: (AO) minus, quod minori (B.) Fig. 40.

Eſt converſa prioris. BO non eſt minus quàm AO, aliàs per 18. angulus A eſſet minor angulo B, contra hyp. Neque etiam BO æquale eſt AO, aliàs per 5. anguli A, B æquarentur, rurſus contra hyp. Ergo BO majus eſt quàm AO. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XX.

OMnis trianguli duo quælibet latera reliquo ſunt majora.

Eſt Archimedi inſtar axiomatis; immediatè ſiquidem patet ex definitione Archimedeâ lineæ rectæ, quam vide ſupra in definitionibus.

PROPOSITIO XXI.

SI à terminis unius lateris (AB) intra triangulum duæ rectæ jungantur (AO, BO;) hæ lateribus trianguli (AC, BC) minores ſunt, majorem verò angulum (AOB) comprehendunt. Fig. 41.

1. Pars. Produc AO in F. AC, CF ſunt (a) majores quàm AF. Additâ ergo communi FB, erunt AC, BC majores quàm AF, FB. Rurſum OF, BF ſunt (b) majores quàm OB. Additâ ergo communi AO, erunt AF, FB majores quàm AO, OB. Ergo AC, CB ſunt multò majores, quàm AO, OB.

(a) Per 20. l. 1.
(b) Per eand.

2. Pars demonſtrabitur in Coroll. 2. partis primæ prop. 32. Eâ interim non utemur.

PROPOSITIO XXII.

Fig. 42. *EX datis tribus rectis (BO, LB, LO) quarum duæ qualibet reliquâ ſint majores, triangulum conſtituere.*

Aſſumatur datarum una BL, atque unâ ejus extremitate B acceptâ pro centro, intervallo alterius datæ BO deſcribatur arcus.

Deinde acceptâ pro centro extremitate alterâ L, intervallo tertiæ LO deſcribatur arcus priorem ſecans in O: ducanturque rectæ BO, LO. Dico factum.

Demonſtratio patet ex conſtructione.

PROPOSITIO XXIII.

Fig. 42. *AD datum in rectâ punctum (B) angulum efficere æqualem dato (A.)*

Ducatur utcumque CF ſecans latera dati anguli A. In datâ rectâ ex B accipe BL parem AF. Centro B intervallo AC deſcribe circulum: item alium centro L intervallo FC qui priorem ſecet in O. Ex O ad B & L duc rectas.

Erit angulus LBO par dato A.

Nam per conſtr. triangula ſibi mutuò ſunt æquilatera. Ergo per 8. anguli B & A ſunt æquales.

Fig. 43. Cor. 1. *Hinc lineam inacceſſam AB metiri licet. A puncto enim quocumque C obſervetur angulus ACB, & menſurentur lineæ AC, BC: & in plano quocumque acceſſibili, ad punctum F, ſuper rectâ infinitâ EF, fac angulum angulo C æqualem, & menſurentur lineæ FD, FE, lineis AC & BC reſpectivè æquales, & jungatur DE: Erit hæc æqualis lineæ inacceſſæ AB. Nam in triangulis ACB, DFE, propter latera AC, CB lateribus DF, FE reſpectivè æqualia, & angulum C angulo F æqualem, erit* (a) *baſis AB baſi DE æqualis.*

(a) Per 4. l. 1.

Fig. 44. Cor. 2. *Hinc etiam aliâ ratione, Thaletem ſecuti, lineam inacceſſam metiri diſcimus. Sit linea inacceſſa AD cui ad extremum ejus punctum A* (b) *erigatur perpendicularis AC, & capiatur angulus ACD, eique ex alterâ parte lineæ AC,* (c) *æqualis conſtituatur angulus ACB, &* (d) *producantur*

(b) Per 11. l. 1.
(c) Per hanc pr.
(d) Per poſtul. 2.

DA,

DA, CB donec concurrant in B. Linea AB acceſſibilis, erit linea inacceſſa AD æqualis. Nam in triangulis ABC, ADC, ob CA ipſi BAD perpendicularem, anguli ad A ſunt recti, & proinde æquales; & anguli ad C ſunt æquales per conſtr. & latus AC commune. Ergo (a) *omnia reliqua erunt æqualia, & latus AB lateri AD æquale erit.* (a) Per Schol. poſt p. 4. l. 1.

Scholium.

IN gratiam tyronum viſum eſt hîc nonnulla ad praxim angulorum neceſſaria proponere.

Anguli menſura eſt circuli peripheria, quæ ex A vertice anguli tanquam centro deſcribitur, ut patebit ex prop. ultimâ lib. 6. Fig. 45.

Itaque quot gradus continebit arcus BC inter anguli BAC crura interceptus, tot graduum dicetur eſſe angulus BAC. Et quoniam rectum angulum BAF metitur quadrans peripheriæ BF, gradus 90. continens, dicetur rectus angulus eſſe graduum 90. Similiter quia duos rectos menſurat dimidia circumferentia in 180. gradus ſecta, & quatuor rectos circumferentia tota ſecta in gradus 360. dicentur duo recti efficere gradus 180. & quatuor recti gradus 360. His prænotatis, praxes angulorum ſunt,

1. Ad datum in rectâ BL punctum B, angulum ſtatuere parem dato A. Ex A dati anguli vertice, tanquam centro, inter latera, arcum deſcribe CF. Centro B puncto dato, deſcribe eodem intervallo arcum LZ, ex quo aufer LO parem CF. Per B & O duc rectam: erit LBO par dato A. Fig. 46.

2. Dati anguli OPQ gradus examinare. Fit hoc facillime per ſemicirculum corneum tranſparentem, in 180. gradus diviſum. Centrum ſemicirculi pone ſupra P verticem anguli, & ſemicirculi radium PL ſupra anguli latus PQ. Arcus LO, inter anguli crura interceptus, oſtendet quot graduum ſit datus angulus. Fig. 47.

3. Angulum conſtruere datos continentem gradus 42. duc rectam XQ in quâ ſigna punctum P. Super P pone ſemicirculi centrum, ejuſque ſemidiametrum PL ſupra PQ. Ab L numera gradus 42. uſque in O. Per O ex P ducta recta dabit angulum OPL graduum 42. Fig. 47.

Horum omnium demonſtratio pendet ex ultima prop. lib. 6.

[Coroll. *Cognito angulo BAF, cognoſcitur unà ejuſdem complementum ad duos rectos CAF. Sit e. gr. angulus BAF graduum 70. erit angulus CAF graduum 110. Numeri* Fig. 38.

enim iſti ſimul additi, gradus 180. *angulorum rectorum duorum menſuram conficiunt.*]

PROPOSITIO XXIV. & XXV.

Fig. 48. SI *duo triangula* (*BAC*, *BAF*) *duo latera* (*BA*, *AC*) *duobus* (*BA*, *AF*,) *alterum alteri, æqualia habuerint; unum verò triangulum angulum illis lateribus contentum* (*BAF*) *majorem habeat altero* (*BAC*;) *habebit quoque baſim BF majorem baſi* (*BC*)

Et ſi baſim majorem habuerit, habebit angulum majorem.

[*Si latera BA, AF* (*ſeu BA, AC*) *ſint inæqualia; applicentur ad ſe invicem latera minora BA. Tum*]

Centro A deſcribe per C circulum; is tranſibit per F, (a) Per def. 15. quia AC, AF ponuntur æquales. Ergo BF cadit [*intra* (a) *circulum*] ſupra C; [*hoc eſt, inter punctum A & punctum C.*] Junge CF. Angulus BCF eſt major angulò ACF, hoc eſt, per 5. angulo AFC, hoc eſt, multò major angulo BFC. Ergo (b) Per 19. l. 1. [*in triangulo BCF,*] (*b*) BF oppoſita majori angulo BCF, major eſt quàm BC oppoſita minori BFC.

2. Pars patet ex primâ parte & ex prop. 4.

(c) Per primam partem hujus. (d) Per 4. l. 1. [*Angulus enim BAF non eſt minor angulo BAC: nam ſi ita, baſis BF baſi BC minor* (c) *eſſet, contra hypotheſim: Sed nec æqualis eſt angulus BAF angulo BAC; quia ſi eſſet, baſis BF baſi BC* (d) *æquaretur, iterum contra hypotheſim. Cum verò angulus BAF angulo BAC nec minor ſit, nec æqualis; neceſſe eſt ut ſit major.* Q. E. D.]

PROPOSITIO XXVI.

Fig. 25. SI *duo triangula* (*X*, *Z*) *duos angulos duobus æquales habuerint, alterum alteri,* (*B ipſi F, & C ipſi I,*) *& unum latus uni lateri æquale, vel quod inter æquales angulos exiſtit,* (*ut BC, FI,*) *vel quod uni æqualium angulorum opponitur,* (*ut AC LI:*) *reliqua omnia erunt æqualia.*

Ponantur

Ponantur primò æqualia eſſe latera BC, FI, inter æquales angulos poſita: tum verò reliqua etiam omnia æqualia eſſe demonſtratum eſt in ſcholio prop. 4.

Ponantur deinde latera AC, LI, æqualibus angulis B & F oppoſita, eſſe æqualia. Quia anguli B, C per hyp. æquantur angulis F, I, etiam reliqui A, L æquales erunt per coroll. 9. prop. 32. quæ ab hac non dependet. Ergo per primam partem omnia reliqua ſunt æqualia.

[Scholium. *Quædam hoc loco de perpendiculari in triangulo iſoſcelio, quæ baſem & angulum verticalem biſecat, inſerere viſum eſt. Sit ABC triangulum iſoſceles, cujus vertex A, baſis BC, crura æqualia AB, AC. Dico,* Fig. 49.

1. *Si ab angulo verticali A ducatur* (a) *recta AD baſi perpendicularis; biſecabit ea tum baſem, tum angulum verticalem. In triangulis enim ABD, ACD, propter latera AB, AC invicem* (b) *æqualia, & AD utrique commune, & angulos lateribus æqualibus oppoſitos etiam æquales, nempe* (c) *B = C, & ADB =* (d) *ADC; omnia reliqua erunt* (e) *æqualia, nempe latus BD lateri DC, & angulus BAD angulo DAC. Quare perpendicularis AD biſecat* (f) *tum baſem BC, tum angulum verticalem BAC.*

2. *Si recta AD ab angulo verticali ducta biſecat baſem, biſecabit etiam angulum verticalem, & baſi perpendicularis erit. Cum enim baſis BC biſecta ſit in D, triangula ABD, ACD erunt ſibi mutuò æquilatera, ac* (g) *proinde ſibi mutuò æquiangula. Anguli igitur BAD, CAD æquales ſunt, atque adeo,* (h) *biſecatur angulus BAC: anguli etiam ad D æquales ſunt, ac proinde* (i) *AD eſt baſi perpendicularis.*

3. *Si recta AD angulum verticalem biſecet, illa baſem etiam bifariam & perpendiculariter ſecabit. In triangulis enim BAD, CAD, propter latera BA, AD lateribus CA, AD reſpectivè æqualia, & angulos BAD, CAD illis lateribus contentos, etiam æquales;* (k) *erit baſis BD baſi CD, æqualis, & anguli ad D etiam æquales; ergo recta AD baſem* (l) *bifariam &* (m) *perpendiculariter ſecat.*

4. *Si in triangulo iſoſcelio ABC ducatur recta DE, quæ baſem BC bifariam & perpendiculariter ſecet in D; ea per trianguli verticem A tranſibit. Si enim ſuper DE tanquam axe moveatur pars ſiniſtra EDB trianguli ABC, donec parti dextræ EDC ſuperimponatur; ſibi mutuò* (n) *congruent æquales anguli recti ad D, æqualia latera DB, DC, & æquales anguli B, C. Coincident itaque latera BA, CA, itemque tota triangula BAD, CAD, ac proinde latus DA lateribus BA, CA in uno eodemque puncto A occurrit, hoc eſt, per verticem A trianguli ABC tranſit.*

(a) Per 12. l. 1.
(b) Per hypoth.
(c) Per 5. l. 1.
(d) Per def. 14.
(e) Per 26. l. 1.
(f) Per def. 40.
(g) Per 8. l. 1.
(h) Per def. 40.
(i) Per def. 14.
(k) Per 4. l. 1.
(l) Per
(m) Per def. 14.
(n) Per axio. 8.

5. Si recta AD a trianguli ABC vertice A in baſem BC cadens, eam ſecet biſariam & perpendiculariter; triangulum ABC erit iſoſceles, hoc eſt, crura, AB, AC erunt (a) *æqualia. In triangulis enim ADB, ADC, propter latera AD, DB lateribus AD, DC reſpective æqualia, anguloſque ad D illis lateribus contentos rectos, ac proinde* (b) *æquales, erit etiam latus AB lateri AC* (c) *æquale.*

(a) Per def. 26.
(b) Per def. 14.
(c) Per 4. l. 1.

6. Si recta AD trianguli ABC angulum A biſecans, ſit lateri oppoſito BC perpendicularis; triangulum ABC eſt iſoſceles, cujus æqualia latera ſunt AB, AC. Nam in triangulis ADB, ADC, propter angulos DAB, DAC æquales, angulos ad D rectos & proinde æquales, ac latus DC inter æquales angulos, utrique commune; erit (d) *latus AB lateri AC æquale.*]

(d) Per 26. l. 1. vel per Schol. p. 4. l. 1.

PROPOSITIO XXVII.

Fig. 50.

SI duas rectas (AB, CF) parallelas ſecuerit recta (GO:) erunt 1. æquales alterni anguli (RLO, QOL, item BLO, COL.) 2. Externus (GLB) æqualis interno ad eandem partem (LOF,) (item GLR ipſi LOC.) 3 Duo ad eandem partem interni ſimul (ALO, COL) æquales duobus rectis. (item duo BLO, FOL duobus rectis æquales.)

Fig. 51.

1. Pars. Ex O & L duc perpendiculares OR, LQ. Erunt (e) hæ ad utramque parallelam AB, CF perpendiculares, & per def. 36. inter ſe æquales. Æquales quoque (f) ex parallelis auferunt partes RL, QO. Ergo triangula X, Z ſibi mutuò æquilatera ſunt. Ergo (g) anguli RLO, QOL alterni æqualibus lateribus RO, QL oppoſiti, ſunt æquales. Quod erat primum. Ex quo patet etiam alternos reliquos BLO, COL æquales eſſe. Nam quia tam BLO, ALO quàm COL, FOL æquantur (h) duobus rectis; erunt BLO, ALO æquales ipſis COL, FOL. Ablatis ergo æqualibus RLO, FOL, erunt reliqui BLO, COL etiam æquales.

(e) Per axio. 11.
(f) Per axio. 12.
(g) Per 8. l. 1.
(h) Per 13. l. 1.

2. Pars, GLB æquatur ad verticem (i) oppoſito RLO. Sed RLO æquatur per 1. partem LOF. Ergo GLB externus æquatur interno LOF; quod erat alterum. [*Eodem modo probatur angulum externum GLR angulo interno ad eandem partem LOC æqualem eſſe.*].

(i) Per 15. l. 1.

3. Pars. ALO per 1. partem æquatur FOL. Atqui FOL cum COL (k) facit duos rectos. Ergo etiam ALO cum COL facit duos rectos; quod erat tertium. [*Et pari modo, duos angulos BLO, FOL duobus rectis æquales eſſe patebit.*]

(k) Per 13. l. 1.

Corell.

Coroll. *Hinc, Eratoſthenem imitati, Telluris ambitum metiri diſcimus. Ille enim obſervavit Solem Syene, urbi Ægyptiaca, ipſo ſolſtitii æſtivi die perpendiculariter impendere: & eodem die gnómonis ope invenit Solem ab Alexandria, urbis etiam Ægyptiaca, ſub eodem fere meridiano ſita, vertice gradus fere ſeptem cum quintâ gradûs parte diſtare: atque urbes iſtas ſtadia* 5000 *circiter diſtare novit. Unde vi præſentis propoſitionis ambitum terræ hoc modo definivit. Sit A Syene; B Alexandria, ubi gnomon BC erigitur horizonti perpendicularis; Sint DA & EG radii Solares ſibi invicem quoad ſenſum paralleli; DA radius horizonti Syenenſi perpendicularis, per F centrum terræ tranſiens; EG verò radius horizonti Alexandrino obliquus, per gnómonis apicem tranſiens, & cum gnomone angulum GCF graduum* $7\frac{1}{5}$ *continens. Cùm verò angulus GCF æqualis ſit angulo alterno AFB, cujus menſura eſt arcus AB graduum* $7\frac{1}{5}$; *Telluris ambitum hac analogia adinvenit: Ut ſe habent gradus* $7\frac{1}{5}$ *ad ſtadia* 5000; *Ita integer circulus graduum* 360 *ſe habebit ad* 250000; *ambitum telluris iiſdem ſtadiis definiendum. Q. E. I.* Fig. 52.

PROPOSITIO XXVIII.

S*I duas rectas (AB, CF) ſecans recta (GO) alternos angulos (ALO, FOL) æquales fecerit, erunt (AB, CF) parallelæ.* Fig. 53.

Si negas, ſit ergo alia XLZ per punctum L ad CF parallela.

Ergo (*a*) angulus XLO par eſt alterno FOL; quod fieri non poteſt, cùm per hyp. ALO par ſit eidem FOL. (a) Per præc.

PROPOSITIO XXIX.

S*I duas rectas (AB, CF) ſecans recta (GO) fecerit externum angulum (GLB) æqualem oppoſito interno (LOF,) vel duos ad eaſdem partes internos (ALO, COL) pares duobus rectis erunt (AB, CF) parallelæ.* Fig. 50, 51.

Per 15. GLB æquatur ALO oppoſito ad verticem. Sed per hyp. GLB æquatur LOF. Ergo etiam ALO æquatur ſibi alterno LOF. Ergo (*b*) AB, CF ſunt parallelæ. (b) Per præced.

Deinde COL cum FOL facit duos rectos. Sed per hyp. idem COL etiam cum ALO facit duos rectos. Ergo ALO, FOL alterni æquales ſunt. Ergo rurſum AB, CF (*c*) ſunt parallelæ. (c) Per præced.

Corollarium.

EX ſecundâ parte patet omne rectangulum eſſe parallelogrammum.

[Scholium. *Tacquetus trium propoſitionum immediatè præcedentium (viz. 27. 28. 29.) ordinem Euclideum immutavit. Quæ enim Euclidi eſt prop. 29. Tacqueto eſt 27. quia nempe prima iſtius propoſitionis pars (à quâ partes duæ reliquæ dependent, è novâ ſuâ parallelarum definitione, noviſque duobus axiomatis, undecima & duodecima ſtatim ſequitur: quinetiam prop. 28. Tacquetiana, Euclidi eſt 27. quia ex Euclideâ parallelarum definitione, ejuſque axiomate undecimo (quæ ambo rejicit Tacquetus) propoſitio illa demonſtratur. Et proinde, prop. 29. Tacqueti, eſt Euclidis 28. Hac monenda duxi, ne forte, perlectis Tacqueti elementis Euclideis, Tyrones aliorum libris mathematicis operam dantes, errorem aliquem cauſentur, quòd Elementi primi propoſitiones 27, 28, 29. pro Tacquetianis 28, 29, 27 reſpectivè, laudari viderint.*]

PROPOSITIO XXX.

Fig. 50. SI duæ rectæ (*AB, CF*) *ſint parallelæ ad eandem rectam* (*DN*,) *erunt inter ſe parallelæ.*

Patet per ſe, & ex præcedentibus. Nam ſi omnes ſecentur à rectâ GO, erit (*a*) angulus externus GLB par interno LDN: eſt verò LDN externus reſpectu DOF, ac proinde (*b*) æqualis. Ergo etiam GLB par eſt LOF. Ergo AB, CF ſunt (*c*) parallelæ.

(a) *Per* 27. *l.* 1. (b) *Per* 27. *l* 1. (c) *Per præc.*

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 54. PER *datum punctum* (*A*) *parallelam ducere ad rectam datam* (*CF.*)

Ex A ducatur utcunque AL, ſecans datam FC. Ad punctum A fiat (*d*) angulus LAS par angulo ALF. Erit AS parallela ad CF, ut patet ex 28. cùm alterni anguli SAL, FLA ſint æquales.

(d) *Per* 23. *l.* 1.

Praxis: ductâ AL, centro L deſcribe arcum IQ, & centro A eodem intervallo arcum OX; ex quo aufer OB parem IQ. Per A & B ducta recta erit parallela.

Demonſ-

Demonſtratio pendet ex 29. l. 3.

Aliter. Centro quopiam P deſcribe circulum qui tranſeat per datum punctum A, & ſecet datam CF in Q & O. Arcui QA accipe æqualem ON. Recta AN erit parallela. *Fig. 55.*

Demonſtratio pendet ex 29. lib. 3. & ex 28. hujus, [*& habetur infra, in Lem. ad prop. 16. Theorematum ſelect. ex Archimede.*]

Scholium.

Demonſtrata jam igitur eſt parallelarum theoria independenter ab axiomate, quod Euclides ejuſque interpretes aſſumunt minus recte; cùm non ſit axioma, ſed theorema, cujus veritas non magis per ſe appareat, quàm ipſius 29. propoſitionis. Quia tamen deinceps ſæpius adhibetur, id hoc loco jam facile ex præmiſſis demonſtrabimus.

Theorema.

Si recta (MA) incidens in rectas (BC, AD) faciat angulos internos ad eaſdem partes (BAD, ABC) duobus rectis minores, rectæ (BC, AD) concurrent verſùs eam partem, quam ſpectant anguli duobus rectis minores. *Fig. 56.*

Quoniam per hyp. CBA, DAB duobus rectis ſunt minores; fiant CBA, XAB duobus rectis æquales, [*nempe faciendo angulum XAB* (a) *æqualem angulo MBC*;] Eruntque BC, AX (*b*) parallelæ, [*& angulus XAB* (c) *major angulo DAB, exceſſu XAD.*] Aſſumo tanquam axioma per ſe notum, inter rectas AD, AX in infinitum productas duci poſſe aliquam ad AM parallelam, puta ZX, quæ major ſit quàm AB. Accipiatur ipſi ZX æqualis AR, & junge ZR. Quoniam AR, ZX ſunt parallelæ, erunt (*d*) alterni XZA, RAZ æquales. Sunt autem & latera XZ, ZA æqualia lateribus RA, AZ per conſtr. Ergo etiam (*e*) anguli RZA, XAZ æquales ſunt. Ergo RZ eſt (*f*) parallela ad AX. Sed etiam BC eſt parallela ad AX. Ergo RZ & BC ſunt (*g*) parallelæ. Eſt igitur BC & parallela ad RZ, & incluſa triangulo ARZ. Ergo cùm produci in infinitum poſſit, neceſſariò occurret aliquando rectæ AZ. Nam neque evadere poteſt per ſibi parallelam RZ, neque pertingere in A, alias duæ rectæ [*vel ſpatium comprehenderent, vel*] haberent commune ſegmentum, [*contra axiomata* 13. *&* 14.] Liquet ergo propoſitum.

(a) *Per* 23. *l.* 1. (b) *Per* 29. *l.* 1. (c) *Per def.* 12. (d) *Per* 27. *l.* 1. (e) *Per* 4. *l.* 1. (f) *Per* 28. *l.* 1. (g) *Per* 30. *l.* 1.

Demonſtratio Clavii eſt a parallelis independens, ſed prolixiſſima & multùm operoſa: Procli nititur hoc principio, quòd recta unam parallelam ſecans, etiam alteram ſectura ſit, ſi producatur. Verùm hoc per ſe notum non eſt, ob rationem datam def. 36.

Corollar.

Corollaria.

Fig. 56. 1. Hinc patet rectas non parallelas concurrere, de quo dubitari poterat ob rationem allatam ad def. 36. Sint rectæ non parallelæ BC, AD, [*quas recta BA ſecet in B & A; & ad illam partem ipſius BA, ubi rectæ non parallelæ BC, AD convergunt ad ſe invicem, per punctum A,*] duc (*a*) AX parallelam ad BC. Erunt anguli XAB, CBA duobus rectis (*b*) æquales. Ergo DAB, CBA ſunt duobus rectis minores. Ergo per theorema jam demonſtratum, BC, AD concurrent.

(a) Per 31. *l.* 1.
(b) Per 27. *l.* 1.

[2. *Recta infinita AZ ſecans rectam AX, ſecabit quaſvis infinitas BC, RZ ipſi AX parallelas. Cùm enim ponantur AX, BC parallelæ, ſeu* (c) *æqualibus intervallis ubique diſtantes, ſecetque recta AZ, ipſam AX; ergo AZ, BC inæqualibus intervallis diſtabunt, & proinde non erunt parallelæ. Quare* (d) *AZ, BC concurrent. Et eodem modo demonſtrabitur rectam AZ concurrere cum aliâ quavis RZ quæ ipſi AX parallela ducitur.*]

(c) Per def. 36.
(d) Per cor. 1.

PROPOSITIO XXXII.

Pars I.

Fig. 57. *Omnis trianguli externus quivis angulus (FBC) duobus internis oppoſitis (A & C) æqualis eſt.*

Per B duc (*e*) BL parallelam ad AC. Quia duas parallelas BL, AC ſecat FA, erit externus angulus FBL interno A (*f*) æqualis. Et quia eaſdem parallelas BL, AC ſecat etiam recta BC, erit LBC ſibi alterno C (*g*) æqualis. Ergo totus FBC æquatur utrique ſimul A & C. Quod erat demonſtr.

(e) Per 31. *l.* 1.
(f) Per 27. *l.* 1.
(g) Per eand.

Corollaria.

Fig. 57. 1. Externus angulus (FBC) quolibet internorum oppoſitorum A vel C, major eſt. [*Eſt prop.* 16. *Euclidis.*]

Fig. 42. 2. Angulorum (C & AOB) eandem baſim (AB) habentium, major eſt (AOB) cui intra cadit. [*Eſt pars ſecunda prop.* 21. *cujus demonſtrationem Tacquetus ad hunc locum rejecerat.*]

Producatur enim AO in F. AOB per hanc major eſt quàm OFB; & OFB per hanc eandem major eſt quàm C: Ergo AOB multo major eſt quàm C.

Fig. 58. 3. Si ab uno puncto (A) in unam rectam (BC) incidant duæ rectæ, altera (AO) oblique, perpendiculariter verò altera (AF;) hæc cadet verſus partes acuti anguli AOB. Cadat enim, ſi fieri poteſt, ad partes obtuſi anguli AOC,

puta

puta in Q. Igitur acutus AOB erit externus reſpectu recti (a) AQB, ac proinde illo major per coroll. 1. quod eſt abſurdum. (a) *Per hypoth.*

PROPOSITIO XXXII.

PARS II.

O*Mnis trianguli tres ſimul anguli, duobus rectis ſunt æquales.* *Fig.* 59.

Ac proinde conficiunt gradus 180.

Produc unum latus AB in F. Externus angulus FBC duobus internis oppoſitis A & C æqualis (*b*) eſt. Atqui (*c*) FBC cum CBA efficit duos rectos. Ergo etiam duo A & C cum eodem CBA efficiunt duos rectos. Quod erat demonſtrandum. (b) *Per* 1. *partem hujus.* (c) *Per* 13. *l.* 1.

Aliter. [*Per angulum* Q] ducatur HM parallela lateri AC. Anguli alterni tam O, A, quam N, C æquales (*d*) ſunt. Sed O, Q, N conficiunt (*e*) duos rectos. Ergo etiam A, C, Q duos rectos conficiunt: quod erat demonſtrandum. *Fig.* 60. (d) *Per* 27. *l.* 1. (e) *Per Coroll.* 1. *p.* 13. *l.* 1.

Corollaria.

4. TRes ſimul anguli cujuſvis trianguli [*rectilinei*] æquales ſunt tribus ſimul cujuſcunque alterius.

5. Si in triangulo unus rectus [*aut recto major*] eſt, reliqui ſunt acuti. [*& angulus qui lateri non maximo opponitur, ſemper* (f) *eſt acutus.*] (f) *Per hoc cor. & pr.* 18. *primi.*

6. Si in triangulo unus eſt rectus, reliqui duo ſimul etiam unum rectum conficiunt.

7. In triangulo angulus, qui æquatur duobus reliquis, rectus eſt.

8. Cum ſcitur quot graduum ſit unus angulus, ſcitur etiam quot gradus faciant duo reliqui ſimul. Et cum ſcitur quot gradus faciant duo anguli, aut eorum ſumma, ſcitur etiam quot gradus efficiat tertius.

9. Cum in uno triangulo duo anguli aut ſinguli aut ſimul, æquales ſunt duobus angulis aut ſingulis aut ſimul in altero triangulo; etiam tertius tertio æqualis erit. [*Ex hoc corollario, quod à prop.* 26. *non dependet; demonſtratur ejuſdem propoſitionis* 26. *pars ſecunda, ut ibi notat Tacquetus. Huc igitur iſta propoſitio referenda eſt.*]

10. Cum duo triangula unum angulum æqualem habent, etiam reliquorum ſummæ æquantur.

11. Cum

11. Cum in Iſoſcele angulus æquis cruribus contentus eſt rectus, reliqui ad baſim ſunt (*a*) ſemirecti. Et Iſoſcelis ad baſim anguli ſemper ſunt acuti. [*Et ab Iſoſcelis vertice, perpendicularis in baſim*, (b) *cadit intra triangulum*]

(a) Per cor. 6. hujus, & p. 5. l. 1.
(b) Per Cor 3. hujus.

12. Trianguli æquilateri angulus facit duas tertias unius recti. Facit enim tertiam partem (*c*) duorum rectorum. Ergo duas tertias unius. [*Cùm enim duo recti faciant gradus* 180. *erit tertia pars duorum rectorum, ſive trianguli æquilateri angulus graduum* 60, *& proinde continebit duas tertias anguli recti, ſive graduum* 90.]

(c) Per hanc & cor. p. 5. l. 1.

Fig. 61. 13. Hinc anguli recti (BAC) facillima triſectio; ſi ſuper AC fiat triangulum æquilaterum Z. Nam cùm FAC ſint duæ tertiæ unius recti, erit BAF recti una tertia.

Fig. 58. 14. Perpendicularis (AF) eſt breviſſima omnium quæ ex puncto (A) ad rectam aliquam duci poſſunt. Quoniam enim angulus F rectus eſt, erit per coroll. 5. AOF acutus. Ergo (*d*) AF minor quàm AO quælibet.

(d) Per 29. l. 1.

15. Ex uno puncto ad unam rectam tantùm una perpendicularis cadit. Patet ex coroll. præced.

Fig. 62. 16. *Hinc etiam ex primâ parte hujus propoſitionis aſtrorum* parallaxin *ſive loci* veri *atque* viſi *differentiam definire diſcimus. Sit A Telluris centrum; B Locus Obſervatoris in ejuſdem ſuperficie. Sit DBC angulus aſtri C à vertice per obſervationem notus, ſive diſtantia angularis aſtri à vertice* viſa:. *Eſt verò Angulus DAC diſtantia angularis* vera. *Trianguli autem ABC angulus externus obſervatione datus DBC, angulis duobus internis oppoſitis* (e) *BAC & BCA æqualis eſt; Atque adeo angulus BCA eſt angulorum DBC & DAC differentia. Si itaque angulus A, computatione notus, ex angulo DBC, obſervatione noto ſubducatur, differentia angulorum iſtorum BCA, quam* Parallaxin *dicimus, pariter innoteſcet.* Q. E. I.

(e) Per hanc prop.

[17. *Liquet etiam e ſecundâ parte hujus prop. Trianguli cujuſcumque duos quoſvis angulos duobus rectis minores eſſe; quæ eſt prop.* 17. *Euclidis à Tacqueto omiſſa.*

Fig. 19. 18. *In triangulo rectangulo ſcaleno, ille ex angulis acutis, qui laterum angulum rectum comprehendentium majori opponitur, eſt ſemirecto major, & qui opponitur minori eſt ſemirecto minor. Acuti enim anguli ſimul ſumpti, per cor.* 6. *hujus, angulum rectum conficiunt: Ergo ille qui majori lateri opponitur eſt* (f) *ſemirecto major; qui minori, ſemirecto minor.*

(f) Per 18. l. 1.

Fig. 63. 19. *Hinc turris aut puncti cujuſvi elevati altitudinem, umbræ ſolaris ope, metiri licet. Ubi enim Sol gradus* 45, *ſupra horizontem elevatur, erunt turrium umbræ in horizontem projectæ, earum altitudini exactè æquales. Ob angulum*

enim

enim ABC rectum, & ACB (a) *ſemirectum; erit angulus BAC ſemirectus, per cor. 6. hujus. Et cùm anguli ad baſim AC ſint æquales, latera AB, BC æqualia* (b) *erunt. Datâ itaque menſurando rectâ BC, datur etiam AB turris altitudo ſupra horizontem.* (a) Per Schol. poſt p. 23. l. 1. (b) Per 6. l. 1.

20. *Hinc lineam inacceſſam AB metiri licet. Triangulum enim æquilaterum quodcunque BDE, puncto ſuo B ac latere BD, ad lineæ inacceſſæ BA punctum B ſecundùm eandem BA ſupponatur adjectum: & a puncto B per latus BE, tanquam diopteram, puncta quæcunque in rectâ BC poſita obſerventur. Removeatur demum triangulum BDE ſecundùm rectam BC hac illàc, donec collimando per latus trianguli ED ſive CF, punctum A inacceſſum, in eadem lineâ CF productâ, poſitum cernatur; & linea acceſſibilis BC, lineæ inacceſſæ AB æqualis erit. In triangulis enim ABC, DEB, propter angulum B communem, & angulos C, E æquales,* (c) *erunt etiam anguli A, D æquales. Sed triangulum BDE ex hypotheſi eſt æquilaterum, & proinde* (d) *æquiangulum: Ergo etiam triangulum BAC eſt æquiangulum, & proinde* (e) *æquilaterum. Si itaque lineam acceſſibilem BC metiamur, lineæ etiam inacceſſæ BA menſuram habemus.* Fig. 60. (c) Per cor. 9. hujus. (d) Per cor. p. 5. l. 1. (e) Per cor. p. 6. l. 1.

Scholium.

HUjus pulcherrimi, fœcundiſſimique theorematis; cujus per Matheſim univerſam uſus prope immenſus, inventor eſt Pythagoras teſte Eudemo veteri Geometrâ. Frequentiſſime ejuſdem meminit Ariſtoteles, qui illud etiam exemplum ſtatuit perfectiſſimæ demonſtrationis. Sed quemadmodum ex hac propoſitione jam didicimus, quot rectis angulis, figuræ trilateræ anguli æquivaleant, ita ejuſdem beneficio cujuſlibet figuræ rectilineæ ſive interni, ſive externi anguli, quot rectos conficiant, præclare innoteſcet tribus ſequentibus theorematibus.

Theorema 1.

OMnis quadranguli quatuor ſimul anguli efficiunt quatuor rectos. Fig. 63.

Nam ſi per oppoſitos angulos ducas rectam BF, hæc quadrangulum in duo triangula ſecabit, quorum anguli ſimul conficiunt (*f*) rectos quatuor. (f) Per 32. l. 1.

Theorema 2.

OMnes ſimul anguli cujuſcunque figuræ rectilineæ conficiunt bis tot rectos demptis quatuor, quot ſunt latera figuræ. Fig. 64.

Ex

Ex quovis puncto A intra figuram, ducantur ad omnes figuræ angulos rectæ, quæ ſecabunt figuram in tot triangula quot habet latera. Quare cùm ſingula triangula (*a*) conficiant duos rectos, omnia ſimul conficient bis tot rectos, quot ſunt latera. Sed anguli circa punctum A, (*b*) conficiunt quatuor rectos. Ergo ſi ab omnium triangulorum angulis demas angulos circa A, anguli reliqui, qui componunt angulos figuræ, conficient bis tot rectos, demptis quatuor, quot ſunt latera figuræ.

(a) *Per* 32. *l.* 1.
(b) *Coroll.* 3. *p.* 13. *l.* 1.

Hinc patet omnes ejuſdem ſpeciei rectilineas figuras æquales habere angulorum ſummas; Quod admiratione dignum eſt.

Praxis. Duplica denominatorem figuræ: à producto aufer 4. reſtabunt anguli recti, quos conficiunt anguli interni figuræ.

Theorema 3.

Fig. 67.

OMnes ſimul externi anguli cujuſcumque figuræ rectilineæ, conficiunt quatuor rectos.

Nam ſinguli figuræ interni anguli, cum ſingulis externis, conficiunt duos (*c*) rectos. Ergo interni ſimul omnes, cum omnibus ſimul externis conficiunt bis tot rectos, quot ſunt latera figuræ. Sed (ut in præced. oſtendimus) interni ſimul omnes etiam cum quatuor rectis, efficiunt bis tot rectos, quot ſunt latera figuræ. Ergo externi anguli, & quatuor recti æquantur.

(c) *Per* 13. *l.* 1.

Mira ſane hæc figurarum rectilinearum proprietas eſt: ex qua illud etiam conſequitur, omnes cujuſcumque ſpeciei rectilineas figuras, æquales habere externorum angulorum ſummas. Itaque trianguli alicujus tres externi anguli æquales ſunt mille externis angulis figuræ millelateræ: Quæ prorſus admiratione ſunt digna.

PROPOSITIO XXXIII.

Fig. 68.

SI duas rectas æquales & parallelas (AB, CF) jungant duæ aliæ (AC, BF;) erunt etiam illa æquales & parallelæ.

Parallelas AB, CF ſecet AF. Erunt in triangulis Q, R alterni anguli BAF, CFA (*d*) æquales Ponitur autem latus AB æquale lateri CF, & AF utrique triangulo eſt commune. Ergo (*e*) baſes BF, AC æquantur; (quod erat primum.) Et anguli ad baſim AFB, FAC ſunt æquales: ac proinde

(d) *Per* 27. *l.* 1.
(e) *Per* 4. *l.* 1.

proinde AF incidens in rectas AC, BF facit alternos AFB, FAC æquales. Ergo (*a*) AC, BF ſunt etiam parallelæ. Quod erat alterum. (a) Per 28. *l.* 1.

[Scholium. *Si duas rectas parallelas & inæquales* (*AB*, OC) *jungant duæ aliæ* (*AO*, BC;) *concurrent tandem iſtæ jungentes, ſi ultra parallelarum minorem* (OC) *ſatis producantur. Si enim à parallelarum majori B A, capiatur* (b) *B R minori æqualis, & jungatur RO; erunt RO, BC* (c) *parallelæ, & anguli ad eandem partem interni, B, ORB ſimul ſumpti, duobus rectis* (d) *æquales. Sed trianguli ORA externus angulus ORB, uno internorum oppoſitorum OAR* (e) *major eſt, & proinde anguli B, OAB ſimul ſumpti, ſunt duobus rectis minores, adeoque rectæ AO, BC ultra OC producta, tandem* (f) *concurrent. Q. E. D.*]

Fig. 70.
(b) Per 3. *l.* 1.
(c) Per 33. *l.* 1.
(d) Per 27. *l.* 1.
(e) Per cor. 1. pr. 32. *l.* 1.
(f) Per Schol. poſt pr. 31. *l.* 1.

PROPOSITIO XXXIV.

P*Arallelogrammi oppoſita latera & anguli æquantur, ipſumque à diametro biſecatur.* Fig. 68.

Quoniam AB, CF ſunt (*g*) parallelæ, in eaſque incidit AF, erunt alterni BAF, CFA (*h*) æquales. Item quia AG, BF ſunt (*i*) parallelæ, in eaſque incidit AF, erunt (*k*) alterni CAF, BFA æquales. Ergo totus BAC toti BFC æqualis eſt. Eodem modo oſtendam B & C æquales eſſe. Quod erat primum.

(g) Per def. 35.
(h) Per 27. *l.* 1.
(i) Per def. 35.
(k) Per 27. *l.* 1.

Quia verò jam oſtendi triangula Q, R, quæ unum latus AF commune habent, etiam angulos lateri AF adjacentes habere æquales, nimirum BAF ipſi CFA, & CAF ipſi BFA, erunt (*l*) etiam latera AB ipſi FC, & BF ipſi CA, æqualia; itemque ipſa triangula. (l) Per 26. *l.* 1.

[Cor. 1. *Omne parallelogrammum, ut ACEF, quod unum angulum A rectum habet, erit rectangulum, hoc eſt, habebit omnes angulos rectos. Nam quia rectas parallelas AF, CE ſecat recta CA, efficiet angulos A, C, internos ad eandem partem, duobus rectis* (m) *æquales: Cùm verò A ſit angulus rectus, etiam C rectus erit: Unde per hanc prop. anguli E, F, angulis A, C reſpectivè oppoſiti, erunt quoque recti. Eodem modo conſtabit parallelogramma quæ unum angulum uni æqualem habent, eſſe æquiangula.*]

Fig. 71.
(m) Per 27. *l.* 1.

Cor. 2. *Hinc Montium tam altitudines ſupra horizontem, quàm lineas horizontales metiri diſcimus. Sit ABC latus montis, cui applica ingentem normam, aut quod normæ inſtar eſt, ADB, eâ ratione, ut latus AD ſit horizonti parallelum, & latus DB horizonti perpendiculare; &* (n) *completo parallelogrammo DH, erit (per hanc prop.) latus AD*

Fig. 69.
(n) Per 31. *l.* 1.

 æquale

(a) Per 30. l. 1. *æquale recta HB, ipſi AD & horizonti (a) parallela; & DB æquale recta AH, eidem DB, ut & horizonti perpendiculari. Applica deinde inferius à puncto B ad punctum C; & completis parallelogrammis EF, BG, erit itidem recta EB æqualis CF, & EC æqualis BF ſive HG, prout & BH ſive DA æquatur ipſi FG: atque ita porro. Latera horizonti parallela AD, BE, &c. ſimul addita, dabunt lineam horizontalem GC: & latera perpendicularia BD, EC, &c. ſimul addita dabunt altitudinem AG.*

Fig. 69. (b) Per 31. l. 1. (c) Per def. 35. & cor. 1. hujus. (d) Per hanc prop. (e) Per 27. l. 1. (f) Per hypoth. (g) Per cor. 6. pr. 32. l. 1. (h) Per 6. l. 1.

Cor. 3. *Hinc etiam ope quadrantis Aſtronomici, Turris altitudinem AB invenire licet. Ubi enim elevationis angulus in quadrante eſt ſemirectus obſervatori ad E, fiat DE horizonti perpendicularis, & æqualis oculi obſervatoris altitudini, & ab oculo D* (b) *ducatur DF ipſi EB parallela, eritque BD parallelogrammum* (c) *rectangulum, & latus FB lateri DE, ſive altitudini obſervatoris oculi* (d) *æquale, latus autem DF æquale lateri EB, ſive diſtantiæ obſervatoris à turre. Sed in triangulo AFD, propter angulum AFD* (e) *rectum, & angulum elevationis ADF* (f) *ſemirectum, erit & angulus A* (g) *ſemirectus, & linea DF, ſeu diſtantia obſervatoris à turre,* (h) *æqualis linea FA, ſeu altitudini turris ſupra obſervatoris oculum; cui ſi adjiciatur FB altitudo oculi, habebitur integra turris altitudo AB.*

Fig. 70. (i) Per 10. l. 1. (k) Per 26. l. 1. (l) Per 27. l. 1. (m) Per 15. l. 1.

Cor. 4. *Hinc denique Geodætæ agri parallelogrammi aream faciliùs dividunt. Sit enim ABDC ager parallelogrammus; AD ejuſdem diameter, ſive linea diagonalis; cujus punctum medium ſignet* (i) *F. Quæcunque linea recta, ut EG, per punctum F tranſit, agrum in partes æquales EACG, EBDG dividit. Triangulum enim ABD per hanc prop. æquale eſt triangulo ACD; & Triangulum AEF æquale* (k) *Triangulo GFD (propter æquales* (l) *angulos alternos FAE, FDG; itemque æquales angulos ad verticem* (m) *oppoſitos AFE, DFG; & latera FA, FD, quæ inter æquales angulos exiſtunt, etiam æqualia.) Si itaque trapezio EBDF, loco trianguli AEF, triangulum eidem æquale GFD addas, area quantitatem non mutabis: ſed erit trapezium EBDG æquale triangulo ABD, ſive dimidio parallelogrammo, & proinde trapezio AEGC æquale. Q. E. D.*

Scholium.

Fig. 71. PArtim ex hoc theoremate, partim ex definitione libro 2. præmittendâ, facile elicitur dimenſio parallelogrammi rectanguli. Illius area producitur ex multiplicatione duorum laterum contiguorum AF, AC. Sit, ex. gr. AF pedum

dum 8. AC, 4. Duc 8 in 4. proveniunt 32. pedes quadrati pro areâ rectanguli.

Quadrati verò area habetur ex uno latere FI per ſe ipſum multiplicato: ut ſi latus FI ſit 5. pedum; duc 5. in ſe, proveniunt 25. pedes quadrati pro areâ quadrati. *Fig. 72.*

Demonſtratio ex hac prop. patet, ductis per laterum diviſiones parallelis.

PROPOSITIO XXXV. & XXXVI.

Parallelogramma ſuper baſi eâdem (AB) vel æquali, & inter eaſdem parallelas (CQ, AX) conſtituta, ſunt æqualia. *Fig. 73.*

Quia AL, BQ (a) ſunt parallelæ, eaſque ſecat CQ; erit (b) externus CLA par interno FQB. Deinde quia tam CF quàm LQ æquantur (c) eidem AB, erunt CF, LQ æquales. Adde utriſque FL; erunt totæ CL, FQ æquales. Inſuper & AL, BQ (d) æquales ſunt. Triangula igitur CLA, FQB æqualia (e) ſunt. Ergo ablato communi FOL, plana FOAC, QBOL remanent æqualia. Quibus utriſque adde planum AOB, fiunt parallelogramma tota ACFB, ALQB æqualia. Quod erat demonſtrandum.

(a) Per def. 35. (b) Per 27. l. 1. (c) Per 34. l. 1. (d) Per eand. (e) Per 4. l. 1.

Hæc propoſitio fiet univerſalis p. 1. lib. 6. Obſervent hic tyrones, quamvis parallelogramma inter eaſdem parallelas ſine fine producta, in infinitam longitudinem extendantur ex eâdem baſi AB, ſemper tamen manere æqualia ex vi demonſtrationis jam datæ.

[Coroll. *Unde ſequitur duas urbes parallelogrammas magnitudine æquales, in circuitu tantùm diſcrepare poſſe, ut unius ambitus centies vel millies alterius ambitum exuperet. Si nimirum altera ſit quadrata vel rectangula; altera verò ſuper eâdem cum priore baſi, & intra eaſdem cum priore parallelas, parallelogramma quidem; ſed admodum obliquangula, & proinde in longum protenſa. Sequitur porro iſoperimetras figuras, areas immane quantùm diverſas continere poſſe.*]

Scholium.

Ex hoc theoremate habetur dimenſio parallelogrammi cujuſcunque. Illius igitur area producitur ex altitudine QX ſeu CA ductâ in baſim AB. *Fig. 73.*

Nam area rectanguli CB parallelogrammo BL æqualis (f) ſit (g) ex AC ductâ in AB. Ergo, *&c.*

(f) Per praec. (g) Per Schol. p. 34. l. 1.

PROPOSITIO XXXVII. & XXXVIII.

Fig. 74. *Triangula* (*ACB*, *AFB*) *ſuper baſi eâdem* (*AB*) *vel æquali, & inter eaſdem parallelas* (*CI*, *AZ*) *conſtituta, ſunt æqualia.*

Lateribus AC, AF duc parallelas BL, BI. Parallelogramma ACLB, AFIB ſunt (a) æqualia. Sed horum, triangula data (b) ſunt dimidia. Ergo triangula data (c) ſunt æqualia.

(a) Per præced. (b) Per 34. l. 1. (c) Per axio. 6.

Hæc propoſitio fiet univerſalis p. 1. lib. 6. Idem hic tyrones notent in triangulis, quod eos notare juſſimus prop. præced. de parallelogrammis.

Fig. 75. Coroll. *Hinc etiam Geodætæ agri triangularis aream facillimè dividunt. Sit e. g. ABC ager triangularis, & ſit baſis BC biſecta* (d) *in D; recta DA agrum bifariam dividet. Triangula enim ABD, ACD quæ baſes habent æquales BD, CD, & communem verticem A, ac proinde inter eaſdem parallelas conſtituuntur, erunt æqualia per hanc prop.*

(d) Per 10. l. 1.

PROPOSITIO XXXIX. & XL.

Fig. 76. *Triangula æqualia* (*ACB*, *AFB*) *ſuper eâdem baſi* (*AB*) *vel æquali, ad eaſdem partes conſtituta, ſunt inter eaſdem parallelas* (*AB*, *CF*.)

Si negas, ſit CL parallela ad AB, & ducatur BL. Igitur ALB æquatur (e) ACB. Sed ex hyp. etiam AFB ipſi ACB æquale eſt. Ergo ALB & AFB æqualia ſunt, pars & totum. Quod fieri non poteſt. Igitur, &c.

(e) Per præc.

PROPOSITIO XLI.

Fig. 77. *Si triangulum* (*AFB*) *ſit in iiſdem parallelis cum parallelogrammo* (*AL*,) *& baſim eandem habeat* (*AB*) *vel æqualem, ipſius dimidium erit.*

Duc CB. Triangula AFB, & ACB (f) æquantur. Sed (g) ACB eſt dimidium parallelogrammi AL. Ergo etiam AFB eſt dimidium AL. Quod erat demonſtrandum.

(f) Per 37. & 38. l. 1. (g) Per 34. l. 1.

Scholium

Scholium.

EX hac & ſcholio prop. 35. diſcimus, aream trianguli (AFB) cujuſcunque produci ex dimidiâ altitudine FI ductâ in baſim (AB) vel ex dimidiâ baſi in altitudinem. Quare noto uno latere trianguli, & altitudine, ſive perpendiculari, quæ in latus notum ex angulo oppoſito ducitur, habetur trianguli dimenſio; ut ſi baſis AB ſit pedum 100. altitudo FI, 85. multiplica baſis dimidium 50. per 85. proveniunt 4250. pedes quadrati pro areâ trianguli AFB. Porro altitudo ſive perpendicularis illa, quando area trianguli peragrari poteſt, mechanicè innoteſcit, uti latera. Si area peragrari nequeat, invenitur Geometricè altitudo per 12. & 13. l. 2. ut in ſcholio ibidem docebimus. *Fig.* 77.

In triangulo rectangulo, altitudo eſt eadem cum alterutro latere circa angulum rectum. Hujus ergo ſemiſſis ducta in latus alterum recto adjacens, dabit trianguli aream.

PROPOSITIO XLII.

DAto triangulo (ACB) æquale parallelogrammum facere, habens angulum parem dato. (O.) *Fig.* 78.

Baſim AB biſeca in F. Per C duc (a) CX parallelam AB. Fac (b) angulum BAL parem dato O. Duc (c) FI parallelam AL. Erit ALIF quod quæritur.

Ducatur enim FC. Parallelogrammum AI angulum habet LAF parem dato O; & eſt æquale triangulo dato ACB, cùm tam (d) triangulum ACB, quàm (e) parallelogrammum AI, dupla ſint ejuſdem trianguli ABF.

(a) Per 31. l. 1. (b) Per 23. l. 1. (c) Per 31. l. 1. (d) Per 38. l. 1. (e) Per præc.

Corollarium.

DAto triangulo ACB habetur æquale rectangulum, ſi per C ducatur parallela lateri AB, & biſecta AB in F, ex B erigatur perpendicularis BQ. Erit enim rectangulum ſub FB & QB par triangulo ACB. *Fig.* 78.

PROPOSITIO XLIII.

IN parallelogrammo (BL,) complementa (BO, OL) eorum quæ circa diametrum exiſtunt (RF & CS) ſunt æqualia. *Fig.* 79.

Si per diametri AQ punctum quodvis O ducatur CF parallela lateri AB, & RS parallela lateri BQ; ſecatur totum BL in quatuor parallelogramma, quorum duo circa diametrum ſunt RF, CS, duo reliqua BO, OL, ſunt horum complementa.

(a) Per 34. l. 1. (b) Per eand.

Ea eſſe æqualia ſic oſtenditur. Triangula ABQ, ALQ (a) æquantur: ſimiliter ARO, OCQ (b) æquantur AFO, OSQ. Ergo ſi ab æqualibus ABQ, ALQ auferas æqualia, hinc ARO, OCQ, inde AFO, OSQ, æqualia remanent BO & OL, Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLIV.

Fig. 80.

AD datam rectam (OS) parallelogrammum conſtituere dato triangulo (V) æquale in angulo dato (X.)

(c) Per 42. l. 1. (d) Per 31. l. 1.

Fac (c) parallelogrammum RC dato V æquale, habens angulum ROC parem dato X, & pone latus RO in directum datæ OS. Per S duc SQ (d) parallelam OC, cui occurrat BC producta in Q. Per Q & O ducta recta occurrat BR protractæ in A. Per A duc AL parallelam ad OS, cui occurrant CO & QS productæ in F & L. Parallelogrammum OL eſt quod petitur.

(e) Per præced. (f) Per 15. l. 1.

Nam OL (e) æquatur RC, hoc eſt per conſtructionem dato triangulo V; & eſt ad datam OS; habetque angulum (f) FOS parem angulo ROC, hoc eſt per conſt. parem dato X.

[Coroll. *Hinc liquet, quomodo ad datam rectam OS, parallelogrammo BO æquale & æquiangulum parallelogrammum OL conſtituere oportet.*]

Fig. 81.

Scholium. *Continet hæc propoſitio cum corollario annexo, Geometricam quandam diviſionem. Sicut enim numerus multiplicatione productus, tanquam rectangulum quoddam jure conſiderari poteſt, cujus factores ſint duo quævis rectanguli latera contigua, prout in Scholio poſt prop. 34. declaratum eſt; Sic etiam eodem jure, numeri dividendi locum, rectangulum occupare cenſebitur, cujus latera circa angulum quemvis, diviſorem & quotum repræſentabunt. Et ſicut unus idemque numerus dividendus varios admittit diviſores, quibus ſingulis ſuus exoritur numerus quotus; ſic una eademque area rectanguli quantitate data, rectæ cuivis tanquam lateri applicari poteſt, cui ad rectos angulos apponitur quædam alia recta, pro altero rectanguli latere. In fig. 81. ſit rectangulum AB, duodecim pedes quadratos complexum, cujus*

ſus latera ſint AC trium, & AE quatuor pedum, & proponatur idem quantitate rectangulum lateri bipedali tamquam diviſori ita applicare, ut inde exſurgat latus aliud, quod quotientis inſtar ſit habendum. In rectâ AE productâ, capiatur linea bipedalis EH, ad quam, per coroll præced. conſtituatur rectangulum EG ipſi AB æquale, & prodibit alterum rectanguli latus EI ſex pedes longum, pro quoto quæſito. Cùm verò, (propter parallelogramma BH, AI) rectæ BD, AF, rectis EH, EI reſpectivè ſint (a) *æquales, pro praxi ſatis erit, ſi in CB productâ accipiatur BD pedum duorum, & per puncta D, E ducatur recta DE, quæ producta occurrat* (b) *rectæ CA productæ in F. Recta enim AF ea erit quam quærimus. Hæc quidem diviſionis ſpecies* Applicatio *dicitur; quoniam ſpatium rectangulum AB (hoc eſt, ei æquale* EG*) lineæ BD ſive EH* applicatur. *Et inde fit quòd Diviſio haud raro* Applicatio *nominatur: ſcilicet pro antiquorum* Geometrarum *conſuetudine; qui* conſtructionis Geometricæ, *quæ regulâ & circino ſolis utitur,* *quàm* computi Arithmetici *per numeros ſolos perficiendi potiorem rationem ſemper habuerunt.*

(a) Per 34. l. 1.
(b) Per cor. 1. Sch. p. 31. l. 1.

PROPOSITIO XLV.

Dato rectilineo (CBA,) æquale parallelogrammum conſtruere ad datam rectam (IQ) & in dato angulo (H.) Fig.

Rectilineum reſolve in triangula A, B, C, ducendo rectas FL, FI.

Ad datam IQ in angulo dato H, fac (*c*) parallelogrammum IV æquale triangulo A. Tum producatur IR infinitè verſus P, & ad rectam RV, in angulo VRP fac (*d*) parallelogrammum RZ æquale trigono B. Rurſum ad rectam SZ in angulo ZSP fac parallelogrammum SG æquale trigono C. IG eſt parallelogrammum quæſitum.

(c) Per 44. l. 1.
(d) Per eand.

Nam (*e*) angulus ZVR par eſt ſibi alterno IRV. Sed (*f*) QVR & IRV ſunt æquales duobus rectis. Ergo etiam QVR & ZVR duobus rectis æquantur. Ergo (*g*) QV & ZV ſunt in directum. Pari modo oſtendam QZ & GZ eſſe in directum. Ergo tota QVZG eſt una recta, & quidem parallela ad IX, cùm per conſt. QV ſit ad IP parallela. Eſt verò etiam (*h*) XG parallela ad IQ, cùm XG ſit parallela ad SZ, & SZ ipſi RV, & RV ipſi IQ. Ergo (*i*) IG eſt parallelogrammum; eſſe autem quale petitur, patet ex conſtructione.

(e) Per 27. l. 1.
(f) Per. eand.
(g) Per 14. l. 1.
(h) Per 30. l. 1.
(i) Per. def. 35.

[Scholium. *Porro, ex hac ipſâ propoſitione haud obſcurum eſt, quomodo parallelogrammum in angulo dato conſtruere oportet duorum pluriumve rectilineorum ſummæ æquale.*

Corollarium. *Hinc facile invenitur exceſſus quo rectilineum aliquod majus ſuperat rectilineum minus: Nimirum ſi ad eandem rectam IQ in eodem angulo QIP applicentur ad eandem partem parallelogramma duo, rectilineis datis reſpectivè æqualia. Parallelogrammum enim quo majus excedit minus, dabit rectilineorum differentiam. Q. E. I.*]

Scholium.

ADjungo problema utile futurum ad praxim propoſitionis 14. lib. 2.

Fig. 83. Dato quadrangulo BF, rectangulum æquale deſcribere.

Reſolve in triangula per rectam AC. Ex oppoſitis angulis demitte perpendiculares BO, FI. Biſeca AC in S. Ex S erige perpendicularem SL parem duabus BO, FI. Rectangulum ſub LS & SA æquatur dato BF. Demonſtratio patet ex prop. 41. ejuſque Scholio; [*& in Coroll. poſt prop. 1. l. 2. latiùs deducetur.*]

PROPOSITIO XLVI.

Fig. 84. *A Datâ rectâ (AB) quadratum deſcribere.*

Erige duas perpendiculares æquales datæ AB, nempe AC, BE, & junge CE. Dico factum.

Cùm enim anguli A & B duo ſint (*a*) recti, erunt (*b*) AC, BE parallelæ: ſunt verò etiam (*c*) æquales. Ergo (*d*) CE, AB ſunt parallelæ & æquales. Ergo figura eſt parallelogramma, & æquilatera: anguli quoque omnes ſunt recti: (cùm enim A & B ſint recti, etiam recti erunt (*e*) oppoſiti, E & C.) Ergo figura AE, eſt quadratum.

[Scholium. *Eodem fere modò facilè deſcribes rectangulum ACQX quod ſub datis duabus rectis BF, AX contineatur; ſi nempe ad puncta A, X ſuper datâ rectâ AX erigantur perpendiculares AC, XQ datæ BF æquales, & ducatur CQ.*]

(a) *Per conſtr.* (b) *Per* 29. *l.* 1. (c) *Per conſtr.* (d) *Per* 33. *l.* 1. (e) *Per* 34. *l.* 1. *Fig.* 73.

PRO-

PROPOSITIO XLVII.

In omni triangulo (*ABC*) *rectangulo, quadratum lateris* (*AC*) *quod recto angulo opponitur, æquale eſt duobus ſimul reliquorum laterum* (*AB, CB*) *quadratis.* Fig. 85.

Ducantur IC, BF, & BE parallela AF. Si angulis IAB, FAC rectis, ac proinde æqualibus, addatur communis BAC, erunt toti IAC, FAB æquales. Sunt verò in triangulis IAC, FAB, etiam latera, quæ æquales illos angulos continent, inter ſe (*a*) æqualia, nempe, IA, CA, ipſis BA, FA, alterum alteri. Ergo triangula IAC, FAB (*b*) æquantur: Quæ, quia cum parallelogrammis ABLI & ZAFE conſiſtunt in iiſdem baſibus IA, FA, & in iiſdem parallelis IA, LBC, & AF, EZB ſunt (*c*) eorum dimidia. Ergo parallelogramma ABLI, ZAFE, utpote æqualium dupla, erunt æqualia inter ſe. Eodem diſcurſu ductis rectis AX, BR oſtendam parallelogramma, EC, BX æqualia eſſe. Totum igitur AR utriſque IB & BX æquale erit. Quod erat demonſtrandum.

(a) *Per defin. quadrati.* (b) *Per 4. l. 1.* (c) *Per 41. l. 1.*

Aſſumptum fuit LBC eſſe parallelam IA, adeoque LB, BC eſſe unam rectam. Id verò patet ex 14. cùm anguli LBA & CBA ambo recti ſint per hypotheſim.

[Cor. 1. *Si triangulum rectangulum ABC habeat latera circa angulum rectum B æqualia; erit quadratum lateris AC angulo recto oppoſiti, duplum quadrati lateris AB vel BC angulo recto adjacentis. Æquale eſt enim quadratum lateris AC quadratis* (d) *æqualibus ABq, BCq ſimul* (e) *ſumptis, ac proinde erit unius duplum.* Fig. 86.

(d) *Per axio. 15.* (e) *Per hanc prop.*

Cor. 2. *Si à trianguli cujuſcunque ABC angulo A demittatur in baſim* (*ſi opus productam*) *perpendicularis AD; erit differentia quadratorum lateris unius AB & ſegmenti contermini BD, æqualis differentiæ quadratorum lateris alterius AC & ſegmenti illi lateri contermini DC. Nam propter angulos ad D* (f) *rectos, erit in triangulo ABD,* $ABq =$ (g) $ADq + BDq$, *& ſublato utrinque BDq, erit* $ABq - BDq =$ (h) ADq: *& eodem modo in triangulo ADC oſtendi poteſt, quod* $ACq - DCq = ADq$. *Ergo per axio.* 1. *erit* $ABq - BDq = ACq - DCq$. *Q. E. D.* Fig. 87.

(f) *Per def. 14.* (g) *Per hanc Prop.* (h) *Per axio. 3.*

Cor. 3. *In triangulo ABC, demiſſâ eâdem perpendiculari AD, id erit baſeos BC ſegmentum majus, quod lateri majori AC adjacet, atque illud minus, quod minori AB. Nam propter latus AC majus* (i) *quàm AB, erit ACq majus* (k) *quàm ABq.* Fig. 87.

(i) *Ex hypoth.* (k) *Per axio. 16.*

(a) Per hanc prop. *Sed ACq* (a) = *ADq* + *DCq*, & *ABq* = *ADq* + *DBq*. *Ergo ſumma quadratorum ADq, DCq major eſt quàm ſumma quadratorum ADq, DBq. Quare ablato communi ADq,* (b) *erit DCq majus quàm DBq, atque adeo ſegmentum DC ſegmento BD majus* (c) *erit.*

(b) Per axio. 5.
(c) Per axio. 16.

Fig. 48. Cor. 4. *Si in triangulo ABE, quadratum lateris BE majus fuerit quadratis laterum AB, AE ſimul ſumptis, angulus*
(d) Per 11. l. 1. *BAE lateri BE oppoſitus erit recto major. Erigatur* (d) *enim, ſuper rectâ AB, ad punctum A, perpendicularis AF æqualis lateri AE, & ducatur BF. Ob angulum BAF rectum, erit*
(e) Per hanc prop. (e) *quadratum lateris BF æquale quadratis laterum BA, FA ſimul ſumptis, hoc eſt, propter æquales FA, AE, quadratum*
(f) Per axio. 15. *BF* (f) *æquabitur quadratis BA, AE ſimul ſumptis. Sed ex hypotheſi, quadratum BE majus eſt quadratis BA, AE ſimul ſumptis: Ergo quadratum BE majus eſt quadrato BF, &*
(g) Per axio. 16. *recta BE* (g) *eſt rectâ BF major; & proinde angulus BAE* (h) *eſt angulo recto BAF major. Q. E D.*

(h) Per 25. l. 1. Cor. 5. *Eodem modo, ſi in triangulo ABC, quadratum lateris BC angulo BAC oppoſiti ſit minus quadratis laterum BA, AC ſimul ſumptis, demonſtrabitur angulum BAC eſſe angulo recto minorem. Erectâ enim ad latus AB perpendiculari AF ipſi AC æquali, & ductâ BF, erit*
(i) Per hanc prop. *BFq* = (i) *ABq* + *AFq. Sed AFq* = (k) *ACq: Ergo BFq* = *ABq* + *ACq. Sed*
(k) Per conſtr & axio. 15. *per hypotheſim, BCq minus eſt quàm ABq* + *ACq. Ergo BCq minus eſt quàm BFq, & proinde BC minor* (l) *quàm BF; unde*
(l) Per axio. 16. *etiam angulus BAC angulo recto BAF minor* (m) *erit.*

(m) Per 25. l. 1.

Scholium.

HOC theorema (quod prop. 31. lib. 6. Euclides ad omnes figuras ſimiles extendet) Pythagoricum appellatur paſſim ab inventore Pythagora; qui, ut teſtantur Proclus, Vitruvius, aliique, Muſis victimas immolavit, quòd ſe in tam præclaro invento ab iis adjutum putaret. Ignorabat videlicet ſcientiarum Dominum, verum & unicum omnis ſapientiæ auctorem Deum; aut certè ſi cognovit, non ſicut Deum glorificavit. Frequens porro hujus theorematis & eximius per Mathematicam totam uſus eſt; ac viam imprimis ad incommenſurabiles magnitudines, arcanum ingens Geometricæ Philoſophiæ, cognoſcendas aperit.

Quadrati latus eſſe diametro incommenſurabile, theorema celebratiſſimum eſt apud veteres Philoſophos, Ariſtotelem præſertim & Platonem, adeo ut qui hoc neſciret, eum Plato non hominem eſſe, ſed pecudem diceret. Notitia porrò hujus

hujus myſterii duxiſſe videtur originem ex hac prop. 47. Nam cùm in quadrato angulus A rectus ſit, erit quadratum diametri CB æquale quadratis laterum AB, AC, ac proinde (a) duplum unius. Quare cùm quadratum diametri CB ſit 2. & quadratum lateris AB ſit unitas, erit diameter CB radix quadratica numeri binarii, & latus AB radix quadratica unitatis, ſive ipſa unitas, quarum proportio (ut ſuo loco demonſtrabitur) numeris explicari nequit, ac proinde incommenſurabiles ſunt. [*Hæc propoſitio de incommenſurabilitate lateris & diametri in Quadrato, eſt ultima libri decimi apud Euclidem; demonſtratur autem à Tacqueto in Elementis ſuis Arithmet. in Scholio poſt prop. 11. lib. 2.*] *Fig.* 84. (a) *Per cor. 1. ſuperioris prop.*

Atque hoc vel unico argumento, tametſi cætera omnia deficerent, evidentiſſimè conficitur, magnitudines ex definito punctorum numero componi non poſſe: aliàs enim nullæ eſſent incommenſurabiles, omnium quippe menſura communis eſſet punctum.

His ſubjungo tria problemata ex eâdem propoſitione deducta, quorum uſus frequentior.

Problema 1.

Datis quotcunque quadratis, unum omnibus æquale conſtruere. *Fig.* 85.

Dentur quadrata tria, quorum latera ſint AB, BC, CE. Fac angulum rectum FBZ infinita habentem latera, in eaque transfer BA & BC, & junge AC. Erit AC quadratum æquale (b) quadratis AB, BC. Tum AC transfer ex B in X; & CE tertium latus datum, transfer ex B in E, & junge EX: erit quadratum ex EX æquale (c) quadratis ex EB (ſeu EC) & ex BX; hoc eſt, æquale tribus datis quadratis ex AB, ex BC, ex CE. (b) *Per 47. l. 1.* (c) *Per eand.*

Problema 2.

Datis duabus rectis inæqualibus (AB, BC,) exhibere quadratum, quo quadratum majoris (AB) excedit quadratum minoris (BC.) *Fig.* 86.

Centro B, intervallo BA deſcribe circulum, [*& in diametro AF, à centro B versùs F, pone BC.*] Ex C erige perpendicularem CE, occurrentem peripheriæ in E. Quadratum ex CE eſt exceſſus quæſitus.

Ducatur enim BE. Quadratum BE, hoc eſt AB, æquatur (d) quadrato BC & quadrato CE. Ergo &c. (d) *Per 47. l. 1.*

Pro-

Problema 3.

Fig. 90. NOtis duobus quibuſcunque lateribus trigoni rectanguli, reliquum invenire.

Latera rectum angulum ambientia ſint AC, AB, hoc 6. pedum, illud 8. Oporteat invenire quot pedum ſit CB, angulo recto oppoſitum. Duc 6. & 8. in ſe ipſa; orientur laterum quadrata 36. & 64. quorum ſumma eſt 100. Radix quadratica 100. nempe 10. dat pedes lateris BC quæſiti. Demonſt. patet ex 47. Nam ſumma quadratorum BA & AC æquatur quadrato BC. Ergo horum ſummæ radix eadem eſt cum radice ſeu latere BC.

Nota ſint deinde latera AB, BC, hoc 10. pedum, illud 6. Oporteat invenire AC. Lateris AB quadratum 36. aufer ex 100. quadrato lateris BC. Reſiduum 64. erit quadratum lateris AC. Radix ergo 64. (nempe 8.) dat pedes lateris AC.

PROPOSITIO XLVIII.

Fig. 91. *SI quadratum ab uno trianguli latere (AB) deſcriptum, ſit æquale duobus reliquorum laterum (AC, BC) quadratis; angulus (ACB) quem reliqua latera continent, rectus erit.*

Si negas, erit angulus ACB recto major aut minor. Ergo (ut demonſtrabitur prop. 12. & 13. l. 2. quæ ab hac non dependent) quadratum AB non erit æquale quadratis AC, BC, contra hypotheſim.

Vel ſic. Duc FC perpendicularem ad AC; & æqualem CB, & junge AF. Quadratum AF æquale eſt (*a*) quadratis FC, CA; hoc eſt (*b*) quadratis BC, CA; hoc eſt per hyp. quadrato AB. Ergo rectæ AF, AB æquales (*c*) ſunt. Quoniam igitur trigona X, Z, ſunt ſibi mutuò æquilatera, anguli ad C (*d*) ſunt æquales. Ergo (*e*) recti. Quod erat demonſtrandum.

(a) Per 47. l. 1.
(b) Per conſtruct.
(c) Per axio. 15.
(d) Per 8. l. 1.
(e) Per def. 14.

ELE-

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ

LIBER SECUNDUS.

HIC liber mole parvus, at præſtantiâ ac utilitate theorematum plane magnus. Tyrones, ſcio quod dico, nondum capient; ſed eſſe veriſſimum ulteriùs provecti, uſu ipſo certiſſimè intelligent.

T*Ractat autem hic Liber* ſecundus *de Rectarum linearum* potentiis; *hoc eſt* quadratis. *Comparatque Rectangula varia, e rectarum aut biſariam aut utcunque diviſarum partibus oriunda cum totarum linearum rectangulis & quadratis. Pars hæc ſane elementorum longe utiliſſima eſt: ſpeciatim autem Operationum Algebraicarum præcipuarum verè fundamentum. Propoſitiones tres priores demonſtrandæ Multiplicationi, Quarta radicum quadraticarum extractioni inſervit. Quæ ſequuntur quinta, ſexta, ſeptima, octava Operationibus* Algebraicis; *Reliqua verò* Trigonometricis *conferunt plurimùm. Primâ quidem fronte Tyronibus hic liber videtur difficillimus; eo quòd myſterii quiddam in ſe continere ſibi imaginentur. Attamen Demonſtrationes in eodem adhibitæ pleraque omnes facillime huic axiomati nituntur,* Totum, *nempe*, omnibus ſuis partibus ſimul ſumptis æquari. *Ne verò animum deſpondeant Tyrones, ſi primâ vice perfectè nequeant comprehendere. Inter relegendum enim ſe tam clara non intellexiſſe olim mirabuntur.*

DEFINITIO.

PArallelogrammum rectangulum (AE) (quod rectangulum ſimpliciter ſine ullo addito appellari ſolet) contineri dicitur ſub duabus lineis rectis (AC, AF) rectum angulum comprehendentibus. Fig. 71. & 82

Nam earum altera AC altitudinem rectanguli, altera AF latitudinem determinat. Deinde ſi intelligatur latus AC ferri perpendiculariter per totam AF, aut AF per totam AC,

AC, producetur eo motu area rectanguli. Quare meritò rectangulum fieri dicitur ex ductu, ſeu multiplicatione duorum laterum contiguorum.

Fig. 2. l. 2. Quandò igitur dicitur ex. gr. rectangulum ſub (vel ex) AC, CB, vel brevitatis cauſâ, rectangulum ACB, deſignatur rectangulum quod continetur ſub AC & CB [*vel ſub rectis, quæ ipſis AC, CB reſpectivè ſunt æquales*] ad rectum angulum conſtitutis. Similiter, cùm dicitur rectangulum ſub AB, CB, vel rectangulum ABC, deſignatur rectangulum contentum ſub rectis AB & BC [*vel ſub rectis quæ ipſis æquales ſunt*] rectum angulum comprehendentibus.

Rectangulum porro aliud eſt oblongum, aliud quadratum. Oblongum eſt quod latera contigua habet inæqualia, ſive quod continetur ſub duabus rectis inæqualibus. Quadratum rectangulum eſt, quod ſub duabus æqualibus continetur.

NOTA. *Signum æqualitatis in hoc libro eſt*, ≏. [nempe in demonſtr. Tacquetianis. Alia ſigna, hîc & alibi in additis adhibita, explicantur in initio, ante Tacqueti præf. ad lectorem.]

PROPOSITIO PRIMA.

Fig. 1. l. 2. *SI fuerint duæ rectæ (AB, AC) quarum altera ſecta ſit in quotcunque partes (AE, EF, FC:) erit rectangulum ſub illis duabus (AB, AC) comprehenſum, æquale rectangulis, quæ ſub inſecta (AB) & ſingulis ſectæ partibus (AE, EF, FC) continentur.*

Statue AB perpendicularem ad AC. Per B duc infinitam BR perpendicularem ad AB. Ex E, F, C erige perpendiculares EI, FL, CQ. (*a*) Erit BC rectangulum ſub AB, & AC: & eſt æquale rectangulis BE, IF, LC; hoc eſt (quia tam IE, quàm LF ſunt (*b*) æquales AB,) rectangulis (*c*) ſub AB, AE, ſub AB, EF, ſub AB, FC.

(a) Per def. l. 2.
(b) Per 29. & 34. l. 1.
(c) Per def. l. 2.

Fig. 83. l. 1. [Coroll. *Hinc ampliori demonſtratione firmari poteſt problematis quòd in Scholio poſt prop. 45. lib. 1. legitur, ſolutio ibidem tradita. Si nempe quadrilaterum BF per rectam AC in triangula ABC, AFC reſolvatur; biſecta AC in S, ex oppoſitis angulis B, F, in baſim communem AC ductis perpendicularibus BO, FI, ex S erigatur SL earum ſummæ æqualis: oſtendendum eſt rectangulum ſub CS & SL æquari quadrilatero BF. Cùm enim triangula ABC, AFC* (d) *æquentur rectan-*

(d) Per 41. l. 1.

tangulis ſub CS & BO, & ſub CS & FI reſpectivè; eùmque recta LS æquatur ipſis BO & FI ſimul ſumptis, & dividatur in partes, SD, DL, ipſis BO, FI reſpectivè æquales; Ergo triangula iſta, ſeu quadrilaterum BF, rectangulis CD, LE, ſub inſectâ CS, & ſingulis ſecta LS partibus, hoc eſt, vi hujus prop. rectangulo LC ſub duabus CS & LS æquari neceſſe eſt.]

Scholium.

DEcem prima hujus libri theoremata etiam vera ſunt in numeris, ſi, ut lineæ, dividantur in partes. Rectangula numerica procreantur ex multiplicatione duorum numerorum, quadrata verò numerica ex multiplicatione numeri per ſeipſum.

[*Sit numerus inſectus* 9, *& ſectus* 12, *qui in partes tres nimirum* 3, 4 *&* 5 *dividatur. Erit rectangulum ex* 9 *in* 12 *ducto* = 108 *æquale rectangulis tribus* 27 *&* 36 *&* 45, *ex* 9 *in* 3 *&* 9 *in* 4 *&* 9 *in* 5 *reſpectivè ducto compoſitis.*

Vel ſit numerus 432 *tanquam* multiplicandus *ſectus in* 400 *&* 30 *&* 2, *atque numerus* 8 *tanquam* multiplicans *inſectus; erit* 8 × 432 = 3456 *æqualis* 8 × 400 = 3200, + 8 × 30 = 240, + 8 × 2 = 16. *Unde etiam Multiplicationis demonſtratio peti debet.*]

PROPOSITIO II.

SI recta (AB) ſecta ſit utcumque (in C,) duo rectangula ſub totâ (AB) & partibus (AC, CB) comprehenſa, quadrato totius æqualia ſunt. Fig. 2.

Accipiatur F æqualis AB.

Rect. FAB =. (*a*) rect. FAC } rect. FCB: } (a) Per 1. l. 2.

hoc eſt, quia F & AB ſunt æquales inter ſe;

Quad. ex AB =. rect. BAC } rect. ABC. }

[Aliter. *Fiat* (b) *ARDB quadratum rectæ AB, & ad punctum C erigatur* (c) *recta CH ipſi AB perpendicularis. Anguli itaque ad C recti, angulis A & B æquales ſunt; & rectæ AR, CH, RD ſibi invicem ſunt* (d) *parallelæ, & AH, BH* (e) *parallelogramma rectangula. Erit præterea CH recta* (f) *AR ſive* (g) *AB æqualis: & proinde AH, BH ſunt* (h) *rectangula ſub tota AB & partibus AC, CB comprehenſa; & ſimul ſumpta æquantur quadrato ipſius AB.*

Fig. 3. (b) Per 46. l. 1. (c) Per 11. l. 1. (d) Per 29. l. 1. (e) Per def. 35. & cor. 1. p. 34. l. 1. (f) Per 34. l. 1.

Sit

(g) *Per conſtruct.* (h) *Per def. l.* 2.

Sit numerus 8 *in* 5 *&* 3 *ſectus: quadratum totius* 8 ⨯ 8 = 64 *æquale eſt rectangulis* 8 ⨯ 3 = 24 *&* 8 ⨯ 5 = 40.]

PROPOSITIO III.

Fig. 4. *SIt recta (AB) utcunque ſecta (in C:) Erit rectangulum ſub totâ (AB) & partium alterutrâ (BC) comprehenſum, æquale rectangulo ſub partibus (AC, CB) unà cum quadrato prædicta partis (BC.)*

Aſſume F æqualem CB.

(a) Per 1. l. 2. Rect. ABF Æ. (a) rect. ACF } rect. CBF:

hoc eſt, quia æquales ſunt CB & F;

Rect. ABC Æ. rect. ACB } quad. CB.

Fig. 5. [Aliter. *Fiat* (b) *rectangulum AD ſub totâ AB & parte CB, &* (c) *erigatur perpendicularis CE: ob rectam CE, recta* (d) *BD ſive* (e) *BC æqualem, rectangulum AD ſub totâ AB & parte BC comprehenſum, æquabitur rectangulo AE ſub partibus AC, CB, unà cum quadrato EB prædicta partis BC.*

(b) Per Schol. poſt 46. l. 1.
(c) Per 11. l. 1.
(d) Per 29. & 34. l. 1.
(e) Per conſtr.

Sit numerus 7 *in partes* 3 *&* 4 *ſectus. Rectangulum* 7 ⨯ 3 = 21 *æquale eſt rectangulo* 3 ⨯ 4 = 12 *& quadrato* 3 ⨯ 3 = 9. *Pariter Rectangulum* 7 ⨯ 4 = 28 *æquale eſt rectangulo* 3 ⨯ 4 = 12 *& quadrato* 4 ⨯ 4 = 16.]

PROPOSITIO IV.

Fig. 6. *SIT recta (FL) utcunque ſecta (in O:) erit quadratum totius æquale quadratis partium (FO, OL) & bis rectangulo ſub partibus (FO, OL) contento.*

(f) Per 2. l. 2. Quad. FL Æ. (f) rect. FLO cum rect. LFO.

(g) Per 3. l. 2. Atqui rect. FLO Æ. (g) rect. FOL } quad. OL;

(h) Per eand. & rect. LFO Æ. (h) rect. LOF } quad. FO.

Ergo quad. FL Æ. rect. FOL } quad. OL } rect. LOF } quad. FO:

Id

Id eſt, quad. FL æ. rect. FOL bis }
quad. OL }
quad. FO. }

[Aliter. *Fiat FGDL quadratum rectæ FL, & ductâ diametro GL, in triangulo FGL, ob æqualia latera FG, FL & angulum F rectum, erunt anguli FGL, FLG ſemirecti* (a) *& æquales. Per punctum O ducatur ipſi FG vel LD parallela OK, quæ ſecet diametrum GL in C; & per punctum C ipſi FL vel GD parallela agatur HI. Propter omnes angulos quadrati FD rectos, erunt etiam omnia parallelogramma FC, OI, HK, CD rectangula* (b)*; & ob parallelas OK, FG, erit* (c) *externus ang. LCO æqualis interno & opp. FGL, hoc eſt, FLG ſemirecto. Ergo in triangulo LOC, latera OC, OL ſunt* (d) *æqualia: Æquantur* (e) *etiam rectanguli OI oppoſita latera OL, CI; OC, LI; & proinde OI eſt* (f) *quadratum rectæ OL: Et eodem modo demonſtrabitur HK quadratum eſſe rectæ HC, vel* (g) *FO. Et cùm CO, OL æquentur, erit FC rectangulum ſub partibus FO, OL datæ rectæ FL. Sed rectangula FC, CD ſunt* (h) *æqualia, & proinde FC, CD ſimul ſumpta, æquantur bis rectangulo ſub partibus FO, OL. Quare FD quadratum totius rectæ FL, æquatur ipſis HK, OI, partium FO, OL quadratis, unà cum FC, CD bis rectangulo ſub partibus. Q.E.D.*

Fig. 7.

(a) Per cor. 11. pr. 32. l. 1.
(b) Per cor. 1. pr. 34. l. 1.
(c) Per 29. l. 1.
(d) Per 6. l. 1.
(e) Per 34. l. 1.
(f) Per def. 32. l. 1.
(g) Per 34. l. 1. & axiom. 15.
(h) Per 43. l. 1.

Sit numerus 10 *in partes* 7 *&* 3 *ſectus. Quadratum* 10 × 10 = 100 *æquale eſt quadratis partium* 7 × 7 = 49 *&* 3 × 3 = 9, *& duobus rectangulis* 7 × 3 = 21 *&* 7 × 3 = 21. *Vel ſit numerus* 12 *in partes* 10 *&* 2 *diviſus. Quadratum totius* 12 × 12 = 144 *æquale eſt quadratis partium* 10 × 10 = 100 *&* 2 × 2 = 4, *unà cum bis rectangulo* 10 × 2, *ſive* 2 × 10 × 2 = 40. *Et hinc pendet radicis quadraticæ extractio.*

Corollarium 1. *Hinc liquet parallelogramma OI, HK circa diametrum quadrati, eſſe quadrata.* Fig. 7.

2. *Item diametrum cujuſvis quadrati ejus angulos biſecare. Eſt enim FLD ang. rectus, & FLG ſemirectus.*

3. *Quadratum lineæ dimidiæ eſt quadrati lineæ integræ pars quarta. Promotis enim rectis OK, HI, motu parallelo, uſque ad media puncta A & B, M & N laterum quadrati FD; rectangula FC, CD, & quadrata OI, HK in quatuor æqualia quadrata deſinent. Et eodem modo conſtabit rectangulum (ſive etiam parallelogrammum quodlibet) ſub duabus rectis quibuſvis, rectanguli (ſeu parallelogrammi parallelogrammo dato æquianguli) ſub earum dimidiis eſſe quadruplum.*

4. *Quadratum quodvis FD æquale eſt bis rectangulo ſub quadrati latere FL ſeu GD, & lateris dimidio LN ſeu ND. Æquatur enim rectangulis FN, MD ſimul ſumptis. Item, parallelogrammum quodvis, æquale eſt bis parallelogrammo æquiangulo ſub uno quovis latere & alterius dimidio.*]

PROPOSITIO V.

Fig. 8. *SI recta (QX) ſecta fuerit æqualiter (in R) & inæqualiter (in S,) erit rectangulum ſub inæqualibus partibus (QS, SX) contentum, unà cum quadrato partis intermediæ (RS) æquale quadrato dimidiæ (QR.)*

(a) Per 1. l. 2. Rect. QSX (a) Æ. rect. QR. SX } rect. RSX. }

Rect. QR, SX Æ. rect. RXS; id eſt,

(b) Per 3. l. 2. Æ. (b) rect. RSX } quad. SX. }

Ergo rect. QSX Æ. rect. RSX } quad. SX } rect. RSX. }

Addatur utriſque quad. RS: habebitur,

{ rect. QSX } Æ. rect. RSX } id eſt,

(c) Per 4. l. 2. { quad. RS } quad. SX } (c) quad. RX

rect. RSX } ſeu QR.

quad. RS; }

Fig. 9. [Aliter. *Super recta QX parte dimidiâ RX fiat quadratum RF, & ductâ diametro XE, per S ducatur SG ipſi RE vel XF parallela, quæ ſecet diametrum in H; & per H, ipſi QX vel EF parallela agatur KI, ſecans RE in L, & per Q ipſi RL parallela agatur QK. Propter* (d) *quadratum SI, circa diametrum quadrati RF, erit SX* (e) = *SH; & ob parallelogrammum SL; erit etiam RS* (f) = *LH, & RL = SH = SX. Eſt autem QR* (g) = *RX* (h) = *XF. Unde QL* (i) = *SF. Commune adjiciatur RG, & QX + LG = RF. Sed QH eſt rectangulum ſub recta QH partibus inæqualibus QS, SX; & LG eſt* (k) *quadratum partis intermediæ RS; & RF eſt* (l) *quadratum dimidiæ RX. Ergo, ſi recta QX, fuerit ſecta æqualiter in R, & inæqualiter in S, erit, &c. Q. E. D.*

(d) Per cor. 1 præced.
(e) Per def. 32. l. 1.
(f) Per 34. l. 1.
(g) Per hypoth.
(h) Per def. 32. l. 1.
(i) Per def l. 2.
(k) Per cor. 1. præc. & prop. 34. l. 1.
(l) Per conſtr.

Atque hinc & ex prop. ſequenti, pendet æquationum quadraticarum adfectarum conſtructio Geometrica, uti ad prop. 28. & 29. lib. 6. pleniùs explicabitur.

Sit numerus 8 ſectus æqualiter in 4 & 4, atque inæqualiter in 5 & 3. Erit rectangulum $5 \times 3 = 15$ *unà cùm quadrato* $1 \times 1 = 1$ *æquale quadrato* $4 \times 4 = 16$.

Cor. 1. *Hinc rectangulum QSX, partium inæqualium, minus eſt quadrato QR (ſive dimidiæ QX.) Nam per hanc*

prop.

prop. Rectangulum QSX, unà cum quadrato RS, æquatur quadrato QR.

Cor. 2. *Quo propiùs accedit punctum S ad medium punctum R, eo majus erit rectangulum QSX, & quo longiùs à medio puncto recedit, eo minus erit idem rectangulum. Punctum enim S accedendo minuit, & recedendo auget partem intermediam RS; unde (a) etiam RS quad. minuetur & augebitur respectivè. Et cùm per hanc prop. ſit RS quad. + QSX rect. = QP quad. Ergo, quo minus fuerit RS quad. eo majus erit rectang. QSX, & vice verſâ.* (a) Per axio. 16.

Cor. 3. *Quo propiùs accedit punctum S ad medium punctum R, eo minor erit ſumma quadratorum partium inæqualium QS, SX; & quo longiùs S a medio puncto recedit, eo major erit illa ſumma. Nam QXq = (b) QSq + SXq + 2 QSX. Sed punctum S propiùs accedendo ad R, rectangulum QSX auget (c), & recedendo minuit. Ergo idem punctum S ad medium R propiùs accedendo minuit QSq + SXq & recedendo auget.* (b) Per 4. l. 2. (c) Per cor. præced.

Cor. 4. *In fig. 7. rectangulum FOL partium inæqualium rectæ FL quater ſumptum, quadrato ipſius FL minus eſt. Nam quadratum dimidiæ FL quater ſumptum (d) æquatur quadrato FL: Sed rectang. FOL (e) minus eſt quadrato dimidiæ FL; & proinde rectang. FOL quater ſumptum, minus eſt quadrato dimidiæ FL quater ſumpto, ſive minus eſt quadrato ipſius FL. Q. E. D.* Fig. 7. (d) Per cor. 3. pr. 4. l. 2. (e) Per cor. 1. hujus.

Cor. 5. *Si duæ rectæ æquales AB, CD, ita dividantur in E, F, ut rectangulum AEB ſub partibus unius, æquale ſit rectangulo CFD ſub partibus alterius; erunt unius partes partibus alterius reſpectivè æquales, major majori, & minor minori, ſi partes fuerint inæquales. Si enim puncta E, F, biſecant rectas æquales AB, CD, liquet AE eſſe = CF, & EB = FD; ſin aliter, biſecentur AB, CD, in M & N; atque earum ſemiſſes MB, ND æquales (f) erunt, & proinde MBq (g) = NDq. Sed per hanc prop. MBq = AEB rect. + MEq, & NDq = CFD rect. + NFq. Ergo (h) AEB rect. + MEq = CFD rect. + NFq. Et ablatis rectangulis ex hypotheſi æqualibus, (i) erit MEq = NFq, & ME = NF; quæ ſi æqualibus AM, CN addantur, & ab æqualibus MB, ND ſubtrahantur, (k) habebitur AE = CF, & EB = FD. Q. E. D.* Fig. 10. (f) Per axio. 6. (g) Per axio. 15. (h) Per axio. 1. (i) Per axio. 3. (k) Per axio. 2. & 3.

Cor. 6. *Rectangulum ſub ſummâ & differentiâ duarum rectarum (QR, RS,) æquatur differentiæ quadratorum ab illis rectis factorum. Nam per hanc prop. rect. QSX + quad. RS = quad. QR. Aufer utrimque quad. RS, & erit rect. QSX = quad. QR − quad. RS. Cùm igitur QS ſit rectarum QR, RS ſumma, & (propter QR = RX) SX ſit earum differentia, liquet propoſitum.]* Fig. 8. 9.

PROPOSITIO VI.

Fig. 11. *SI recta (AB) ſit biſariam ſecta (in C) eique recta quædam adjiciatur (BF;) erit rectangulum ſub totâ compoſitâ (AF) & adjectâ (BF) contentum, unà cum quadrato dimidiæ (CB) æquale quadrato (CF) compoſitæ ex dimidiâ & adjectâ.*

Adde in directum LA, æqualem adjectæ BF. Cùm æqualibus AC, BC, æqualia addantur AL, BF, erunt totæ LC, FC æquales. Unde LF ſecta erit æqualiter in C, & inæqualiter in B.

(a) Per præced.

Ergo { rect. LBF cum quad. CB } æ. (a) quad. CF.

Sed ob æqualitatem rectarum LB & AF,
rect. LBF æ. rect. AFB.
{ Ergo rect. AFB quad. CB. } æ. quad. CF.

Fig. 12. [Aliter. *Conſtructâ enim figurâ 12. ſuper datâ rectâ ACBF, eodem prorſus modo quo in prop. præced. ſuper rectâ QRSX figuram 9. conſtruximus, erit AN rectangulum ſub totâ compoſitâ AF & adjectâ BF; & KG quadratum ipſius CB, ſive dimidiæ AB. CE verò quadratum ipſius CF, nempe compoſitæ ex dimidiâ & adjectâ. Et ob rectangulum HE rectangulo AK æquale, (nam AK* (b) = *KB* (c) = *HE) & reliquum ſpatium utrinque commune, liquet propoſitum.*

(b) Per 36. l. 1. (c) Per 43. l. 2.

Sit numerus 6 ſectus æqualiter in 3 & 3: eique addatur numerus 2. Erunt rectangulum 8 × 2 = 16 *& quadratum* 3 × 3 = 9 *æqualia quadrato* 5 × 5 = 25.

Fig. 11. Cor. 1. *Hinc ſi tres rectæ, AF, CF, BF fuerint arithmeticè proportionales, (hoc eſt, ſi differentia AC inter primam & ſecundam, differentiæ CB inter ſecundam & tertiam fuerit æqualis;) erit rectangulum ſub extremis AF, BF, unà cum quadrato differentiæ AC vel CB, æquale quadrato mediæ CF.*

Fig. 12. Cor. 2. *Hinc rectangulum AN, minùs eſt quadrato CE, defectu quadrati KG, quod datâ rectâ AB, ſemper idem manet, utcunque augeatur recta BF. Ex augmento verò ipſius BF, rectangulum AN ad quadratum CE magis magiſque accedit, tam proportione, quàm figurâ; ita ut differentia iſta KG, reſpectu magnitudinis figurarum AN & CE, tandem videatur contemnenda.*]

PRO-

PROPOSITIO VII.

SI recta (AB) fuerit utcunque ſecta (in C,) erunt quadrata totius (AB) & ſegmenti alterutrius (AC) æqualia bis rectangulo contento ſub totâ (AB) & ſegmento dicto (AC,) unà cum quadrato ſegmenti alterius (CB.) Fig. 13.

Quad. AB (a) æ. rect. BCA bis, quad. AC, quad. BC. (a) Per 4. l. 2.

Adde utriſque quad. AC: erunt

Quad. AB, quad. AC æ. rect. BCA bis, quad. AC bis, quad. BC.

Atqui rect. BCA bis cum quadrato AC bis, æquatur (b) rectangulo BAC bis. Quare ſi pro BCA bis & quad. AC bis ſubſtituamus BAC bis; erit. (b) Per 3. l. 2.

Quad. AB, quad. AC æ. rect. BAC bis, quad. BC.

[Aliter. *Conſtructâ figurâ 14, ita ut AD ſit quadratum totius AB, & AL quadratum partis AC, ductâque quadrati AD diametro EB, & productâ LC in F, quæ ſecet diametrum in G, & per G ductâ HI parallelâ ipſi AB vel ED, erunt rectæ HK, HI toti AB & ſibi invicem æquales; (nempe HK* = *HA* + *AK, & AK* (c) = *AC, AH* (d) = CG (e) = *CB, unde HK* = *AC*+*CB* = *AB* (f) = *HI;) & HE, HG parti AC & ſibi invicem æquales. Unde ob duo æqualia rectangula ſub totâ AB & parte AC, nempe HD, HL; & CI quadratum partis alterius, idem ſpatium cum quadratis AD, AL continentia, liquet propoſitum.* Fig. 14. (c) Per conſtr. & def. 32. l. 1. (p) Per 34. l. 1. (e) Per cor. 1. pr. 4. l. 2. & def. 32. l. 1. (f) Per 34. l. 1.

Sit numerus 13 *utcunque ſectus in* 9 & 4. *Erunt quadrata* 13 × 13 = 169 *&* 9 × 9 = 81 *æqualia* 13 × 9 = 117 *&* 13 × 9 = 117 *& quadrato* 4 × 4 = 16.

Propoſitio quarta nobis exhibet radicis binomiæ quadratum: ex hac autem ſeptimâ elicietur quadratum radicis reſiduæ, per ſequens.

Corollarium. *Si a rectâ BA auferatur pars AC; quadratum reſiduæ BC, a quadratis totius BA & ablatæ AC ſimul ſumptis exceditur, bis rectangulo BAC quod ſub totâ & ablatâ continetur. Nam per hanc prop. BAq* + *ACq* = 2 *rect. BAC* + *BCq; & utrinque ſubducendo* 2 *rect. BAC, erit BAq* — 2 *rect. BAC* + *ACq* = *BCq. Q. E. D.* Fig. 13.

 Sit

Fig. 14. *Sic ſane, in fig.* 14. *CI* $=$ *AD* $+$ *AL* $-$ *HD* $-$ *HL; hoc eſt, BCq* $=$ *BAq* $+$ *ACq* $-$ *rect. BAC bis.*]

PROPOSITIO VIII.

Fig. 15. *SI recta (LF) fuerit ſecta bifariam (in I) eique quædam recta adjiciatur (FO;) erit rectangulum (LIO) quod ſub (LI) dimidiâ, & (IO) compoſitâ ex dimidiâ & adjectâ continetur, quater ſumptum, unà cum quadrato adjectæ (FO,) æquale quadrato totius compoſitæ (LO.)*

(a) Per præc.

{ Quad. IO (*a*) Æ. rect. OIF bis }
{ quad. IF quad. FO. }

hoc eſt, quia ex hyp. FI, LI ſunt æquales, ac proinde quad. FI eſt quad. LI, & rect. OIF eſt rect. OIL, ſeu LIO,

{ quad. IO Æ. rect. LIO bis
{ quad. LI quad. FO.

Quare ſi utriſque æqualibus addas rect. LIO bis; Erit

{ quad. IO
{ quad. LI
{ rect. LIO bis;

id eſt,

(b) Per 4. l. 2.

(*b*) quad. LO Æ. { rect. LIO bis
quad. FO
rect. LIO bis: }

Id eſt,

Æ. { rect. LIO quater
& quad. FO. }

Fig. 16. [Aliter. *Fiat OD quadratum totius compoſitæ LO, & ductâ ejus diametro LA, per I, F puncta, ipſi LD vel OA parallelæ agantur IB, FE, ſecantes diametrum in R & S; & per R, S puncta, ipſi LO vel DA parallelæ agantur TN, MH. Propter LF biſectam in I,* (c) *erit lineæ dimidiæ LI quadratum TI, pars quarta quadrati MF lineæ integræ LF, & quatuor rectangula TI, RF, MR, PQ* (d) *erunt quadrata ſibi mutuò æqualia. Deinde, propter FQ, QS æqualium quadratorum latera, & proinde æqualia,* (e) *æquabuntur rectangula EN, QH: Sed FH* (f) $=$ *DS, & QH,* (g) $=$ *BS; ergo & FN* (h) $=$ *BM, & quatuor rectangula FN, QH; BM, BS erunt ſibi mutuò æqualia. Porro propter æquales LI, IR, erit RQ, (hoc eſt, quadratum RF unà cum rectangulo FN) rectangulum ſub dimidiâ LI, & IO compoſitâ ex dimidiâ & adjectâ;*

(c) Per cor. 3. pr. 4. l. 1.
(d) Per cor. idem.
(e) Per 36. l. 1.
(f) Per 43. l. 1.
(g) Per eandem.
(h) Per axio. 3.

Ergo

Ergo quatuor quadrata, TI, RF, MR, PQ, unà cum quatuor rectangulis FN, QH, BM, BS æquabuntur rectangulo ſub dimidiâ LI, & compoſitâ IO quater ſumpto: Eſt autem EH quadratum adjecta FO. Ergo, ſi recta LF fuerit ſecta bifariam in I, eique quædam recta FO adjiciatur; erit &c. Q. E. D.

Sit numerus 12 ſectus æqualiter in 6 & 6; eique addatur numerus 4. Erunt quatuor rectangula 10×6=240 *& quadratum* 4×4=16 *æqualia quadrato* 16×16=256.

Euclides hanc propoſitionem hoc modo effert.

Si recta IO fuerit utcunque ſecta in F; erit rectangulum OIF quod ſub totâ IO, & unâ parte IF continetur, quater ſumptum, unà cum quadrato reliquæ partis FO, æquale quadrato quod ex totâ & dictâ parte OI + IF [*ſeu ſumptâ in OI productâ, rectâ IL = IF, æquale quadrato quod ex OI & IL, nempe LO*] tanquam unâ lineâ deſcribitur. Fig. 16.

Sit numerus 10 *diviſus in* 6 *&* 4; *erit factum ex* 6 × 10 *quater ſumptum* = 240, *&* 4×4 = 16; *Et* 240 + 16 = $256 = \overline{10+6} \times \overline{10+6}$.]

PROPOSITIO IX.

SI recta (AC) ſit diviſa bifariam (in B) & non bifariam (in F;) erunt quadrata partium inæqualium (AF, FC) dupla quadratorum dimidiæ (AB) & partis intermediæ (BF.) Fig. 17.

Quad. AF æ. (*a*) rect. ABF bis, quad. AB, quad. BF. (a) Per 4. l. 2.

Addito igitur utriſque quad. FC,

{quad. AF, quad. FC} æ. {rect. ABF bis, quad. AB, quad. BF, quad. FC.}

Sed rect. ABF eſt rect. CBF, quia AB, BC ſunt æquales ex hyp.

Ergo {quad. AF, quad. FC} æ. {rect CBF bis, quad. AB, quad. BF, quad. FC.}

Atqui (*b*) CBF bis cum quad. FC æquantur quadratis BC, BF, ſeu AB, BF: quare ſi hæc illis ſubſtituas, erunt (b) Per 7. l. 2.

quad. AF + quad. FC æ. quad. AB + quad. AB + quad. BF + quad. BF;
Id eſt,
quad. AB + quad. BF bis.

Fig. 18:

[Aliter. *Ad punctum B erigatur BE æqualis & perpendicularis ipſi BA vel BC; & ductis AE, EC, per F agatur ipſi BE parallela FQ, & per Q ducatur QG parallela rectæ AC, & ducatur AQ. Propter ang. ABE rectum & lineas AB, BE æquales,* (a) *erunt BAE, BEA ſemirecti; & ob eandem rationem erunt BCE, BEC ſemirecti; Unde AEQ eſt rectus. Et propter* (b) *QFC rectum, & C ſemirectum, erit & FQC* (c) *ſemirectus, & rectæ FQ, FC erunt* (d) *æquales. Et quoniam rectas parallelas GQ, AC ſecat recta EB, erit* (e) *externus ang. EGQ æqualis interno & op. EBC, & proinde rectus; angulus verò GEQ eſt ſemirectus, ergo & GQE* (f) *ſemirectus erit, & rectæ GE, GQ erunt* (g) *æquales; & propter BQ rectangulum,* (h) *æquatur GQ ipſi BF. Unde in triangulo rectangulo ABE, propter æquales rectas AB, BE erit AE quadratum* (i) *duplum quadrati AB partis dimidiæ; & in triangulo rectangulo EGQ, propter æquales EG, GQ, erit EQ* (k) *quadratum duplum quadrati GQ vel BF partis intermediæ. Quadrata verò AE & EQ æqualia ſunt* (l) *quadrato AQ; hoc eſt, quadratis* (m) *AF & FQ ſive AF & FC partium inæqualium. Ergo quadrata partium inæqualium AF, FC, dupla ſunt quadratorum partis dimidiæ AB, & partis intermediæ BF. Q. E. D.*

Sit numerus 32 diviſus æqualiter in 16 & 16; & inæqualiter in 20 & 12. Erunt quadrata 20 × 20 = 400 & 12 × 12 = 144 dupla quadratorum 16 × 16 = 256 & 4 × 4 = 16.]

(a) *Per cor. 11. pr. 32. l. 1.*
(b) *Per 27. l. 1.*
(c) *Per cor. 6. pr. 32. l. 1.*
(d) *Per 6. l. 1.*
(e) *Per 27. l. 1.*
(f) *Per cor. 6. pr. 32. l. 1.*
(g) *Per 6. l. 1.*
(h) *Per 34. l. 1.*
(i) *Per cor. 1. pr. 47. l. 1.*
(k) *Per idem.*
(l) *Per 47. l. 1.*
(m) *Per eand.*

PROPOSITIO X.

Fig. 19.

S*I recta (FI) ſit biſecta (in L) eique quædam recta adjiciatur (IO;) erunt quadrata totius compoſitæ (FO) & adjectæ (IO) dupla quadratorum quæ deſcribuntur ſuper dimidiâ (FL) & ſuper (LO) compoſitâ ex dimidiâ & adjectâ.*

Adjiciatur in directum QF, æqualis IO. Quia ergo etiam

FL

FL, IL æquantur ex hyp, erunt totæ QL, OL æquales, ac proinde QO biſecta eſt in L, & aliter in I. Ergo

$\left\{\begin{matrix}\text{quad. QI}\\\text{quad. IO}\end{matrix}\right.$ Æ. (*a*) $\left.\begin{matrix}\text{quad. QL}\\\text{quad. LI}\end{matrix}\right\}$ bis. (a) Per præc.

Sed quad. QI eſt quad. FO, & quad. QL eſt quad. LO, & quad. LI eſt quad. FL.

Ergo $\left\{\begin{matrix}\text{quad. FO}\\\text{quad. IO}\end{matrix}\right.$ Æ. $\left.\begin{matrix}\text{quad. FL}\\\text{quad. LO}\end{matrix}\right\}$ bis.

[Aliter. *Ad L punctum, recta FL vel LI æqualis & perpendicularis agatur LE, & ducantur FE, EI; & per E ducatur EQ parallela ipſi FO; & per O ducatur OQ parallela ipſi LE: & ob rectas parallelas EL, QO, recta EI, QO non parallela, ſi producantur,* (b) *concurrent alicubi. Producantur donec concurrant in G, & ducatur FG. Propter angulum FLE rectum, & FL, LE æquales,* (c) *erunt LFE, LEF ſemirecti; & pari ratione LIE, LEI* (d) *erunt ſemirecti, & proinde FEI rectus. Porro angulus OIG, oppoſitus ad verticem ſemirecto LIE,* (e) *eſt etiam ſemirectus: & propter parallelas EL, QG, a rectâ FO ſectas in L & O, & angulum ELO rectum, erit etiam ang.* (f) *alternus GOL rectus: quare in triangulo GOI, propter angulum ad O rectum & ad I ſemirectum, erit & ang. OGI* (g) *ſemirectus, & proinde latera OG, OI* (h) *erunt æqualia. Et cùm in parallelogrammo LQ, angulus L rectus ſit, etiam oppoſitus Q rectus* (i) *erit. Quare in triangulo EQG, propter Q rectum, & QGE ſemirectum, erit & QEG* (k) *ſemirectus, & latera QE, QG* (l) *æqualia: ſed in rectang. LQ, eſt EQ* (m) *= LO: quare LO = EQ = QG. Jam verò, in triangulo rectangulo FLE, propter latera FL, LE æqualia, FE quadratum duplum* (n) *eſt quadrati FL partis dimidiæ; & in triangulo rectang. EQG, propter latera QE, QG æqualia, erit EG quadratum,* (o) *duplum quadrati EQ vel LO compoſitæ ex dimidiâ & adjectâ. Quadrata verò FE & EG æqualia ſunt* (p) *quadrato FG; hoc eſt,* (q) *quadratis FO totius compoſitæ, & OG vel OI partis adjectæ. Ergo* (r) *quadrata totius compoſitæ FO, & adjectæ OI, dupla ſunt quadratorum dimidiæ FL, & LO compoſitæ ex dimidiâ & adjectâ. Q. E. D.*

Sit numerus 40 ſectus æqualiter in 20 & 20, eique addatur numerus 14. Erunt Quadrata 54 × 54 = 2916 & 14 × 14 = 196 dupla quadratorum 20 × 20 = 400, & 34 × 34 = 1156.]

Fig. 20. (b) Per cor. 1. Sch. p. 31. l. 1. (c) Per cor. 11. pr. 32. l. 1. (d) Per idem. (e) Per 15. l. 1. (f) Per 27. l. 1. (g) Per cor. 6. p. 32. l. 1. (h) Per 6. l. 1. (i) Per 34. l. 1. (k) Per cor. 6. pr. 32. l. 1. (l) Per 6. l. 1. (m) Per 34. l. 1. (n) Per cor. 1. pr. 47. l. 1. (o) Per idem. (p) Per 47. l. 1. (q) Per eand. (r) Per ax. 1.

PROPOSITIO XI.

Fig. 11. **D***Atam rectam (AB) ita ſecare (in C,) ut rectangulum (ABC) ſub totâ & unâ parte contentum, æquale ſit quadrato partis reliquæ (AC.)*

Ex A erige perpendicularem AF parem AB. AF biſeca in X. Duc rectam XB; cui ex FA productâ æqualem abſcinde XI. Tum abſcinde AC æqualem AI. Dico factum.

Perficiatur quadratum BAFS, & ductâ per C perpendiculari, perficiatur quoque rectangulum FILO. Quoniam FA biſecta eſt in X, eique adjecta eſt AI; erit

(a) Per. 6. l. 2.

{rect. FIA æ. (*a*) quad. XI;
{quad. XA

id eſt,

(b) Per conſtr. & axio. 15. æ. (*b*) quad. XB;

id eſt,

(c) Per 47. l. 1. æ. (*c*) quad. BA }
quad. XA. }

Auferatur utrimque quad. XA; Erit
rect. FIA ſeu FL æ. quad. BA; id eſt AS.
Quare ablato rurſum communi AO;
Erit AL æ. CS.

Atqui AL eſt quadratum AC, cùm AI, AC ex conſtr. ſint æquales: & CS eſt rect. ABC, cùm BS ſit par AB. Ergo rectang. ABC æquatur quadrato AC. Datam igitur rectam ſecuimus, ut petebatur.

Scholium.

PRopoſitiones 10. primæ hujus libri veræ ſunt, etiam in numeris. Hæc 11. numeris explicari non poteſt. Neque enim ullus numerus ita ſecari poteſt, ut productum ex toto in partem unam, æquale ſit quadrato partis reliquæ. [*Et hoc quidem demonſtravit Tacquetus noſter in Schol. poſt prop. 29 libri tertii elementorum Arithmet. In numeris ſurdis autem exhiberi poſſunt quantitates ſegmentis AC, CB reſpondentes. Sit AB = 2. hoc eſt, proponatur numerus binarius ita dividendus in partes duas, ut quadratum partis majoris æquetur facto ſub toto binario in ſui partem minorem ducto. Erit AC, ſive pars major* $= \sqrt{5} - 1$; *& CB, ſive pars minor* $= 3 - \sqrt{5}$. *Sic enim, non ſolùm iſtarum partium ſumma toti binario æqualis erit; verùm etiam, tum quadratum partis majoris,*

tum & factum ex binario & parte minori, æquabitur uni eidemque quantitati, nempe 6—2 √ 5.] Porro mira vis eſt hujus ſectionis, de quâ vide prop. 30. l. 6.

PROPOSITIO XII.

IN *trigono obtuſangulo (ACB,) quadratum lateris (AB) obtuſo angulo (C) oppoſiti, quadrata laterum reliquorum (AC, BC) excedit rectangulo (BCF) bis, quod comprehenditur ſub (BC) latere alterutro obtuſum angulum (ACB) continentium, in quod, cùm protractum fuerit, cadit perpendicularis (AF;) & ſub (FC) intercepto exteriùs latere inter perpendicularem & obtuſum angulum.* Fig. 24.

Quad. AB Æ. (a) quad. AF + quad. BF. (a) Per 47. l. 1.

Sed quad. BF eſt (b) æquale quadratis FC, CB, & rect. BCF bis. Ergo ſi hæc ſubſtituas pro quad. BF; erit (b) Per 4. l. 2.

Quad. AB Æ. quad. AF + quad. FC + quad. CB + rect. BCF bis.

Atqui quadrata AF, FC æquantur quadrato (c) AC. Quare hoc pro illis ſubſtituto, erit (c) Per 47. l. 1.

Quad. AB Æ. quad. AC + quad. CB + rect. BCF bis.

PROPOSITIO XIII.

IN *triangulo quocumque (ACB,) quadratum lateris (AB) acuto angulo (C) oppoſiti, a quadratis laterum reliquorum (AC, BC) exceditur rectangulo (BCF) bis, quod continetur ſub (BC) latere alterutro acutum angulum (C) comprehendentium, in quod cadit perpendicularis (AF) ab angulo oppoſito (A;) & ſub (CF) interceptâ inter perpendicularem (AF) & acutum angulum (C.)* Fig. 25. 26.

Quad.

(a) Per 4. l. 2.

Quad. BC. Æ. (a) rect. BFC bis
quad. BF
quad. FC.

(b) Per 47. l. 1.

Et Quad. AC (b) Æ. quad. FC
quad. AF.

Quare duo { quad. BC / quad. AC } ſimul Æ. rect. BFC bis
quad. BF
quad. FC bis
quad. AF

(c) Per 3. l. 2. Atqui rectang. BFC bis cum quad. FC bis æquatur (c) rectangulo BCF bis. Ergo hoc pro illis ſubſtituto,

{ Quad. BC / quad. AC. } Æ. rect. BCF bis
quad. BF
quad. AF.

(d) Per 47. l. 1. Atqui quadrata AF, BF ſunt (d) quad. AB. Ergo hoc pro illis ſubſtituto,

{ Quad. BC / quad. AC } Æ. rect. BCF bis
quad. AB:

Hoc eſt, BC, AC quadrata excedunt quad. AB rectangulo BCF bis.

Corollarium.

Fig. 25. (e) Per cor. 3. p. 32. l. 1. VEra eſt propoſitio licèt perpendicularis [*AF, propter angulum ABC* (e) *obtuſum,*] cadat extra triangulum. [*In latus CB productum.*] Demonſtratio fere eadem eſt. [*Vel ſic;*

(f) Per 12. l. 2.

Quad. AC Æ. (f) *rect. CBF bis*
quad. CB
quad. AB.

Addito igitur utriſque quadrato CB;

{ quad. AC / quad. CB } Æ. rect. CBF bis
quad. CB bis
quad. AB.

(g) Per 3. l. 2. *Atqui rectang. CBF bis, unà cum quadrato CB bis, æquatur* (g) *rectangulo BCF bis:*

Ergo { quad. AC / quad. BC } Æ. rect. BCF bis
quad. AB.

Fig. 23, 24, 25. (h) Per 7. l. 2. (i) Per 47. l. 1. (k) Per eand. ALITER *& univerſaliùs demonſtrabitur prop. 13. ſive cadat perpendicularis intra triangulum, ſive extra.*
BCq + CFq = (h) 2 *rect. BCF + BFq. Adde utrinque AFq; BCq + CFq + AFq* = 2 *rect. BCF + BFq + AFq. Sed CFq + AFq* = (i) *ACq, & BFq + AFq* = (k) *ABq. Ergo BCq + ACq* = 2 *rect. BCF + ABq. Q. E. D.*]

Schol.

Scholium (1.)

EX hac & 47. lib 1. habetur dimenſio cujuſcunque trianguli cujus tria latera ſint nota, licèt aream habeat impervíam. Horum quippe theorematum beneficio innoteſcit perpendicularis, etiamſi eam impedimenta locì non ſinant deſignari. Perpendicularis autem multiplicata per ſemiſſem lateris, cui incidit, producit aream trianguli, ut patet ex ſcholio propoſ. 41. l. 1.

Eſto trigonum quodcunque ACB nota habens latera. Oporteat notam reddere perpendicularem AF ex dato angulo A in latus oppoſitum BC demiſſam. *Fig.* 25. vel 24.

Quadratum lateris AB acuto C oppoſiti, aufer ex ſummâ quadratum AC, CB. Per 13. reſiduum erit rectangulum BCF bis. Reſidui ſemiſſem (hoc eſt, rectangulum BCF) divide per notum latus BC. Proveniet recta CF. Quadratum rectæ CF aufer ex quadrato AC. Reſiduum dabit quadratum AF, cujus radix quadratica dabit perpendicularem AF.

[*Ex. gr. ſit* $AB = 13$, *&* $BC = 14$, *&* $AC = 15$. *Erit* $ABq = 169$, *&* $BCq + ACq = 196 + 225 = 421$. *Unde* $2\ BCF\ (= BCq + ACq - ABq = 421 - 169) = 252$, *& propterea* $BCF = 126$, *&* $CF = 9$. *Ergo* $AFq\ (= ACq - CFq = 225 - 81) = 144$, *&* $AF = 12$. *Et trianguli area erit* $12 \times 7 = 6 \times 14 = 84$. *Fig.* 24.

Obtinere id ipſum poteris etiam ex p. 12. Verùm 13. ſufficit, cùm in omni triangulo perpendicularis ex aliquo angulo in latus oppoſitum, intra triangulum cadat. *Fig.* 23. 24.

[*Ne autem Tyronibus deſit exemplum, quo etiam ex prop. 12. aream trianguli obtuſanguli, (ubi perpendicularis cadit extra triangulum,) datis lateribus, obtinere poſſim; In triangulo obtuſangulo ABC, (fig. 22.) ſit* $AB = 20$, $AC = 13$, $BC = 11$. *Erit* $ABq = 400$, $ACq + BCq = 169 + 121 = 290$. *Unde* $ABq - ACq - BCq = 400 - 290 = 110 = 2\,BCF$, $BCF = 55$, $CF = 5$, $CFq = 25$, $ACq - CFq = 169 - 25 = 144 = AFq$. *Unde* $AF = 12$, *&* $\frac{1}{2}\ AF \times BC = 6 \times 11 = 66$ *eſt area trianguli ABC.*] *Fig.* 22.

Scholium (2.) *Si a trianguli cujuſvis (ACB) vertice (A) in baſem (CB) ſi opus productam, demittatur perpendiculum (AF;) erit differentia quadratorum è lateribus (AC, AB,) æqualis duplo rectangulo ſub baſi (CB,) & (CF —* $\frac{1}{2}$ *CB) diſtantia perpendiculi a medio baſis.* Vide Arithmet. Univerſ. pag. 103. edit. primæ. *Fig.* 24. 25.

Nam

Nam per hanc prop. $ACq + BCq = ABq + 2\,BCF$.

Et ſubductis utrinque $ABq + BCq$, *erit* $ACq - ABq = 2\,BCF - BCq$.

(a) Per cor. 4 p. 4. l. 2.

Sed $BCq =$ (a) $2\,BC \times \frac{1}{2}\,BC$. *Ergo* $ACq - ABq = 2\,BC \times \overline{CF - \frac{1}{2}\,BC}$. Q. E. D.

Fig. 26. (b) Per n. 1. Schol. p. 26. l. 1.

Si latera AB, AC ſint æqualia, perpendiculum cadet in medium (b) *baſis; adeoque tum differentia quadratorum è lateribus, tum diſtantia perpendiculi à medio baſis ſimul evaneſcunt.*

Fig. 27. (c) Per pr. ob. 2. poſt 47. l. 1. (d) Per cor. 4. pr. 4. l. 2.

Si alteruter angulorum ad baſim ſit rectus, ut B; perpendiculum AF cum latere AB coincidet; & differentia quadratorum è lateribus (c) *æquabitur quadrato baſis CF. Diſtantia autem perpendiculi a medio baſis æquabitur baſis dimidio, & proinde duplum rectang. ſub baſi & iſtâ diſtantiâ, hoc eſt, ſub baſi & baſis dimidio,* (d) *æquabitur etiam quadrato baſis. Quare differentia quadratorum è lateribus æqualis erit duplo rectangulo ſub baſi & diſtantiâ perpendiculi a medio baſis.*

Fig. 28. (e) Per cor. 9. p. 32. l. 1. (f) Per axio. 15. (g) Per 36. l. 1. (h) Per axio. 9. (i) Per axio. 3.

Schol. 3. *Si a trianguli cujuſvis ABP vertice A ducatur recta AC baſem BP biſecans in C, erunt quadrata laterum AB, AP ſimul ſumpta, dupla quadratorum dimidiæ baſis BC, & rectæ AC biſecantis baſem, ſimul ſumptorum. A vertice A demittatur AF perpendicularis baſi, & cadat inter C & P.* (e) *Erit itaque angulus ACB obtuſus, & ACP acutus. Unde per prop.* 12, *erit* $ABq = ACq + CBq + 2\,BCF$ *& per prop.* 13, *erit* $APq = ACq + CPq - 2\,PCF$. *Sed propter* $BC = PC$, *erit* $CBq =$ (f) CPq, & $2\,BCF =$ (g) $2\,PCF$. *Unde* $CBq + CPq =$ (h) $2\,CBq$, & $2\,BCF - 2\,PCF$ (i) $= 0$. *Ergo æqualibus addendo quantitates æquales, provenient æqualia aggregata,* $ABq + APq = 2\,ACq + 2\,CBq$. Q. E. D.

Coroll. *Iiſdem manentibus baſe BP, & rectâ AC biſecante baſem, utcunque ad baſem varie inclinatâ, ut aC, idem manebit aggregatum quadratorum crurum; ſcil.* $ABq + APq = aBq + aPq$. *Et ſic ubique.*

Hæc autem propoſitio ad Curvarum tangentes, diametros & ordinatas applicari poteſt. Tangant v. gr. rectæ AB, AP conicam quamlibet ſectionem vel ſectiones oppoſitas in B & P; & junctâ BP biſecetur recta AC: erit BC vel PC ordinata ad diametrum AC. Unde quadrata tangentium AB, AP dupla erunt quadratorum ordinatæ BC vel PC, & diametri inter ordinatam ac tangentium concurſum interceptæ AC. Hac etiam propoſitione utitur Serenus Antiſſenſis in ſectione coni à plano per verticem ducto. Verùm hæc extra oleas.

PRO-

PROPOSITIO XIV.

D*Ato rectilineo (QXZ,) æquale quadratum conſtruere.* Fig. 29.

[*Sume rectam quamvis IA, ſuper quâ*] rectilineo QXZ fac æquale (*a*) parallelogrammum rectang. CI, cujus latera IA, CA, ſi æqualia fuerint, ipſum erit quadratum quod petitur: ſi inæqualia ſint, latus majus IA produc in L, donec AL ſit par AC. IL biſeca in Z; quo centro per I & L deſcribe circulum, & producatur CA donec circumferentiæ occurrat in B. Quadratum rectæ AB æquale eſt dato QXZ. (a) Per 45. l. 1.

Ducatur enim recta ZB, Quoniam IL ſecta eſt bifariam in Z, & aliter in A; erit

{rect. IAL / quad. ZA} Æ. (*b*) quad. ZB; hoc eſt, (b) Per 5. l. 2.

Æ. (*c*) quad. ZB; hoc eſt, (c) Per conſtr. & def. circuli.

Æ. (*d*) quad. ZA / quad. BA (d) Per 47. l. 1.

Ablato igitur utrimque quadrato ZA communi, remanet rect. IAL Æ. quad. BA:

hoc eſt, quia AC, AL ſunt æquales, erit rect. CI,

Id eſt, (*e*) rectil. QXZ Æ. quad. AB. (e) Per conſtr.

Scholium.

COnſtructio Euclidea requirit, ut per 45. l. 1. rectilineum reducatur ad rectangulum. Quæ reductio cùm ſatis operoſa ſit, fortaſſe expeditiùs problema abſolvetur hunc in modum.

Rectilineum datum reſolvatur in tot quadrangula (Z, X) quot poteſt. Tum ſingulis quadrangulis fac (*f*) rectangula æqualia. Si tunc ſuperſit (ut hîc contigit) unum triangulum (Q.) illi quoque fac (*g*) æquale rectangulum. Singulis deinde rectangulis per hanc 14. fac quadrata æqualia: ac demum his omnibus quadratis unum æquale (*h*) fiat. Erit hoc æquale dato QXX. (f) Per ſch. 2. p. 45. l. 1. (g) Per cor. p. 42. l. 1. (h) Per prob. 1. ſch. p. 47. l. 1.

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ

LIBER TERTIUS.

PErfectiſſimæ inter planas figuræ proprietates fundamentales hoc libro demonſtrantur. Libri utilitas vel hoc ſolo innoteſcit, quòd tractet de circulo, rerum admirabilium per Matheſim univerſam fonte uberrimo. Theoremata illuſtriora ſunt 16, 20, 21, 22, 31, 32, 35, 36.

COntinet autem liber hic tertius *circuli proprietates*: *lineaſque plurimas &* intra *ejuſdem peripheriam &* extra *ad eandem ductas inter ſe comparat. Circulorum etiam ſe mutuò interſecantium, & ſe mutuò, aut lineas rectas tangentium affectiones explicat. Angulos etiam ſive ad centrum ſive ad circumferentiam poſitos inter ſe componit. Breviter Prima* Geometriæ Practicæ *elementa, circulorum adminiculo potiſſimum innixa, exponit.*

DEFINITIONES.

1. CIrculi æquales ſunt, quorum diametri ſeu ſemidiametri ſunt æquales.

Fig. 21. l. 3. 2. Recta (FB) circulum tangere dicitur, quæ circulo ſic occurrit (in B) ut tamen producta circulum non ſecet.

Fig. 14. & 15. 3. Circuli tangere ſe dicuntur, cùm ſibi ſic occurrunt, ut tamen non ſecent.

Fig. 19. 4. In circulo æqualiter à centro (A) diſtare dicuntur rectæ (BC, FL) cùm perpendiculares (AI, AO) quæ ex centro in ipſas ducuntur, ſunt æquales. [*Et ſi perpendiculares in rectas (XZ, BI) demiſſæ, ſint inæquales, magis à centro diſtare*
Fig. 20. *dicitur ea recta (XZ) in quam cadit major perpendicularis.*]

Fig. 38. 5. Segmenta, ſeu portiones circuli ſunt partes (CQE, CSE) in quas circulum dividit recta (CE) circulum ſecans, [*quæ ſegmenti utriuſque baſis eſt.*]

Fig. 34. 35. 6. Angulus in ſegmento eſt (BQC) qui continetur ſub rectis lineis, quæ ad unum circumferentiæ punctum (Q) ex ſegmenti terminis (C, B) ducuntur.

Fig. 34. 7. Angulus (CQB) inſiſtere dicitur peripheriæ (BOC) quæ illi opponitur.

Fig. 12. 8. Sector eſt pars circuli a duabus ſemidiametris (AB, AF) & arcu

& arcu (BF vel BCF) quem ſemidiametri intercipiunt, comprehenſa.

[9. *Angulus (BAO) ſegmenti (ABQO) eſt, qui baſi ſegmenti (BA) & arcu (QOA) comprehenditur.* Fig. 22.

10. *Recta BC circulo inſcripta, vocatur arcuum BAC, BIC, vel anguli ad centrum BDC* chorda, *ſive* ſubtenſa. *Et, ſi ab arcûs AB extremo B ducatur diameter AI, & in eam ab altero arcûs extremo B cadat perpendicularis BG; appellatur hæc arcuum BA, BI, ſive angulorum ad centrum BDA, BDI* ſinus rectus, *vel ſimpliciter* ſinus; *eritque GA, arcûs AB vel anguli ADB (& GI arcûs IB vel anguli IDB)* ſinus verſus. *Porro, ſi producatur radius DB donec recta EF (circulum tangenti in A) occurrat in E, recta AE nominatur arcuum AB, BI, vel angulorum ADB, BDI* tangens, *& recta DE eorumdem arcuum vel angulorum* ſecans. *Præterea, anguli ad centrum recti ADK ſinus rectus DK (qui in hoc caſu, circuli radius erit,) peculiari nomine* ſinus totus *appellatur. Denique ſinus rectus BL anguli BDK (quod complementum eſt anguli ADB ad rectum) vocatur* coſinus *anguli ADB: item HK tangens, & HD ſecans ejuſdem anguli BDK, eſt anguli ADB* cotangens & coſecans *reſpectivè.*] Fig. 40.

PROPOSITIO I.

D*Ati circuli centrum invenire.*

Ducatur in circulo recta BC utcunque, quam biſeca in Q. Per Q duc perpendicularem LF. Hanc biſeca in A. Erit A centrum. Fig. 1. l. 3.

Si negas; centrum eſto O extra rectam FL, (nam in FL eſſe non poterit, cùm ubilibet extra A dividatur inæqualiter;) ducanturque BO, QO, CO. Quoniam igitur vis O centrum eſſe, erunt BO, CO æquales. Triangula igitur BOQ, COQ ſibi mutuò æquilatera ſunt, cùm etiam ex conſtr. BQ & QC ſint pares, & QO communis. Ergo (*a*) angulus OQC æquatur angulo OQB. Ergo OQC (*b*) rectus eſt, ac proinde angulo LQC per conſtr. recto æquatur, pars toti. Quod eſt abſurdum.

(a) Per 8. l. 1.
(b) Per def. 14. l. 1.

Corollarium.

EX demonſtratis patet, ſi in circulo recta (LF) aliam (BC) biſariam & perpendiculariter ſecat, in ſecante eſſe centrum.

Facillime per normam invenitur centrum; vertice Q ad circumferentiam applicato. Si enim recta DE jungens puncta Fig. 2.

E D &

D & E, quibus normæ latera peripheriam ſecant, biſecetur in A, erit A centrum. Demonſtratio pendet ex 31. hujus.

PROPOSITIO II.

Fig. 2.

SI in circuli ambitu duo puncta ſumantur (B, C,) recta quæ per illa ducitur, intra circulum cadit.

Accipiatur in rectâ BC quodvis punctum O, & ex centro A ducantur AO, AB, AC. Quoniam AB, AC æquantur, etiam (*a*) anguli B & C æquales erunt. Quoniam igitur externus AOC (*b*) major eſt interno B, major erit quoque quàm C. In triangulo igitur OAC, latus AC ſubtendens majorem angulum AOC, majus eſt (*c*) latere AO ſubtendente minorem C. Cùm igitur AC tantùm pertingat ex centro ad circumferentiam, AO non pertinget. Ergo punctum O intra circulum cadet. Idem oſtendetur de quovis alio puncto rectæ BC. Tota ergo BC cadit intra circulum.

(a) Per 5. l. 1. (b) Per cor. 1. p. 32. l. 1. (c) Per 19. l. 1.

Cor. *Hinc ſequitur rectam quamvis lineam circulum tangentem, in unico puncto eundem tangere. Si enim circumferentiæ puncta duo tangeret, eſſet* recta linea per duo circuli puncta ducta, *atque adeò* (*d*) *intra circulum caderet, contra tangentis definitionem. Et ſimili ratiocinio (a planis ad ſolida tranſeundo) probari poſſet, planum quodvis ſphæram in unico puncto tangere.*

(d) Per hanc prop.

PROPOSITIO III.

Fig. 3.

SI in circulo recta per centrum ducta (BL) aliam (CF) non per centrum ductam ſecet bifariam (in O,) ſecabit quoque perpendiculariter. Et ſi ſecet perpendiculariter, ſecabit bifariam.

1. Pars. Ex A centro ducantur AC, AF. Triangula X, Z ſibi mutuò æquilatera ſunt: Nam CO, FO ex hypotheſi, & AC, AF quia ex centro, æquales ſunt; AO verò communis eſt. Ergo (*e*) anguli AOC, AOF æquales. Ergo (*f*) recti. Quod erat primum.

2. Pars. Quia ex hyp. anguli AOC, AOF ſunt recti, erit quad. AC. (*g*) æquale quadratis AO, CO; & quad. AF æquale quadratis AO, FO. Cùm igitur quadrata AC, AF æqualia (*h*) ſint, etiam duo ſimul AO, CO duobus ſimul, AO, FO æqualia erunt. Quare ablato utrimque communi quadrato AO, remanent CO, FO æqualia. Ac proinde etiam rectæ CO, FO ſunt æquales. Quod erat alterum.

(e) Per 8. l. 1. (f) Per def. 14. l. 1. (g) Per 47. l. 1. (h) Per poſtula. 15.

[Cor.

[Cor. 1. *Dimidium chordæ angulum quemvis ad centrum ſubtendentis, eſt ſemiſſis anguli iſtius ſinus rectus. Chordæ CF anguli ad centrum CAF, perpendicularis a centro ducatur AO. In triangulis X, Z, erunt CO, FO* (a) *æquales, AO communis, & anguli ad O recti. Ergo anguli CAO, FAO æquales* (b) *erunt. Quare angulus CAO ſemiſſis erit anguli CAF, & recta CO dimidium chordæ CF. Sed CO eſt ſinus* (c) *rectus anguli CAO. Ergo dimidium chordæ, angulum quemvis ad centrum ſubtendentis, eſt ſemiſſis anguli iſtius ſinus rectus.*

(a) *Per hanc prop.*
(b) *Per 4. l. 1.*
(c) *Per def. 10 l. 1.*

Cor. 2. *Si trianguli cujuſvis æquilateri, aut etiam tantùm Iſoſcelis ACF ſumatur vertex A pro circuli centro, & alterum æqualium crurum AC pro radio, circulus tranſibit* (d) *etiam per F: atque inde, vi hujus prop. ſi recta AO a vertice trianguli iſoſcelis biſecet baſem, ei quoque perpendicularis erit; & ſi baſi fuerit perpendicularis, eam biſecabit. Et inde etiam deduci poſſent cætera proprietates quæ in Schol. p. 26. l. 1. aliunde derivantur.*

(d) *Per def. 18. 19. & 26. l. 1.*

Scholium. *Si a vertice trianguli Iſoſcelis ABC ad quodvis punctum baſis recta linea ducatur; erit quadratum ductæ rectæ unà cum rectangulo ſub ſegmentis baſis, æquale quadrato lateris AB vel AC. Nam recta a vertice A ducta, vel erit baſi BC perpendicularis, vel non. Sit primò ducta recta AD perpendicularis baſi, erit BD* = (e) *DC, & proinde rectang. BDC* = *BDq, vel DCq. Sed ADq* + *BDq* = (f) *ABq; hoc eſt ADq* + *rect. BDC* = *ABq. Q. E. D.*

Fig. 4.

(e) *Per cor. 2. hujus.*
(f) *Per 47. l. 1.*

Sed recta ducta ſit AE, non perpendicularis baſi, & ducatur perpendicularis AD, quæ baſim in D (g) *biſecabit. Cùm igitur recta BC ſit bifariam ſecta in D & non bifariam in E,* (h) *erit rectang. BEC* + *EDq* = *BDq. Adde utrinque DAq, & rect. BEC* + *EDq* + *DAq* = *BDq* + *DAq. Sed EDq* + *DAq* = (i) *AEq, & BDq* + *DAq* = (k) *ABq. Ergo rect. BEC* + *AEq* = *ABq. Q. E. D.*

(g) *Per cor. 2. hujus.*
(h) *Per 5. l. 2.*
(i) *Per 47. l. 1.*
(k) *Per eand.*

PROPOSITIO IV.

SI in circulo duæ rectæ (BC, FL) non ambæ per centrum ductæ, ſe ſecent, non ſecabunt ſe mutuò bifariam.

Fig. 5. & 6.

Nam ſi una LF tranſeat per centrum, patet hanc non biſecari ab alterâ BC, quæ ex hyp. per centrum A non tranſit.

Fig. 6.

Si neutra per centrum tranſit, ex A centro duc AO. Si jam ambæ BC, FL forent biſectæ in O, anguli quoque AOC AOL eſſent (*l*) recti, ac proinde æquales, totum & pars. Quod fieri non poteſt.

Fig. 5.

(l) *Per præc.*

PROPOSITIO V & VI.

Fig. 7. & 8.

Circuli ſe mutuò ſecantes, aut interiùs tangentes, non habent idem centrum.

Aliàs enim ductis ex communi centro A rectis AB, ACF, eſſent AC, AF, (pars & totum) æquales, quia ambæ ſunt æquales eidem AB.

PROPOSITIO VII.

Fig. 9.

Si in circulo, quodvis aliud a centro (A) accipiatur punctum (C,) ex quo rectæ plures (CB, CL, CO, CF) in circumferentiam cadant;

1. Maxima erit (CB) quæ per centrum tranſit.

2. Reliqua diametri pars (CF) minima.

3. Aliarum verò major eſt ea, quæ maximæ (CB) propior.

4. Neque plures quàm duæ ex dicto puncto (C,) quod a centro diverſum eſt, ad circumferentiam duci poſſunt æquales.

Pars 1. Ducatur ex A centro recta AL. Quoniam AL, AB æquales ſunt, additâ communi AC, erunt LA cum AC, & BC æquales. Sed LA, AC ſunt majores (*a*) quàm LC. Ergo etiam BC major eſt quàm LC. Eodem modo BC oſtendetur major quavis aliâ.

(a) Per 20. l. 1.

Pars 2. Ex centro duc AO rectam. AO, (hoc eſt, AF) eſt minor (*b*) quàm AC, CO. Ablatâ igitur communi AC, remanet FC minor quàm CO. Eodem modo erit CF minor quavis aliâ.

(b) Per eand.

Pars 3. In triangulis COA, CLA, latera LA, AC æquantur lateribus OA, AC; angulus verò LAC major eſt angulo OAC. Ergo (*c*) baſis LC major baſi OC.

(c) Per 24. l. 1.

Pars 4. Patet ex præcedentibus. Nam ſi tres duci poſſent æquales, CO, CI, CQ, forent duæ CQ, CI ad eandem partem inter ſe æquales. Quod repugnat parti 3.

Coroll. *Simili planè ratiocinio cum Theodoſio colligimus, Arcuum circulorum maximorum, a puncto quovis a circuli dati polo diverſo, in ſuperficie ſphæræ ad circulum iſtum ductorum, maximum eſſe eum qui per circuli polum tranſit; minimum qui ad punctum*

punctum oppoſitum dati circuli ducitur; reliquorum verò eum eſſe majorem qui maximæ eſt propior: duos verò ſolùm inter ſe æquales ab eodem puncto ad circulum duci poſſe. Neque aliter de pleriſque hujus libri propoſitionibus Lector per ſe ratiocinabitur. *A planis enim ad ſolida in hiſce rebus tranſire eſt ſane faciliimum.*

PROPOSITIO VIII.

SI a puncto extra circulum accepto (A) ad circulum ducantur plures rectæ (AB, AC, AF; AO, AQ, AR;) Fig. 10 & 11.

1. Earum quæ in cavam peripheriam incidunt, maxima eſt (AB) tranſiens per centrum (Z.)

2. Aliarum major eſt ea, quæ maximæ (AB) propior.

3. Extra circulum minima eſt (AO) quæ producta per centrum tranſit.

4. Quæ minimæ propior, minor eſt remotiore.

5. Non plures quàm duæ ex dicto puncto (A) in peripheriam duci poſſunt æquales, ſive intra circulum, ſive extra.

Pars 1. Ex centro Z duc ZC. Quia æquantur ZC, ZB; additâ communi AZ, erunt AZ, ZC ipſi AB æquales. Sed AZ, ZC majores ſunt (a) quàm AC. Ergo etiam AB major AC. Eodem modo erit AB major quavis aliâ. Fig. 10. (a) Per 20. l. 1.

Pars 2. Duc ZF. Latera CZ, ZA æquantur lateribus FZ, ZA. Angulus verò CZA major eſt angulo FZA. Ergo (b) baſis CA major baſi FA. (b) Per 24. l. 1.

Pars 3. Duc ZQ. Duæ AQ, QZ majores (c) ſunt quàm AZ. Ablatis igitur æqualibus ZQ, ZO, remanet AO minor quàm AQ. Eodem modo AO minor erit quavis aliâ. Fig. 11. (c) Per 20. l. 1.

Pars 4. Duc ZR. Rectæ AQ & QZ minores ſunt (d) quàm AR, RZ. Ablatis ergo æqualibus ZQ, ZR, remanet AQ minor quàm AR. (d) Per 21. l. 1.

Pars 5. patet ex quatuor præced.

PROPOSITIO IX.

SI ab aliquo intra circulum puncto (A) plures quàm duæ æquales ad ambitum duci poſſint; Id punctum centrum erit. Fig. 12.

Patet ex 4. parte prop. 7.

PROPOSITIO X.

Fig. 13. *Circuli in duobus tantùm punctis ſe mutuò ſecant.*

Secent enim, ſi fieri poteſt, in pluribus B, C, F. Ex A centro circuli LQ ducantur ad B, C, F, rectæ AB, AC, AF. Erunt hæ æquales. Quoniam ergo ex aliquo intra circulum OS puncto A ductæ ſunt tres æquales ad ejus peripheriam, AB, AC, AF, erit A (*a*) centrum quoque circuli OS. Ergo circuli LQ & OS ſe ſecantes habent idem centrum, quod repugnat propoſitioni 5.

(a) Per præc.

PROPOSITIO XI.

Fig. 14. *Si duo circuli ſe intus tangant; recta per eorum centra (A & I) ducta tranſibit per contactum (B.)*

Si negas, habeant, ſi fieri poteſt, centra eum ſitum, ut recta per illa tranſiens, cadat extra contactum B, ſecans circulos in O & L, ſintque centra ipſa A & C; ac junge AB, CB. Quoniam igitur CB, CO æquantur, additâ communi AC, etiam AC, CB æquales erunt AO. Sed (*b*) AC, CB ſunt majores quàm AB; Hoc eſt (*c*) quàm AL. Ergo etiam AO major eſt quàm AL, pars toto. Quod eſt abſurdum.

(b) Per 20. l. 1. (c) Per def. circuli.

PROPOSITIO XII.

Fig. 15. *Si circuli ſe tangant exteriùs; recta conjungens centra, per contactum tranſibit.*

Si negas, ſint, ſi fieri poteſt, centra ita poſita, puta in A & B, ut recta per ipſa tranſiens, per contactum S non incedat, ſed circulos ſecet in O & Q, junganturque AS, BS. Erunt igitur (*d*) AS, SB majores quàm AB. Sed AS (*e*) eſt par AO, & BS par BQ. Ergo etiam AO, BQ ſunt majores quàm tota AB, pars toto. Quod fieri non poteſt.

(d) Per 20. l. 1. (e) Per defin. circuli.

[Coroll. ad duas præced. *Si duo circuli ſe tangant vel interiùs vel exteriùs; recta a centro unius per contactum ducta, tranſibit*

tranſibit per centrum alterius. Ejuſmodi enim recta non differet a rectâ per eorum centra ductâ, quæ per haſce propp. 11 & 12. tranſibit per contactum.]

PROPOSITIO XIII.

Circuli & ſeſe mutuò, & lineam rectam punctualiter tangunt. Fig. 16. & 17.

Tangant enim ſe intra (ſi fieri poteſt) duo circuli in parte circumferentiæ CL. Per centra A & B ducta recta (*a*) tranſibit per contactum, puta in C. Ducantur inſuper AL, BL. Quoniam igitur (*b*) BL, BC æquantur, (ſunt enim ex centro B ad peripheriam OLC,) additâ communi AB, erunt AB, BL æquales AC. Sed AC eſt par AL, (ſunt enim ex centro A ad peripheriam QLC. Ergo etiam AB, BL ſunt æquales AL, contra 20. l. 1. Fig. 16. (a) *Per* 11. *l.* 3. (b) *Quia ex centro.*

Tangant ſe deinde exteriùs duo circuli, ſi fieri poteſt, in arcu OL. Recta AP centra A & P jungens (*c*) tranſibit per contactum, puta in O. Ducantur inſuper AL, PL. Erunt igitur duo trianguli latera AL, PL æqualia ipſis, AO, PO, ſeu toti AP. Contra 20. l. 1. Fig. 17. (c) *Per* 12. *l.* 3.

Denique recta BF & circulus ſe tangant, ſi fieri poteſt, in parte aliquâ CE. Ducantur ad centrum rectæ CA, EA. Erunt igitur CA, EA æquales, ac proinde triangulum CAE eſt Iſoſceles. Quare (*d*) anguli ACE, AEC acuti. Ergo perpendicularis ad BF, ducta ex A centro, cadet inter (*e*) C & E, puta in D. Erunt igitur tam AC, quàm AE æquales perpendiculari AD, quod eſt abſurdum, contra Coroll. 14. p. 32. l. 1. Fig. 17. (d) *Per cor.* 11. *p.* 32. *l.* 1. (e) *Per cor.* 3. *p.* 32. *l.* 1.

Corollarium.

Circuli qui habent centra in unâ rectâ, eamque ſecant in eodem puncto B, ſe mutuò in puncto illo B contingunt. Fig. 18.

Cæterùm hæc propoſitio liquet etiam ex notione ipſâ linearum, quæ comparantur. Neque enim aut recta linea & curva circuli peripheria, aut peripheriarum inæqualium diverſæ curvaturæ, aut duæ convexæ, ſecundùm ullam ſui partem poſſunt congruere. Congruerent autem, ſi ſe invicem in totâ parte aliquâ tangerent.

PROPOSITIO XIV.

Fig. 19.

IN circulo æquales rectæ (BC, LF) æqualiter a centro diſtant: & quæ diſtant a centro æqualiter, ſunt æquales.

Ex centro A ducantur AC, AF; item AO, AI ad angulos rectos ipſis BC, FL. Erunt (*a*) BC, FL biſectæ in O & I.

(a) Per 3. l. 3.

Cùm ergo totæ BC, FL ponantur æquales, etiam dimidiæ OC, IF, adeoque & (*b*) quadrata ipſarum æquantur. Jam verò quad. AC (*c*) æquale eſt quadratis OC, OA: & quadratum AF æquatur quadratis IF, IA. Cùm igitur quadrata AC, AF (*d*) æqualia ſint, etiam duo quadrata OC, OA, duobus IF, IA æqualia erunt. Ablatis igitur quadratis OC, IF (quæ ante oſtenſa ſunt æqualia,) quæ remanent, quad. OA, IA, æqualia erunt. Ergo etiam perpendiculares OA, IA ſunt (*e*) æquales. Ergo BC, FL æquales, à centro diſtant (*f*) æqualiter. Quod erat primum.

(b) Per axio. 15. (c) Per 47. l. 1. (d) Per def. circuli & axio. 15. (e) Per axio. 15. (f) Per def. 4. l. 3.

E converſo, ſi diſtantiæ OA, IA ponantur æquales, tunc ablatis quadratis rectarum æqualium OA, IA, eodem diſcurſu oſtendetur quadrata reliqua OC, IF fore æqualia, ac proinde & rectas OC, IF æquales eſſe, quæ cùm ſint (*g*) ſemiſſes rectarum BC, FL, etiam illæ æquales erunt. Quod erat alterum.

(g) Per 3. l. 3.

PROPOSITIO XV.

Fig. 20.

RECtarum circulo inſcriptarum maxima eſt diameter. Cæterarum ea major, quæ centro propior.

Sit quævis RS alia a diametro FL. Ex centro duc AR, AS. Duæ AR, AS æquantur diametro FL, & ſunt (*h*) majores quàm RS. Ergo, &c.

(h) Per 20. l. 1.

Sit deinde BI propior centro quàm XZ. Ex centro ad illas duc perpendiculares AC, AQ. Erit AQ (*i*) major quàm AC. Accipe ergo AO parem AC, & per O duc RS perpendicularem ad AO, quæ (*k*) par erit BI; junganturque AR, AS, AX, AZ. Quia igitur A centrum eſt, erunt latera AR, AS æqualia lateribus AX, AZ. Angulus autem RAS, major eſt angulo XAZ. Ergo baſis RS, hoc eſt BI major (*l*) eſt baſi XZ. Quod erat demonſtrandum.

(i) Per def. 4. l. 3. (k) Per præc. (l) Per 24. l. 1.

PRO-

PROPOSITIO XVI.

Recta (IF) quæ per (B) extremitatem diametri (CB) perpendicularis eſt, tota cadit extra circulum, eumque tangit (in B:) Neque inter ipſam & circulum alia recta ad contactum (B) duci poteſt, quin circulum ſecet. Fig. 22.

Pars 1. Accipiatur in rectâ IBF quodvis punctum L, ad quod ex centro A duc rectam AL. In trigono LAB, quoniam angulus ABL rectus eſt per hyp. erit ALB (a) acutus. Ergo AL oppoſita majori angulo ABL, major eſt (b) quàm AB, quæ minori ALB opponitur. Sed AB tantùm pertingit ad circumferentiam. Ergo AL ultra circumferentiam porrigitur, ac proinde punctum L extra circulum eſt. [*Idem oſtendetur de quovis alio puncto rectæ IF, a* B *diverſo. Quare, cùm recta IF ita circulo occurrat in unico puncto B, ut eum non ſecet,*] Tota igitur IF extra circulum cadit, [*eumque tangit* (c) *in B.*] Quod erat primum.

(a) Per cor. 5. p. 32. l. 1.
(b) Per 19. l. 1.
(c) Per def. 2. l. 3.

Pars 2. Infra BF (ſi fieri poteſt) cadat RB tota extra circulum. Quoniam FBA rectus eſt per hyp. erit RBA acutus, ac proinde AB non eſt perpendicularis ad BR. Ducatur igitur ex A centro ad BR, perpendicularis AO, quæ cadet (d) versùs R, & ſecabit circulum in Q. Igitur AB oppoſita majori angulo, nempe AOB recto, major eſt quàm AO quæ opponitur minori, nempe acuto OBA. Sed AB par eſt AQ: Ergo etiam AQ major eſt quàm AO, pars toto.

(d) Per cor. 3. p. 32. l. 1.

[*Euclides hanc propoſitionem ſic effert:*

1. Recta IF, diametro circuli CB ad rectos angulos ab extremitate ducta, cadit extra circulum: 2. & in locum qui inter rectam lineam FB & circumferentiam QB interjicitur, altera recta linea RB non cadet: 3. & ſemicirculi angulus ABQ major eſt quovis angulo rectilineo acuto; reliquus autem QBF minor.

Partem primam & ſecundam jam demonſtravit Tacquetus; reliquas duas pro paradoxis male fundatis rejecit, haud recte quidem, ut mihi videtur. Si enim dari poſſet angulus quivis rectilineus acutus ABR, (angulo ſcil. recto ABF minor,) qui tamen major eſſet angulo ſemicirculi ABQ; vel ſi quivis angulus rectilineus FBR dari poſſet, inter tangentem FB & circulum QB, ad punctum B conſtitutus; ſequeretur rectam inter tangentem & circulum duci poſſe quæ tamen circulum non ſecet, contra partem ſecundam.]

Corollaria.

Fig. 21. HInc rurſum patet contactum rectæ lineæ & circularis eſſe punctualem.

Fig. 18. 2. Si centris in eâdem lineâ rectâ in infinitum protractâ acceptis, deſcribantur per B infiniti circuli tam minores primo BSC, quàm majores, omnes tangent rectam IF in eodem uno puncto B.

3. Circuli igitur in amplitudinem quacunque datâ majorem excreſcentes, propiùs ſemper ac propiùs in infinitum tangenti appropinquant, nunquam tamen ei præterquam in unico contactûs puncto conjunguntur: quod quamvis evidentiſſimum ſit, eſt tamen revera admirabile.

Fig. 18. 4. Ex his manifeſtum eſt, lineam quamcunque in infinitum eſſe diviſibilem. Ducatur enim ab aliquo diametri puncto ad tangentem recta AQ. Infiniti circuli centra habentes in rectâ BA ſine termino productâ, rectam IF per coroll. 2. hîc, & ſe mutuò per coroll. p. 13. tangunt in uno eodemque puncto B, ac proinde nuſquam vel inter ſe, vel cum rectâ IF conjunguntur præterquam in B. Ergo neceſſe eſt ut rectam AQ dirimant in partes infinitas, hoc eſt, in non tot quin plures.

Fig. 21. 5. Angulum contingentiæ ſeu contactûs LBQ (eum nempe qui tangente & peripheriâ continetur) nulla recta linea poteſt dividere.

Fig. 18. 6. Per circumferentias tamen in eodem puncto tangentes ſecari poteſt ac minui in infinitum. Atque in hoc & tertio corollario latet totum myſterium aſymptoticum, hoc eſt, lineæ rectæ ad Hyperbolam unà ſecum in infinitum productam, accedentis ad intervallum quocunque dato minus, nunquam tamen concurrentis: quod præclare obſervavit & demonſtravit Marius Bettinus noſter in Apiariis, & ante illum Barocius atque Cardanus ex Rabbi Moyſe Narbonenſi, cujus demonſtrationem refert Cardanus de ſubtilitate, lib. 16.

Fig. 18. [*Angulus contactûs (uti vulgo appellatur,) per circumferentias in eodem puncto tangentes non minuitur, utpote qui nullus eſt, vel non quantus, ſeu non angulus. (Vide Walliſ. de angulo contactûs.) Angulus enim (per def. 8. l. 1.) eſt duarum linearum in plano ſe mutuò tangentium, & non in directum jacentium, alterius ad alteram* inclinatio: *recta autem QI circumferentiam unam vel plures in unico puncto B contingens, in ipſo contactûs puncto, (illic enim, ſi quis ſit, exiſtit angulus,) non* inclinatur *ad illas circumferentias, ſed cum iis prorſus coincidit.*

Hoc

Hoc igitur corollarium ſextum, quatenus verum eſt, non differt à tertio. Hinc autem ſequitur

7. *Angulum ſemicirculi AB𝔔 eſſe angulo recto rectilineo ABF æqualem. Si enim locus iſte 𝔔BF qui inter circulum & tangentem interjicitur, ad punctum B ſit non-angulus, ſive non-quantus; eo igitur ab ABF ablato, angulus rectus non minuitur; ac proinde angulus ſemicirculi AB𝔔 adhuc manet rectus.* Fig. 22.

Cæterum quæſtionem in Scholio ſubſequente agitatam, longe accuratiùs tractat Celeberr. Walliſius, Operum Mathematicorum volum. 2do, (in ſuâ de angulo contactûs & ſemicirculi *diſquiſitione Geometricâ, pag. 605—630, ejuſque defenſione, pag. 631—664.) quò itaque lector qui hiſce oblectatur eſt remittendus. Tyrones interim, omiſſo hoc Scholio, ad prop. 17. & ſeqq. cum aliquo temporis operæque compendio tranſibunt.*]

Scholium.

Demonſtratur & ſolvitur fallacia paradoxorum, quæ ex angulo contactûs deduci ſolent.

Atque hæc quidem ex 16. prop. hactenus deducta, & mira & certa ſunt. Quæ verò deduci ex eâdem ſolent præterea, omnem captum humanæ mentis excedunt. Quare ſuſpicari aliquando cœpi latere hic aliquid, cujus ignoratio ſubtilibus etiam ingeniis illuderet, & paradoxis illis immanibus aſſerendis anſam præberet. Et plane, quod ſuſpicatus ſum, ita ſe habere, mihi tandem videor deprehendiſſe. Paradoxa quæ ex 16. inferri ſolent; ex aliis multis, hæc fere præcipua ſunt.

1. Angulus contingentiæ (OAC) omni acuto minor eſt. Acutus eſto PAC. Ab hoc auferri poteſt dimidius, & a reſiduo iterum dimidius, & ſic deinceps ſine termino. Quo pacto acutus fiet quocunque dato minor. Quamtumvis enim in infinitum minuatur, ſemper tamen reſidui anguli, exempli gr. anguli QAC latus unum QA (*a*) intra circulum cadet, ac proinde angulus contactûs OAC intra acutum continebitur, ejuſque pars erit, ideoque illo minor. Fig. 22. (a) Per 16. l. 3.

2. Angulus ſemicirculi (BAO) licèt recto minor ſit, eſt omni acuto major. Quia ob eandem cauſam, acutus quantumvis magnus BAQ, intra ſemicirculi angulum BAO comprehenditur.

Hæc duo in ipſo textu propoſitionis inferuntur. Quamvis nonnulli dubitent, Euclidis ea ſint, an ab aliquo adjecta. Apollonius, certè magnus Geometra, cùm eandem affectio-

nem in ellipſi, hyperbolâ & parabolâ demonſtrat, has illationes prætermittit.

3. Angulus rectus CAB (imo acutus quicunque CAQ) continet infinitos æquales angulos contactûs; ac proinde infinities illo eſt major. Nam angulus CAB dividi poteſt in acutos infinitos minores ſemper & minores, quorum nihilominus ſinguli ſunt majores (*a*) angulo contactûs OAC.

(a) *Per paradox.* 1.

4. Angulus contactûs CAO eſt vera pars anguli recti CAB, eundem quippe unà cum ſemicirculi angulo OAB conſtituit: nequit tamen ullâ ſui multiplicatione ſuum totum adæquare: ac proinde hîc infinita æqualia ſibi addita non efficiunt infinitum.

5. Tranſitur a minori ad majus & per omnia media, neque tamen per æquale: ſive datur majus aliquo, & datur eodem minus, neque tamen datur eidem æquale. Nam ſi recta AB, fixo manente puncto A, moveatur, donec congruat cum tangente, deſcribet acutos angulos BAP, BAQ, & omnes alios poſſibiles, qui quamvis ſemper augeantur ſemper tamen erunt minores (*b*) ſemicirculi angulo BAO, quamprimum verò AB congruet tangenti CA, immediate habetur rectus CAB major angulo ſemicirculi.

(b) *Per paradox.* 2.

Hæc & plura alia ex hac 16. propoſitione deduci ſolent: quæ profectò, ſi ita, ut proponuntur, ſeſe habeant; meritò incomprehenſibilia videri poſſent. Peletarius, ut his paradoxis ſe expediat, negat angulum contactûs eſſe quantum. Rem confecerat, ſi dixiſſet nullum angulum eſſe quantum. Sed is vehementer errat, cùm inde infert omnes ſemicirculi angulos eſſe æquales, quod plane non inferret, ſi intelligeret, quod de contactûs angulo aſſeverat, omnibus angulis convenire. Neque tamen Clavio noſtro in ſuâ illâ adverſùs Peletarium apologeticâ diſputatione aſſentior. Meâ quidem ſententiâ uterque fallitur, hic dum omnes omnino angulos eſſe putat quantitatem; ille dum omnes præter angulum contingentiæ. Alii ſe exiſtimant hac unâ reſponſione omnes difficultates ſolvere, ſi dicant, curvilineos angulos & rectilineos eſſe incomparabiles. Rogati verò, cur ſint incomparabiles, reſpondent, quia angulus contactûs quantumcumque multiplicatus, nunquam poteſt æquare rectum vel acutum.

Atqui hoc eſt paradoxum omnium maximum, cujus explicatio petebatur, quî nimirum fieri poſſit, ut angulus contactûs anguli recti pars ſit, & tamen quotieſcumque multiplicatus eundem ſuperare nequeat. Reſpondent angulum contactûs non eſſe partem recti, quia eum non poteſt adæquare. At paradoxorum aſſertores replicant, hinc ſolùm ſequi non eſſe partem recti aliquotam: veram tamen eſſe

partem,

partem, eo quòd cum ſemicirculi angulo rectum componat. Unde qui hac viâ difficultates propoſitas volebant diſſolvere, debuerant oſtendere angulum contactûs nullo ſenſu partem eſſe rectilinei anguli, neque addito ſibi ſemicirculi angulo rectum componere: id quod facturi deinceps nos ſumus.

Mihi videtur res omnis ex Euclideâ definitione anguli pendere. Hæc enim, ſi penitiùs expendatur, manifeſtè docet nullum angulum eſſe quantum, quo uno errore ſublato, paradoxa omnia evaneſcunt. Sentio igitur: *Def. 8. l. 1.*

1. Nullus angulus eſt quantitas, ſed modus quantitatis. Sic enim habet definitio 8. l. 1. Angulus planus eſt duarum linearum &c. alterius ad alteram inclinatio. Atqui linearum inclinatio non eſt quantitas, ſed modus quantitatis. Cùm enim curvitas non ſit quantitas; cur inclinatio ſit, quæ ab illâ non magis differt, quàm inflexio & fractio? Deinde; Si angulus eſſet quantus, foret vel linea, vel ſuperficiês, vel corpus. Non eſſe lineam, aut corpus patet. Sed neque ſuperficies eſt: ea enim, ablatione partium C, B, minuitur; non angulus. Neque poteſt dici angulum eſſe ſuperficiem indeterminatam, cùm angulus quilibet determinatus ſit. *Fig. 23.*

2. Quoniam anguli non ſunt quantitas, ſed modus quantitatis, eorum inter ſe comparatorum relatio non eſt æqualitas & inæqualitas, ſed ſimilitudo & diſſimilitudo.

3. Cùm igitur anguli inter ſe comparati æquales dicantur aut inæquales, non aliud intelligi poteſt, quàm eos ſimiles eſſe inter ſe aut diſſimiles. Maluit tamen Euclides æquales & inæquales dicere, ob multas horum terminorum in angulis rectilineis commoditates. Quem proinde loquendi modum etiam nos retinebimus.

4. Similes porro anguli ſunt, quorum ambo latera ſuperimpoſita congruunt; diſſimiles, quorum non congruunt latera. Angulus enim nihil eſt aliud, quàm inclinatio linearum, alterius ad alteram. Ergo ſimiles anguli ſunt inclinationes linearum ſimiles. Non ſunt autem inclinationes linearum ſimiles, niſi ambæ ſibi mutuò impoſitæ congruant. Ergo ſimiles anguli ſunt, quorum congruunt latera; diſſimiles, quorum non congruunt.

5. Itaque manifeſtum eſt, nullum angulum curvilineum, æqualem dari poſſe ulli angulo rectilineo. Nam æqualitas angulorum non aliud eſt quàm ſimilitudo, per concluſ. 2. & 3. Similitudo angulorum eſt ſola laterum congruentia, per concluſion. 4. Laterum congruentia haberi nequit, dum angulus curvilineus imponitur rectilineo. Ergo &c. Errat igitur Proclus, dum deſcriptis æqualibus ſemicirculis, ita ratioci-

Fig. 24. tiocinatur: æqualium ſemicirculorum anguli EAD, CAB æquales ſunt. Ergo ſi his addatur communis angulus CAD erit angulus EAC curvilineus æqualis rectilineo DAB. Fallitne ergo axioma, ſi æqualibus addas vel demas æqualia, tota, vel reliqua erunt æqualia? Nequaquam: hoc enim ad res quantas ſolùm pertinet: anguli porro quanti non ſunt. Axioma ut in angulis valeat, ita formari ac intelligi debet. Similes anguli, ſi apponantur ſimilibus angulis, ſimiliterque poſitis; qui tum orientur, erunt ſimiles. At Proclus comparat angulos ſimiles quidem: ſed communis, qui utriſque additur, cùm ab unâ parte habeat latus rectum, ab alterâ curvum, diſſimiliter utriſque additur.

6. Quare cùm tota eſſentia anguli ſit linearum ſe tangentium inclinatio, non erit unus angulus pars alterius; una ſiquidem inclinatio pars alterius inclinationis non eſt: neque angulus auferri ab angulo poterit; inclinatio ſiquidem una auferri nequit ab alterâ, &c. Hæc enim non laterum inclinationibus, quæ quantitas non ſunt, ſed ſuperficiebus inter latera conſtitutis conveniunt.

7. Poſtremò ex jam dictis colligemus, quomodo intelligi debeant illæ locutionum formæ, quibus Geometræ paſſim, atque ipſe inprimis Euclides, utuntur, cùm angulos ſecari, augeri, imminui, alterum alterius duplum, triplum, aliaque ſimilia aſſerunt. Hæc ſane exiſtimabimus eos non propriè, ſed analogicè tantùm angulis tribuere; itaque eos loqui voluiſſe, quòd id commodius, & expeditius eſſet, neque tamen obnoxium periculo, modò in angulis rectilineis maneatur.

Fig. 25. Angulum itaque dividi rectâ DA, non aliud erit, quàm inter latera EA, CA aliam interponi lineam, quæ novas duas cum utroque latere inclinationes, hoc eſt duos novos angulos efficiat. Angulum verò EAC eſſe duplum anguli EAD, nihil rurſum aliud erit, quàm inter lineas rectas EA, CA, aliam interponi, quæ ad utramque ſimiliter inclinetur; unde fiat ut rectæ EA, DA rectis CA, DA, inclinationibus non mutatis, impoſitæ congruant. Quod ſi ita ratiocinentur: (Angulus EAD eſt æqualis angulo ILQ, & DAC eſt æqualis QLR; ergo totus EAC toti ILR æqualis eſt:) idem erit, ac ſi dicatur; Inclinatio rectarum EAD ſimilis, ſeu eadem, eſt inclinationi rectarum ILQ; & inclinatio rectarum DAC ſimilis eſt inclinationi rectarum QLR: Ergo etiam inclinatio rectarum EAC ſimilis erit inclinationi rectarum ILR. Vel certè (quod recidet in idem, ex aſſertione 4. ſupra) collectionem illam ſic intellige: latera EAD congruunt lateribus ILQ; & latera DAC congruunt lateribus QLR: Ergo latera quoque EAC congruunt lateribus

Fig. 25. & 26.

ribus ILR. Quæ quidem conſecutio æque clara eſt, atque ſi æqualibus addas æqualia, tota æqualia eſſe. Ad eum modum locutiones cæteras, quæ, cùm ſint quantis propriæ, ad angulos transferuntur, facile, veritate theorematum ubique ſalvâ, interpretabimur.

His ita conſtitutis, facile paradoxa angularia diſſolvemus; quæ ſane non aliunde enata ſunt, quàm quòd angulos eodem, quo cæteras quantitates, habuerint loco. Ut igitur ſimul omnia expediam; Dico paradoxa illa, ſi in proprio verborum ſenſu accipiantur, ad unum omnia eſſe falſa. Sic enim accepta non convenient niſi quanto: anguli autem quanti non ſunt, ut jam oſtendimus.

Itaque angulus contactûs neque minor eſt quovis acuto, neque pars eſt anguli rectilinei, neque in rectilineo continetur infinities, imo ne ſemel quidem; nihil enim horum, linearum inclinationi poteſt competere, quæ tota anguli eſſentia eſt. Si verò non propriè, ſed analogicè accipiantur, jam nihil continent, quod a communi ſenſu ac ratione alienum ſit. Sic enim, angulum contactûs OAC eſſe minorem quovis acuto, & ſemicirculi angulum OAB acuto omni majorem, non aliud ſignificabit, quàm infra tangentem CA, nullam poſſe duci rectam ád contactum, quin ſecet peripheriam. Quæ quidem circuli proprietas eſt omnino digna, quam homines admirentur, eſt tamen ejuſmodi quam poſſimus intelligere, & quæ nihil cum ratione pugnans involvat. Non alius paradoxi tertii, quarti & quinti ſenſus erit. Atque ita unius Euclideæ definitionis ductu, ritè perſpectâ naturâ anguli, omnes immanium paradoxorum tenebræ evaneſcunt. *Fig. 22.*

PROPOSITIO XVII.

A *Puncto dato (B) rectam ducere, quæ datum circulum (OQ) tangat.* *Fig. 27.*

Ex A dati circuli centro ducatur ad datum punctum B recta AB, ſecans peripheriam in O. Centro A deſcribe per B alium circulum, BC, & ex O duc OC perpendicularem ad AB, quæ occurrat circulo BC in C. Duc CA, occurrentem circulo OQ in I. Ex B ad I ducta recta tanget circulum OQ.

Quia latera BA, IA æquantur lateribus CA, OA, angulúſque A communis eſt in trigonis IAB, OAC, etiam (*a*) anguli AOC, AIB æquales ſunt. Sed (*b*) AOC rectus eſt. Ergo etiam rectus eſt AIB. Ergo BI (*c*) tangit in I.

(a) *Per* 4. *l.* 1.
(b) *Per conſtr.*
(c) *Per* 16. *l.* 3.

Scho-

Scholium.

Fig. 28. EX 31. ſeq. pulchrè ex dato punĉto (O) ducitur tangens circulum datum (BQ.)

Centrum A & datum punĉtum O jungens reĉta biſecetur in P. Tum centro P, per A & O deſcribe circulum occurrentem dato in B. Reĉta OB tanget.

Nam junĉtâ AB, angulus ABO in ſemicirculo reĉtus eſt, per 31. ergo per 16. OB tangit circulum BQ.

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 29. *SI circulum tangat reĉta linea (CL,) quæ ex centro (A) ad contaĉtum (B) ducitur, tangenti perpendicularis eſt.*

Si negas, ſit ex A centro perpendicularis, alia quædam recta AF: (a) ſecabit ea circulum in O. Quia ergo angulus AFB reĉtus ponitur, erit (b) ABF acutus. Ergo AB, (hoc eſt AO) major (c) quàm AF, pars toto.

(a) Per 1. part. p. 16. l. 1. (b) Per cor. 5. p. 32. l. 1. (c) Per 19 l. 1.

PROPOSITIO XIX.

Fig. 30. *SI reĉta (BC) circulum tangat, & ex contaĉtu (A) tangenti perpendicularis excitetur (AI,) erit in eâ centrum.*

Si negas, ſit centrum extra AI in Z, & ab eo ad contaĉtum ducatur ZA. Erit (d) angulus ZAC reĉtus, ac proinde par angulo IAC, per hypoth. reĉto; hoc eſt, pars toti.

(d) Per præc.

PROPOSITIO XX.

Fig. 31. 32. 33. *ANgulus ad centrum (BAC) duplus eſt anguli (BCF) ad peripheriam; cùm idem arcus (BC) eſt baſis angulorum.*

Fig. 31. Triplex eſt caſus. In primo, latera BA, BF coincidunt. Tum verò quia AF, AC ex centro duĉtæ æquantur, duĉtâ FC, erunt in triangulo Z anguli F & C (e) æquales. Sed

(e) Per 5. l. 1.

Sed BAC (*a*) æqualis eſt duobus F & C. Ergo BAC duplus eſt unius F. (a) Per. 32. l. 1.

In caſu ſecundo BA, CA cadunt intra BF, CF. Tum verò ducta FAX, per caſum primum XAB eſt duplus XFB, & XAC duplus XFC. (*b*) Ergo totus BAC duplus eſt totius BFC. Fig. 32. (b) Per 12. l. 5. quæ à hac non dependet.

[*Sit XAB angulus graduum 6:* (c) *erit angulus XFB graduum 3. Sit porro ang. XAC. gr. 4:* (d) *erit XFC gr. 2. Ergo XAB + XAC erit gr. 6. + 4 = gr. 10 = BAC; & XFB + XFC gr. 3 + 2 = gr. 5. = BFC. Denarius autem graduum numerus eſt quinarii duplus: ergo & angulus BAC duplus eſt anguli BFC.*] (c) Per caſ. 1. (d) Per eund.

In tertio caſu BF ſecat AC, & anguli BAC, BFC ſunt extra invicem. Ducatur FAL. Per caſum 1. totus LAC duplus eſt totius LFC, & ablatus LAB duplus eſt ablati LFB. Ergo (*e*) & reliquus BAC duplus eſt reliqui BFC. Quod erat demonſtrandum. Fig. 33. (e) Per 19. l. 5. quæ à hac non dependet.

[*Sit LAC gr. 12, LAB gr. 2.* (f) *Erunt LFC gr. 6. LFB gr. 1. Ergo LAC — LAB = gr. 12 — 2 = gr. 10. = BAC; & LFC — LFB = gr. 6. — 1 = gr. 5. = BFC. Ergo angulus BAC duplus eſt anguli BFC.*] (f) Per caſ. 1.

PROPOSITIO XXI.

Anguli (BQC, BFC,) qui in circulo inſiſtunt eidem arcui (BOC,) ſive qui in eodem ſegmento (BQSC) exiſtunt, inter ſe omnes ſunt æquales. Fig. 34.

Sit primò ſegmentum BQSC majus ſemicirculo. Ex centro A duc AB, AC. Per præced. angulus BAC ad centrum, duplus eſt ſingulorum BQC, BFC. Ergo omnes BQC, BFC ſunt (*g*) æquales. Quod erat demonſtrandum. Fig. 34. (g) Per axio. 6.

Sit deinde ſegmentum BQC æquale aut minus ſemicirculo. In triangulis BQI & CFI, quia anguli ad verticem I oppoſiti, (*h*) æquales ſunt, etiam ſumma reliquorum Q & R ſummæ reliquorum F & O (*i*) æqualis erit. Quare ſi ab his æqualibus ſummis auferantur anguli R & O qui per primam partem æquales ſunt, utpote eidem arcui QF inſiſtentes, qui remanent Q, F, æquales erunt. Quod erat demonſtrandum. Fig. 35. (h) Per 15. l. 1. (i) Per cor. 1. 9. p. 32. l. 1.

Coroll. *Hinc colligunt Optici lineam quamvis BC oculo ubivis in circuli, cujus chorda eſt, circumferentiâ poſito ejuſdem* Fig. 34. vel 35.

 magnitu-

magnitudinis apparere; quia ſcilicet ſub angulo æquali BQC ubique apparet.

Fig. 34. [Scholium. Si ſuper arcu BOC inſiſtant duo æquales anguli, quorum alter BFC ad peripheriam arcui BOC oppoſitam exiſtat: Erit uterque angulus ad eandem peripheriam ipſi BOC oppoſitam; hoc eſt, angulus ipſi BFC æqualis, neque citra, neque ultra peripheriam cadet. Cadat enim, ſi fieri poteſt, citra peripheriam ad punctum I intra circulum, angulus BIC æqualis angulo BFC ad peripheriam exiſtenti; & producatur IC donec occurrat peripheriæ in Q, & ducatur BQ. Anguli BQC, BFC in eodem ſegmento exiſtentes, per hanc prop. erunt æquales: Sed & BIC, BFC æquales eſſe ſupponuntur; Ergo BIC (externus angulus trianguli BIQ) æqualis eſt uni internorum oppoſitorum, nempe angulo BQI, contra cor. 1, pr. 32. l. 1. Non igitur cadit intra circulum vel citra peripheriam angulus angulo BFC æqualis. Sed neque extra circulum, vel ultra peripheriam: ſi enim extra, ut in E cadere ſupponatur; a puncto Q ubi recta CE peripheriam ſecat, ducatur recta QB: erit ut prius, angulus BQC (a) angulo BFC, ac proinde (b) angulo BEC æqualis; rurſum contra idem corollarium, cum BQC ſit angulus externus, & BEQ unus internorum oppoſitorum trianguli BQE. Cum igitur angulus ipſi BFC ad peripheriam exiſtenti æqualis, neque cadat ultra peripheriam neque citra, erit angulus ad peripheriam. Q. E. D.

(a) Per hanc prop.
(b) Per hypoth.

Fig. 35. Eodem modo, ſi ſegmentum BQFC ſit ſemicirculo æquale, vel minus, oſtendetur angulum angulo BFC æqualem, neque citra, neque ultra peripheriam BQFC cadere.]

PROPOSITIO XXII.

Fig. 36. *Quadrilateri circulo inſcripti (ABCF) oppoſiti anguli duos rectos conficiunt.*

Ducantur BF, CA. Angulus ABC, cum duobus O & X facit (c) duos rectos. Sed O eſt (d) æqualis I, quia inſiſtunt eidem arcui BC; & X (e) eſt æqualis Z, quia inſiſtunt eidem arcui AB. Ergo ABC, cum duobus etiam, I, Z, hoc eſt, cum toto oppoſito angulo AFC, facit duos rectos. Quod erat demonſtrandum. [*Et pari modo oſtendetur angulos oppoſitos BAF, BCF duobus rectis æquales eſſe.*]

(c) Per 32. l. 1.
(d) Per 21. l. 3.
(e) Per eand.

Coroll. (1.) *Hinc ſi unum latus quadrilateri in circulo deſcripti producatur, erit angulus externus æqualis angulo quadrilateri oppoſito: internus enim utrivis additus duos rectos angulos* (f) *conficit.*

(f) Per hanc, & 13. l. 1.

(2.) Item

(2.) *Item circa Rhombum aut Rhomboidem circulus deſcribi nequit; quia adverſi ejus anguli vel cedunt duobus rectis, vel eos excedunt.*

PROPOSITIONES XXIII. XXIV.

NOn ſunt neceſſaria: & agitur de ſegmentis ſimilibus, quæ non poſſunt ſine proportionibus rectè definiri. [Si quis tamen has propoſitiones deſideret, inter corollaria ad prop. ult. lib. 6. eas inveniet.]

PROPOSITIO XXV.

DAtum arcum (ABC) perficere. Fig. 37.

Subtendantur utcunque duæ rectæ AB, CB, quas biſeca in I & L. Ex I & L duc perpendiculares ſibi occurrentes in puncto O. Hoc erit centrum circuli, cujus portio eſt arcus ABC.

Nam (a) centrum eſt & in rectâ IX, & in rectâ LZ. Ergo in communi ipſis puncto O. (a) Per cor. p. 1 l. 3.

Praxis. Centro B ſumpto in arcu, deſcribe circulum; eodemque intervallo, aliis in arcu centris, deſcribe duos alios circulos quorum ſinguli priorem bis ſecent. Per interſectiones ductæ rectæ ſibi mutuò occurrentes in O (b) dabunt centrum. Fig. 37. (b) Per prax. pr. 10. l. 1. & cor. pr. 1. l. 3.

PROPOSITIO XXVI. & XXVII.

IN circulis æqualibus, [vel in uno eodemque circulo,] *rectæ æquales (CE, FI) ſubtendunt arcus æquales; & ſi arcus ſunt æquales, etiam ſubtenſæ æquales erunt.* Fig. 38.

Pars 1. Ad centra A & B ducantur CA, EA, FB, IB. [*Rectæ illæ erunt ſibi mutuò* (c) *æquales, utpote quæ ſint ejuſdem circuli, vel æqualium circulorum radii.*] Quia triangula CAE, FBI ſibi mutuò æquilatera ſunt, etiam erunt ſibi mutuò (d) æquiangula. Ergo cùm circuli ſibi mutuò imponentur, triangulum FBI congruere poterit triangulo CAE, (c) Per axio. 15. (d) Per 8. l. 1.

ac proinde centrum B incidet in centrum A, & puncta F, I in puncta C, E. Cùm igitur circuli ſint æquales, etiam arcus FLI neceſſariò congruet arcui CQE, & arcus FOI arcui CSE, ac proinde æquales (*a*) erunt etiam ipſi.

(a) *Per axio.* 7.

Pars 2. Quoniam circulorum æqualium arcus FLI, CQE ponuntur æquales, ſibi mutuò impoſiti (*b*) congruent, punctaque F, I incident in puncta C, E. Ergo & ſubtenſa FI congruet ſubtenſæ CE. Ergo FI, CE (*c*) æquales ſunt.

(b) *Per axio.* 8. (c) *Per axio.* 7.

[Coroll. *In circulis æqualibus, vel in eodem, rectæ inæquales ſubtendunt arcus inæquales, major majorem, minor minorem; & ſi arcus fuerint inæquales, etiam ſubtenſæ inæquales erunt.*].

PROPOSITIO XXVIII. & XXIX.

Fig. 39.

SI in circulis æqualibus, [vel in eodem,] *anguli ſive ad centra (BAC, FLI) ſive ad ambitum (BOC, FSI) ſint æquales; etiam arcus (BXC, FZI,) quibus inſiſtunt, ſunt æquales: & ſi arcus ſunt æquales, etiam anguli æquales erunt.*

Pars 1. Quoniam latera AB, AC (*d*) æquantur LF, LI (ſunt enim æqualium circulorum ſemidiametri,) & anguli A, L ponuntur æquales; erunt baſes (*e*) BC, FI æquales. Ergo arcus BXC, FZI etiam (*f*) æquales ſunt.

Ponantur jam anguli BOC, FSI ad ambitum æquales. Quia igitur (*g*) horum dupli ſunt BAC, FLI; etiam illi æquales erunt, ac proinde; ut jam oſtenſum, etiam arcus BXC, FZI ſunt æquales.

Pars 2. Ex æqualitate arcuum BXC, FZI habetur per 27. æqualitas ſubtenſarum BC, FI. Ergo quia etiam BA, AC (*h*) æquantur ipſis FL, LI, erunt (*i*) anguli A & L ad centrum æquales: & quia (*k*) anguli O & S horum dimidii ſunt, erunt etiam ipſi æquales.

(d) *Per axio.* 15. (e) *Per* 4. *l.* 1. (f) *Per* 26. *l.* 3. (g) *Per* 20. *l.* 3. (h) *Per axio.* 15. (i) *Per* 8. *l.* 1. (k) *Per* 20. *l.* 3.

Fig. 40.

[Coroll. *Linea recta EF, quæ in A medio puncto peripheriæ alicujus BC circulum tangit, parallela eſt rectæ lineæ BC quæ peripheriam illam ſubtendit. Duc enim e centro D ad contactum A rectam DA, & connecte DB, DC. In triangulis BDG, CDG, latus DG commune eſt, & DB æquale DC, atque angulus BDA æqualis angulo GDA (ob arcus BA, CA æquales.) Ergo anguli* (l) *DGB, DGC æquales, & proinde recti ſunt. Sed interni anguli* (m) *GAE, GAF etiam recti ſunt. Ergo* (n) *BC, EF ſunt parallelæ. Q.E.D.*]

(l) *Per* 4. *l.* 1. (m) *Per* 18. *l.* 3. (n) *Per* 29. *l.* 1.

PRO-

PROPOSITIO XXX.

D*Atum arcum (ABC) biſecare.* *Fig.* 41.

Duc AC, quam biſeca in O. Ex O perpendicularem duc OB, occurrentem arcui in B. Dico factum.

Jungantur enim AB, CB. Latera AO, OB per conſtr. æquantur lateribus CO, OB; & anguli ad O ſunt æquales, quia recti. Ergo baſes AB, BC (*a*) æquales. Ergo etiam (*b*) æquantur arcus AB, CB. (a) *Per* 4. *l.* 1. (b) *Per* 26. *l.* 3.

Praxis. Centris A & C deſcribe pari intervallo arcus ſe ſecantes in punctis F & I, per quæ, ducta recta arcum ABC (*c*) biſecabit. *Fig.* 41. (c) *Per hanc & praxin. pr.* 10. *l.* 1.

[Cor. *Hinc ſequitur, dimidium chordæ arcum quemvis ſubtendentis, eſſe ſemiſſis arcûs iſtius ſinum rectum; & vice verſâ, ſinum rectum duplicatum, chordam eſſe dupli arcûs. Huic omnino ſimile eſt cor* 1. *p.* 3. *priùs, de chordâ angulum ad centrum ſubtendente.*]

PROPOSITIO XXXI.

A*Ngulus (BCF) in ſemicirculo, rectus eſt: in ſegmento majore minor recto; in ſegmento minore recto major.* [Item angulus mixtilineus ſegmenti majoris eſt major recto, & angulus mixtilineus ſegmenti minoris eſt minor recto.] *Fig.* 42. 43.

Pars 1. Ex centro A duc AC. Quia æquales ſunt AB, AC, anguli O, B (*d*) æquales erunt. Ob eandem cauſam æquales erunt I, F. Ergo totus BCF utrique B & F æqualis eſt. Cùm igitur (*e*) tres ſimul conficiant duos rectos; ſemiſſis trium, angulus BCF, unus rectus eſt. *Fig.* 42. (d) *Per* 5. *l.* 1. (e) *Per* 32. *l.* 1.

Pars 2. Sit ſegmentum LOBF ſemicirculo LOB majus, in eoque FOL angulus, & ducatur OB. Angulus FOL minor eſt angulo BOL, qui per 1. partem rectus eſt. Ergo &c. *Fig.* 43.

Pars 3. Eſto ſegmentum LOX ſemicirculo LOB minus, in eoque angulus XOL. Erit hic major quàm BOL, qui rectus eſt. Ergo &c. *Fig.* 43.

Fig. 42. [*Pars 4. Sit recta BC communis ſegmentorum inæqualium baſis: Erit angulus mixtilineus ſegmenti majoris BCF, rectâ BC & arcu CF comprehenſus, angulo recto major. Ducatur enim diameter BF, & junctâ FC, erit angulus rectilineus BCF rectus per primam partem, & proinde angulus mixtilineus BCF, rectâ BC & arcu CF comprehenſus, erit recto major. Producatur FC ad E, & angulus BCE rectus erit* (a), *ac proinde angulus mixtilineus BCD ſegmenti minoris erit recto minor. Q. E. D.*

(a) Per def. 14. l. 1.

Quartam hanc propoſitionis 31. *partem, ejuſque demonſtrationem a Tacqueto omiſſas, ex Euclide reſtituendas duximus.*

Fig. 2. Corollarium (1.) *Hinc Examen Normæ, num exacte rectangula ſit inſtituitur. In circulo enim quocunque, poſito ad circumferentiæ punctum quodcunque Q Normæ vertice, ſi latera per diametri extrema D & E tranſeunt, angulus eſt rectus; Sin minùs, haudquaquam.*

Fig. 2. (2.) [*Si norma latera ad puncta D & E continuò adjuncta teneantur, interea dum angulus utrinque circumagatur, Vertex anguli Q deſcribet circumferentiam circuli cujus diameter eſt linea DE.*]

Fig. 42. (3.) *Hinc ab extremâ lineâ perpendicularem excitare diſcimus. Sit BC linea à cujus puncto C perpendicularem oporteat excitare. A puncto quovis A tanquam centro deſcribatur circulus, per punctum C tranſiens; & lineam BC interſecans in puncto B. Ductâ diametro BF, & rectâ CF, liquet lineam CF eſſe lineæ BC normalem. Q. E. F.*

[(4.) *In Triangulo rectangulo BCF, ſi hypotenuſa BF biſecetur in A, recta AC ſecabit triangulum in duo triangula æquicrura ACB, ACF: Et circulus centro A per B deſcriptus tranſibit per C, anguli recti verticem.*

(5.) *Cùm angulus mixtilineus ſegmenti majoris, ſit angulo recto rectilineo* (b) *major, angulus autem mixtilineus ſegmenti minoris, ſit angulo recto rectilineo minor; ergo angulus mixtilineus ſemicirculi erit angulo recto rectilineo æqualis: id quod etiam antea* (c) *ex alio principio demonſtravimus.*]

(b) Per part. 4. hujus.

(c) Vide cor. 7. p. 16. l. 3.

PROPOSITIO XXXII.

Fig. 44. & 45. SI *recta (CF) circulum tangat, & alia ex contactu ducta (AB) eundem ſecet, erit angulus a tangente & ſecante factus, par angulo, qui fit in ſegmento alterno.*

Nimi-

Nimirum angulus C A B erit par angulo L, qui fit in ſeg- *Fig.* 45.
mento ALQB; & angulus FAB par angulo O, qui fit in ſegmento AOB.

Tranſeat primò ſecans A B per centrum. Per 18. C A B *Fig.* 44.
rectus eſt. Et per 31. rectus eſt L. Ergo C A B & L æquales ſunt.

Tranſeat deinde ſecans A B non per centrum. Ducatur *Fig.* 45.
igitur per centrum recta AQ. & jungatur BQ. Quia A B Q
in ſemicirculo rectus eſt, faciet BQA cum BAQ (*a*) rec- (a) *Per*
tum unum. Sed etiam C A Q rectus (*b*) eſt. Ergo B Q A *cor.* 6. *p.*
cum B A Q æquatur CAQ. Ablato igitur communi B A Q, 32. *l.* 1.
erit B Q A (hoc (*c*) eſt L) æqualis C A B. Quod erat (b) *Per*
primum. 18. *l.* 3.

(c) *Per*
Deinde (*d*) FAB, CAB faciunt duos rectos; & in quadri- 21. *l.* 3.
latero BOAL, anguli (*e*) oppoſiti L & O etiam faciunt duos (d) *Per* 13.
rectos. Ergo duo FAB, CAB æquantur duobus ſimul O & *l.* 1.
L. Ablatis ergo hinc quidem C A B inde L, quos jam oſten- (e) *Per* 22.
di æquales, erunt æquales reliqui F A B & O. Quod erat *l.* 3.
alterum.

PROPOSITIO XXXIII.

Super datâ rectâ (BC) ſegmentum circuli conſtruere, capiens angulum dato parem. *Fig.* 46.

Si detur angulus acutus A B F, ex B duc B L perpendicularem ad AB, & ad terminum C datæ rectæ B C, fac angulo
CBL parem (*f*) B C I, cujus latus ſecabit BI. in I. Centro (f) *Per* 23.
I per B deſcribe circulum; hic tranſibit per C, (quia ob *l.* 1.
æqualitatem angulorum ad C & B, etiam latera C I, BI (*g*) (g) *Per* 6.
æqualia ſunt,) capietque ſegmentum B Q C angulum parem *l.* 1.
dato ABF.

Nam quia A B diametro B L perpendicularis eſt, AB tan-
get (*h*) circulum, quem ſecat BC. Ergo (*i*) angulus in ſeg- (h) *Per* 16.
mento BQC æquatur angulo ABF. *l.* 3.

Quod ſi detur angulus obtuſus R B C, eadem conſtrue, (i) *Per*
eritque ſegmentum COB quæſitum. *præc.*

[Scholium. *Eâdem omnino conſtructione, circuli circumfe-* *Fig.* 46.
rentiam ducere licebit, qui datam rectam AR in dato puncto B tangat, & per aliud punctum C, extra rectam AR ſumptum tranſeat. Nempe ductâ B C, & ad datam AR erectâ perpendiculari BL, ſi fiat angulus BCI, angulo CBL æqualis; rectarum B L, C I interſectio I erit centrum, & I B vel I C radius circuli deſcribendi.]

PROPOSITIO XXXIV.

Fig. 47. *A Dato circulo ſegmentum auferre capiens angulum dato parem.*

Ad circuli diametrum FA duc perpendicularem BAL; ducatur item AC, (*a*) quæ faciat angulum BAC parem dato. Hæc auferet ſegmentum AQC capiens angulum parem dato, uti patet ex 32.

(*a*) Per 23. l. 1.

PROPOSITIO XXXV.

Fig. 48, 49, 50. *SI in circulo duæ rectæ (CL, BF) ſe ſecuerint; rectangulum (COL) ſub ſegmentis unius, æquale eſt rectangulo (BOF) ſub ſegmentis alterius comprehenſo.*

Si ſe interſecant in centro A, res patet.

Fig. 48. Si una CL tranſit per centrum A, & reliquam BF ſecat bifariam; ſecabit quoque (*b*) perpendiculariter, ac propter biſectionem quad. FO eſt rectangulum FOB. Ducatur AF. Quoniam CL biſecta eſt in A, & aliter in O, erit

(*b*) Per 3. l. 3.

(*c*) Per 5. l. 2.

(*d*) Per 47. l. 1.

$\left\{\begin{array}{l}\text{rectang. COL}\\ \text{quad. AO}\end{array}\right.$ æ. (*c*) quad. AL; hoc eſt, quad. AF; hoc eſt, (*d*) $\left.\begin{array}{l}\text{quad. AO}\\ \text{quad. FO.}\end{array}\right\}$

Dempto igitur communi quadrato AO, erit rect. COL æ. quad. FO, hoc eſt, rect. FOB.

Fig. 49. Si una CL per centrum tranſit, & reliquam BF ſecat inæqualiter in O, ex centro A ducta recta ſecet ipſam BF in I bifariam. Igitur angulus AIB (*e*) rectus erit. Jam quia CL biſecta eſt in A & aliter in O, erit

(*e*) Per 3. l. 3.

(*f*) Per 5. l. 2.

(*g*) Per 47. l. 1.

$\left\{\begin{array}{l}\text{rectang. COL}\\ \text{cum}\\ \text{quad. AO}\end{array}\right.$ æ. (*f*) quad. AL, hoc eſt, quad. AB; hoc eſt, (*g*) $\left.\begin{array}{l}\text{quad. AI}\\ \text{quad. BI.}\end{array}\right\}$

Sed

Sed quadratum AO æquatur (*a*) quadratis OI, AI. Ergo (a) Per 47. l. 1.

{rectang. COL æ. quad. AI}
{quad. OI quad. BI.}
{quad. AI

Dempto igitur communi quadrato AI, remanent

{rect. COL æ. quad. BI.
{quad. OI

Atqui etiam quadratum BI æquatur rectangulo (*b*) FOB (b) Per 5. l. 2.
cum quadrato OI, quia FB ſecta eſt biſariam in & I aliter in O. Ergo

{rectang. COL æ. rect. FOB}
{quad. OI quad. OI}

Dempto igitur communi quadrato OI, erit
rect. COL æ. rect. FOB.

Quod ſi neutra rectarum CL, FB per centrum tranſeat, per communem earum ſectionem O & per centrum A, ducatur recta XZ. Per modò demonſtrata tam rectang. COL quàm rectang. FOB æquantur rectangulo ZOX. Ergo etiam COL, FOB æqualia ſunt inter ſe. Fig. 50.

[*Vel ſic faciliùs & univerſaliùs. Connecte CF & BL. Atque ob angulos* (c) *COF, BOL ad verticem oppoſitos, ipſoſque* (d) *C & B (ſuper eodem arcu FL) pares, trigona COF, BOL* (e) *æquiangula ſunt. Ergo per prop. 4. lib. 6. quæ ab hac non dependet, CO: OF :: BO: OL; & proinde, per prop. 16. lib. 6. quæ itidem ab hac minimè dependet, rect. CO ✕ OL = rect. BO ✕ OF. Q. E. D.*] Fig. 51. (c) Per 15. l. 1. (d) Per 21. l. 3. (e) Per cor. 9. p. 32. l. 1.

PROPOSITIO XXXVI.

SI a puncto (B) extra circulum dato ducantur duæ rectæ, una tangens (BF,) altera ſecans (BC,) erit rectangulum (CBO) ſub totâ ſecante (CB) & parte (BO) inter punctum & circulum interjectâ comprehenſum, æquale quadrato tangentis (BF.) Fig. 52. 53. 54.

Si ſecans BC tranſit per centrum A, junge AF: faciet hæc (*f*) cum FB angulum rectum. Quoniam CO biſecta eſt in A, eique adjecta OB, erit Fig. 52. (f) Per 18. l. 3.

{rect. CBO (*g*) æ. quad. AB; hoc eſt, (*h*) (g) Per 6. l. 2.
{quad. AO (h) Per 47. l. 1.

quad. BF}
quad. AF.}

 Ablatis

Ablatis ergo quadratis AO, AF æqualibus, remanet
rect. CBO æ. quad. BF.

Fig. 53. 54. Quod ſi CB non tranſit per centrum A, ducantur AB, AF, AO; & AL ex centro ducta biſecet OC in L. Ergo angulus ALO (a) rectus erit. Item AFB (b) erit rectus. Quoniam verò CO biſecta eſt in L, eique adjecta eſt OB, erit

(a) Per 3. l. 3.
(b) Per 18. l. 3.
(c) Per 6. l. 2.

{rect. CBO / quad. LO} æ. (c) quad. LB.

Addatur utrimque quadratum AL, erit

{rect. CBO / quad. LO / quad. AL} æ. {quad. LB / quad. AL.}

(d) Per 47. l. 1.
(e) Per eand.
(f) Per eand.

Sed quadrata LO, AL æquantur quadrato (d) AO ſeu AF; & quadrata LB, AL (e) æquantur quadrato AB. Ergo

{rect. CBO / quad. AF} æ. quad. AB; hoc eſt, (f) {quad. BF / quad. AF.}

Ablato igitur communi quadrato AF, remanet
rect. CBO æ. quad. BF.

Fig. 55.
(g) Per 21. l. 3.
(h) Per cor. 6. p. 32. l. 1.

[*Vel ſic faciliùs & univerſaliùs. Duc CF & FO: ac ob angulos BFO & (g) C pares, & B communem, triangula CBF, FBO (h) æquiangula ſunt. Ergo per 4. l. 6. quæ ab hac non dependet, CB : BF :: FB : BO. Quare per 17. l. 6. quæ ab hac non dependet, rectangulum CB* ⨯ *BO æquale eſt quadrato BF. Q. E. D.*

Corollaria.

Fig. 56. 1. SI ab eodem extra circulum puncto B, quotvis ducantur ſecantes BC, omnia rectangula CBO inter ſe æqualia ſunt. Singula enim æquantur quadrato tangentis BF.

2. Quæ ex eodem puncto circulum tangunt, BF, BQ æquales ſunt. Earum quippe quadrata æquantur ſingula eidem rectangulo CBO.

[3. *Perſpicuum quoque eſt ab eodem puncto B extra circulum aſſumpto, duci tantùm poſſe duas lineas BF, BQ, quæ circulum tangant. Nam ſi tertia tangere dicatur, erit illa ipſis BF & BQ* (i) *æqualis, & proinde ab unâ iſtarum non diverſa.*

(i) Per cor. 2.

Fig. 57. 4. *Hinc cum Maurolyco ex notâ montis altitudine AD, & lineâ horizontali AB terram tangente in B, ubi montis vertex, ab illo recedentibus apparere deſinit, Telluris diametrum DE (in AD productâ ſuſceptam) metiri diſcimus. Erit enim, per hanc prop. rectang. AE* ⨯ *AD* = *ABq. Dividatur ergo notum*

tum quadratum AB per notam montis altitudinem AD, & quotiens dabit rectam AE: ex quâ ſubtrahe notam montis altitudinem AD; reliqua erit DE Telluris diameter. Q. E. I.

5. In omni triangulo rectangulo BFA, rectangulum ex hypotenuſa & lateris unius ſummâ, ac differentiâ, æquatur quadrato lateris alterius. Si enim centro A, & intervallo AF deſcribatur circulus, ſecans hypotenuſam AB in O, & producatur BA uſque dum circulo rurſus occurrat in C, Hypotenuſa BA & lateris AF ſumma erit BC, a puncto B circulum ſecans; eorumque differentia erit BO ea ſecantis pars quæ inter punctum & circulum interjicitur; & trianguli latus alterum eſt BF circulum (a) tangens. Sed per hanc prop. rectangulum CBO æquatur quadrato BF: Ergo, in triangulo rectangulo BFA, &c. Q. E. D. Fig. 52.

(a) Per 16. l. 3.

6. Si ab angulo A trianguli ABC, cujus latera AB, AC ſunt inæqualia, demittatur in baſem (ſi opus productam) perpendiculum AL, erit rectangulum ſub ſummâ & differentiâ laterum AB, AC, æquale rectangulo ſub ſummâ & differentiâ rectarum LB. LC, inter perpendiculum AL & angulos baſis B, C interceptarum. Centro enim A, radio latere minore AC deſcribatur circulus ſecans latus majus AB in D, & baſem (ſi opus productam) in O; & producatur BA donec circulo iterum occurrat in E. Propter æquales AC, AD, AE, erit EB laterum ſumma; & BD illorum differentia: & propter æquales (b) LC, LO, erunt BC & BO (vel in Fig. 59. BO & BC) ſumma & differentia interceptarum LB, LC. Sed (c) rect. EBD = rect. CBO Ergo, &c. Fig. 56. 59.

(b) Per 3. l. 3.
(c) Per cor. 1. hujus.

In caſu fig. 58. Theorema ſic poteſt efferri. Fig. 58.

Si ab angulo A trianguli ABC demittatur perpendicularis in baſem BC, eam dividens in duo ſegmenta BL, LC; erit rectangulum ſub ſummâ & differentiâ laterum AB, AC, æquale rectangulo ſub baſi BC, & differentia ſegmentorum baſis BO. Atque hujus theorematis uſus eſt eximius in trigonometriâ planâ.]

PROPOSITIO XXXVII.

SI rectangulum ſub CB & OB ſit æquale quadrato BF, hæc circulum tanget in F. Fig. 56.

[Hoc eſt, ſi a puncto B extra circulum dato, in circulum cadant duæ rectæ, quarum altera BC circulum ſecet, altera verò BF incidat, ſit autem rectangulum ſub totâ ſecante CB & parte BO inter punctum & circulum interjectâ comprehenſum, æquale ei quod ab incidente BF ſit quadrato; Incidens linea BF circulum tanget in F.]

Ex B ducatur tangens BQ, & ex E centro ductis ad Q & F rectis EQ, EF, jungatur BE. Quoniam rectangulo CBO æquantur quadratum BF per hyp. & quadratum BQ per 36. hæc inter ſe æqualia ſunt; adeoque & (*a*) rectæ BQ, BF æquales. Igitur triangula FEB, QEB ſibi mutuò ſunt æquilatera. Ergo (*b*) anguli Q, F æquales erunt. Sed Q (*c*) rectus eſt. Ergo etiam F rectus eſt. Ergo BF (*d*) tangit.

(a) *Per axio.* 15. (b) *Per* 8. *l.* 1. (c) *Per* 18. *l.* 3. (d) *Per* 16. *l.* 3. (e) *Per* 8. *l.* 1. (f) *Per axio.* 15. (g) *Per præc.* (h) *Per axio.* 1.

[Coroll. 1. *Hinc angulus* (e) *EBF æqualis, eſt angulo EBQ.*

2. *Si duæ rectæ æquales BF, BQ ex puncto quopiam B in convexam peripheriam incidant, & earum una BF circulum tangat, altera quoque BQ eundem circulum tanget. Nam cùm BF, BQ ſint æquales, earum quadrata erunt* (f) *æqualia. Sed BFq* = (g) *CBO. Ergo BQq* = (h) *CBO. Ergo etiam BQ per hanc prop. tangit circulum.*]

ELE-

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ
LIBER QUARTUS.

HIC liber totus problematicus eſt: docet, quo artificio figuræ præſertim ordinatæ circulo inſcribantur & conſcribantur. Ampliſſimus eſt illius uſus in munitionibus extruendis: & ex illo quaſi fonte eximiæ illæ ſinuum, tangentium, & ſecantium tabulæ ingenti bono Matheſeos fluxere.

Eſt verò Quartus *hic Elementorum liber* Trigonometriæ *utiliſſimus. Circulo enim polygona inſcribendo, tabulas Chordarum, Tangentium, & Secantium fabricare diſcimus: quarum ope, figurarum & corporum magnitudines menſuramur: Neque abſque eo ſtellarum* Aſpectus, *quos vocant, Quartilem nempe, Sextilem, &c. rite diſtinguimus: utpote a polygonorum in circulo inſcriptione omnino pendentes. Neque ſane Circuli aream ſive* quadraturam *quandam aliunde quàm ex polygonorum innumerorum circulo inſcriptorum & circumſcriptorum* areis *ſive* quadraturis *colligere poſſumus. Et haud aliter circulorum ad ſe invicem rationem duplicatam, è duplicatâ polygonorum iiſdem inſcriptorum aut circumſcriptorum ratione colligimus. Architectura verò militaris polygonis circulo inſcriptis toties utitur, ut præ aliis omnibus ſcientiis, huic libro in ſolidum fere deberi videatur.*

DEFINITIO.

1. Figura rectilinea circulo inſcripta eſt, vel circulus figuræ circumſcriptus, cùm ſingulorum angulorum vertices in circumferentiâ exiſtunt.

2. Figura rectilinea circulo circumſcripta eſt, vel circulus figuræ inſcriptus eſt, cùm ſingula latera circulum tangunt.

3. Figura ordinata ſeu regularis eſt, quæ æquilatera & æquiangula eſt.

PRO-

PROPOSITIO PRIMA.

Fig. 1. L4. *Circulo (BD) rectam datam (A) diametro non majorem, inſcribere.*

Accipe in peripheriâ quodvis punctum B. Centro B, intervallo datæ A, deſcribe arcum circulo occurrentem in C. Duc rectam BC. Dico factum.

PROPOSITIO II.

Fig. 2. *Circulo triangulum inſcribere dato (X) æquiangulum.*

(a) Per 23. l. 1. (b) Per 32. l. 3. (c) Per conſtr. (d) Per cor. 9. p. 32. l. 1.

Circulum tangat EF in D. Fiat angulus EDG par (*a*) angulo C, & FDH par B: jungaturque GH. Dico factum. Nam angulus H æquatur (*b*) angulo EDG, hoc eſt, (*c*) angulo C; & G æquatur FDH, hoc eſt, ipſi B. Ergo etiam GDH (*d*) æquatur A. Factum eſt igitur quod petebatur.

PROPOSITIO III.

Fig. 3. *Circulo circumſcribere triangulum æquiangulum dato ILK.*

Latus IK utrimque producatur, ut fiant externi anguli O & N. Fac in centro A (per 23. l. 1.) angulos GAB, BAF pares angulis O, N. Deinde in punctis G, B, F, circulum tangant tres rectæ coeuntes in C, E, D. Triangulum CDE eſt circulo circumſcriptum, & æquiangulum dato ILK.

(e) Per 18. l. 3. (f) Per theor. 1. ſchol. poſt 32. l. 1. (g) Per cor. 9. p. 32. l. 1. (h) Per 13. l. 1.

In quadrilatero CGAB, anguli G & B ſunt duo (*e*) recti. Ergo reliqui GAB & C conficiunt ſimul etiam duos (*f*) rectos, ac proinde æquantur duobus ſimul O, I. Ablatis igitur GAB & O æqualibus per conſtr. remanent æquales, C & I. Eodem modo oſtenditur E æqualis eſſe K. Ergo D & L (*g*) etiam æquales erunt. Factum eſt igitur quod petebatur.

Quòd autem tangentes concurrant, ſic oſtenditur. Anguli O, I, & K, N ſunt æquales (*h*) 4. rectis; & I, K ſunt

ſunt minores duobus (*a*) rectis. Ergo O, N, (hoc eſt per conſtruct. GAB & BAF) ſunt majores duobus rectis. Ergo GAF eſt minor duobus (*b*) rectis. Ergo [*arcus GBF eſt* (c) *ſemiperipheriâ major, & arcus oppoſitus GF, ſemiperipheriâ minor. Unde*] recta GF cadit [*ſupra centrum A, hoc eſt,*] inter A & D. Ergo cùm AGD, AFD ſint recti, erunt DGF, DFG duobus rectis minores. Ergo (*d*) CGD, EFD concurrunt verſus D. Simili ratione demonſtrabis concurrere reliquas.

[Aliter. *Ad centrum A circuli dati, ſuper radio BA ex utrâque parte, fiant ut priùs, anguli BAC, BAF, angulis O, N externis trianguli dati ILK reſpectivè æquales, & in punctis B, G, F circulum tangant tres rectæ, quæ proinde angulos efficient rectos ABC, AGC; & ABE, AFE. Ducantur rectæ BG, BF, quæ ex utrâque parte radii BA, formabunt triangula BAG, BAF. Si itaque a duobus angulis rectis ABC, AGC, trianguli BAG anguli ad B & G reſpectivè ſubducantur, reſtabunt anguli GBC, BGC duobus rectis minores: ergo tangentes BC, GC, ſi protrahantur ex parte angulorum duobus rectis minorum, tandem* (e) *concurrent. Eodem modo tangentes BE, FE, ſi producantur, concurrent. Producantur & concurrant BC, GC in C; & BE, FE in E. Cùm igitur in quadrilatero ABCG anguli ad B & G ſunt recti, erunt anguli BAG, BCG duobus rectis* (f) *æquales. Sed anguli O, I ſunt duobus rectis* (g) *æquales, quorum O* (h) *æquatur angulo BAG; Ergo angulus BCG æquatur angulo I. Eodem modo oſtendetur angulum BEF angulo K æqualem eſſe. Sed anguli I & K ſimul ſumpti, ſunt duobus rectis* (i) *minores: ergo anguli GCE, CEF ſunt duobus rectis minores, & proinde rectæ CG, EF* (k) *concurrent ſi protrahantur. Concurrant in D. Cùm igitur anguli C & E trianguli CDE, angulis I & K trianguli ILK reſpectivè æquales ſint; angulus D angulo E* (l) *æqualis erit: & ſingula trianguli CDE latera* (m) *tangunt circulum datum. Circulo igitur BGF circumſcribitur triangulum CDE, æquiangulum dato ILK.* Q. E. F.]

(a) Per cor. 17. & 32. l. 1.
(b) Per cor. 3. p. 13. l. 1.
(c) Per ſchol. p. 23. l. 1.
(d) Per ſchol. p. 31. l. 1.
Fig. 3.
(e) Per ſchol. p. 31. l. 1.
(f) Per Theor. 2. poſt. 32. l. 1.
(g) Per 13. l. 1.
(h) Per conſtr.
(i) Per cor. 17. p. 32. l. 1.
(k) Per ſchol. poſt. 31. l. 1.
(l) Per cor. 1. p. 32. l. 1.
(m) Per conſtr.

PROPOSITIO IV.

TRiangulo circulum inſcribere. Fig. 5.

Duos angulos C & E biſeca rectis CA, EA coeuntibus in A. Ex A duc perpendiculares AB, AG, AF. Circulus centro A per B deſcriptus, tranſibit etiam per G & F, tangetque tria latera trianguli.

In

In triangulis enim CAG & CAB, quia anguli AGC, ABC, itemque GCA, BCA per conſtr. æquantur, & latus quoque AC eſt commune, etiam AG, AB (*a*) æqualia erunt. Pari modo oſtendam paria eſſe AB, AF. Circulus ergo deſcriptus centro A per B, tranſit per G, F; & quia anguli ad B, G, F ſunt recti, tangit (*b*) omnia trianguli latera. Fecimus ergo quod petebatur.

(a) *Per 26. l. 1.*

(b) *Per 16. l. 3.*

Fig. 5. Cor. 1. *Hinc cognitis lateribus trianguli, invenientur eorum ſegmenta quæ fiunt a contactibus circuli inſcripti. Sit* $DC = 12$, $DE = 16$, $CE = 18$. *Erit* $CD + DE = 28$, *a quo ſubduc* CE $(= 18) = CG + EF$, *& reſtabunt* $GD + DF = 10$. *Ergo* (c) $GD = 5 = DF$; $GC = 7 = CB$; $BE = 11 = EF$.

(c) *Per cor. 2. p. 36. l. 3.*

Cor. 2. *Datis trianguli lateribus, & radio circuli inſcripti, habetur area trianguli. Nam ductâ AD, inſcripti circuli radius eſt altitudo communis trium triangulorum ACD, ADE, AEC in qua dividitur triangulum CDE, & eorum baſes ſunt trianguli CDE latera: ergo radius in laterum ſemiſummam, dabit* (d) *aream trianguli CDE. Sit radius* $AB = 5$, *& latera* 12, 16, 18; *quorum ſemiſumma eſt* 23 : *Eſt itaque* $5 \times 23 = 115 =$ *area trianguli.*]

(d) *Per ſchol. p. 41. l. 1. & p. 1. l. 2.*

PROPOSITIO V.

Fig. 4. TRiangulo circulum circumſcribere; *ſive per tria data puncta* (*B, C, D*) *non ad unam rectam poſita, circulum deſcribere.*

Puncta data B, C, D binis rectis BC, CD connecte, quas biſeca perpendicularibus OA, EA concurrentibus in A. Hoc erit centrum circuli per B, C, D tranſeuntis.

Ductæ intelligantur rectæ AC, AD, AB. Per conſtr. latera DO, AO æquantur lateribus CO, OA, & anguli ad O ſunt recti. Ergo AD (*e*) æquatur AC. Eodem modo AB æquatur AC. Ergo etiam AD, AB (*f*) æquales. Ergo circulus centro A deſcriptus per B, tranſibit etiam per C & D. Quod petebatur.

(e) *Per 4. l. 1.*

(f) *Per axio. 1.*

Ad praxim tantùm opus centris B, C, D deſcribere tres æquales circulos ſe mutuò interſecantes, & per interſectiones ducere rectas: hæ ſibi occurrentes dabunt centrum quæſitum.

Tab. 2. Fig. 36. lib. 3. [Coroll. *Hinc liquet, circulum etiam Quadrilatero ABCF, cujus anguli oppoſiti ABC, AFC duobus rectis æquales ſint, circumſcribi poſſe. Nam ductâ rectâ AC, circulus per hanc*

prop.

prop. circa triangulum *ABC* deſcribi poteſt. Deſcribatur; & in arcu oppoſito *AFC*, capiatur punctum quodvis D, & *DA*, DC ducantur. Ergo eſt *ABCD* quadrilaterum circulo inſcriptum, ac proinde anguli oppoſiti *ABC*, *ADC* (a) æquales ſunt duobus rectis. Sed in quadrilatero *ABCF*, anguli *ABC*, *AFC* æquales duobus rectis eſſe ponuntur. Ablato igitur communi *ABC*, æquales erunt anguli *ADC*, *AFC*, eidem arcui *ABC* inſiſtentes, quorum alter *ADC* eſt angulus ad peripheriam ipſi *ABC* oppoſitam: Ergo (b) uterque angulorum æqualium ad eandem peripheriam exiſtit, & proinde circulus per *A*, *B*, *C*, tres angulos quadrilateri *ABCE* deſcriptus, tranſibit etiam per angulum quartum F. Q.E.D.

(a) Per 22. l. 3.

(b) Per ſchol. poſt pr. 21. l. 3.

Scholium. *Si triangulo circulus circumſcribatur, pro varia trianguli circumſcripti ſpecie, centrum circuli varie cadet. Si fuerit acutangulum, centrum cadet intra triangulum. Nam propter angulum acutum BCD* (c) *in ſegmento majore, centrum A cadet in illo ſegmento majore cujus baſis eſt BD; atque eodem modo oſtendetur centrum eſſe in illis ſegmentis majoribus quorum baſes ſunt BC, CD reſpectivè, adeoque cadet intra triangulum BCD. In triangulo verò rectangulo, propter angulum in ſemicirculo* (d) *rectum, centrum cadet in latus angulo recto oppoſitum. In obtuſangulo autem triangulo, propter angulum obtuſum in* (e) *ſegmento minore, centrum erit in ſegmento oppoſito, ac proinde extra triangulum cadet. Hinc ſequitur,*

Fig. 5. l. 4.

(c) Per 31. & ſchol. p. 21. l. 3.

Fig. 6.

(d) Per, ead.

Fig. 7.

(e) Per, ead.

1. *Si a centro A ad ſingulos angulos B, C, D, trianguli acutanguli ducantur recta AB, AC, AD, illa triangulum in tria æquicrura triangula ABC, ABD, ACD (propter æquales AB, AC, AD) divident. Et ob eandem cauſam, ſi recta AC a centro circuli triangulo rectangulo circumſcripti, ad angulum rectum ducatur, illud in duo triangula iſoſcelia, ABC, ACD dividet, quod & priùs* (f) *obſervatum. Si verò ad ſingulos trianguli obtuſanguli angulos, a centro circuli circumſcripti, ducantur recta AB, AC, AD, formabuntur inde tria æquicrura triangula, quorum illud cujus baſis eſt latus BD angulo obtuſo BCD oppoſitum, nempe triangulum BAD, erit extra triangulum obtuſangulum, & ſimul cum eo quadrilaterum ABCD formabit, duobus reliquis triangulis iſoſceliis ABC, ACD æquale.*

Fig. 5.

Fig. 6.

(f) Vide cor. p. 31 hujus.

Fig. 7.

2. *Si a centro A in ſingula latera perpendiculares ducantur radii AEF, AIH, AOG; (vel ſi in circulo qui triangulo rectangulo circumſcribitur, ductis ut priùs AEF, AOG, a centro A erigatur lateri BD perpendicularis AH, quoniam puncta A & I in illo caſu coincidunt;) iſti radii tum ipſa latera in E, I & O, tum arcus qui a lateribus ſubtenduntur in F, H & G, tum triangulorum iſoſcelium angulos verticales ad A,* (g) *biſa-*

Fig. 5. 6. 7.

(g) Per 3. & ſchol. p. 26. l. 3. & p. 30. l. 3.

(a) Per 30. l. 3. riam ſecabunt. Et in circulo circa obtuſangulum triangulum, completâ diametro HAK, arcus BKD biſecabitur (a) in K.

Fig. 5. 3. Unde in triangulo acutangulo, BE, BI, CO, &c. ſemiſſes (b) Per cor. 1. p. 3. l. 3. laterum BC, BD, CD, erunt (b) angulorum BAF, BAH, CAG, &c. ſinus recti; & ſimiliter in triang. rectang. vel obtuſang. Fig. 6, 7. ipſas BE, CO angulorum BAF, CAG ſinus rectos eſſe conſtat: Fig. 6. in triangulo autem rectangulo radium circuli BI anguli recti Fig. 7. BAH ſinum rectum eſſe patet ex def. 10. l. 3. Et cum idem (c) (c) Per def. 10. l. 3. ſit anguli cujuſvis, & complementi ejus ad duos rectos, ſinus rectus; Ergo in caſu trianguli obliquanguli, recta BI tam anguli BAH quàm etiam anguli BAK ſinus rectus erit.

Fig. 5, 6, 7. 4. Angulus ad centrum BAF ſuper arcu dimidio BF, æqualis eſt angulo ad peripheriam BDC ſuper arcu integro BC. (d) Per cor. 2. hujus ſch. Cùm enim angulus BAC tum anguli BAF (d) ad centrum, tum anguli BDC ad (e) circumferentiam duplus ſit; anguli igitur BAF, BDC (f) æquales erunt. Et pari modo oſtendetur æquales eſſe angulos CAG, CBD; item æquales eſſe in triangulo acutangulo angulos BAH, BCD, quos in triangulo rectangulo rectos & proinde æquales eſſe patet: In circulo autem circa triangulum obtuſangulum deſcripto, angulum BAK ad centrum ſuper arcu dimidio BK, angulo obtuſo BCD ad peripheriam ſuper arcu integro BKD æqualem eſſe ſic probatur. Ductis BK, DK, angulum ad centrum BAH ſuper arcu dimidio, æqualem eſſe angulo ad peripheriam BKD ſuper arcu integro, patet ut ſupra: ſed in quadrilatero BCDK circulo inſcripto, anguli oppoſiti BCD, BKD (g) duobus rectis, hoc eſt, angulis BAH, BAK ſimul ſumptis (h) æquantur. Ablatis igitur æqualibus BKD, BAH, remanebunt æquales BCD, BAK.

(e) Per 20. l. 3.
(f) Per axio. 6.
Fig. 5, 6.
Fig. 7.
(g) Per 22. l. 3.
(h) Per 13. l. 1.

Fig. 5, 6, 7. 5. Cujuſcunque trianguli BCD latera BC, BD, CD ſunt inter ſe, ut ſinus angulorum BDC, BCD, CBD lateribus reſpectivè oppoſitorum. Nam latera BC, BD, CD ſunt inter ſe invicem ut eorum ſemiſſes BE, BI, CO, hoc eſt, ut (i) ſinus (i) Per cor. 3. hujus ſch. angulorum BAF, BAH (vel BAK,) CAG. Sed anguli iſti (k) Per cor. 4. huj. ſchol. angulis (k) BDC, BCD, CBD reſpectivè ſunt æquales. Ergo latera BC, BD, CD ſunt inter ſe, ut ſinus angulorum lateribus illis reſpectivè oppoſitorum. Atque ab hoc unico corollario, magna pars trigonometriæ planæ deducitur: quod diligenter eſt notandum.

Fig. 62. l. 1. 6. Hinc Lunæ diſtantiam metiri diſcimus. Dato enim per obſervationes Aſtronomicas Parallaxeωs diurnæ angulo BCA, & angulo DBC, & proinde ejus complemento ad duos rectos CBA, unà cum Telluris ſemidiametro AB, Lunæ diſtantiam ſequenti analogiâ inveſtigamus. Ut ſinus anguli ACB, ad ſinum anguli (l) CBA; ita BA Telluris ſemidiameter, ad AC diſtantiam Lunæ. Q.E.I.

(l) Per cor. 5. huj. ſchol.

7. Hinc

9. *Hinc Solis etiam diſtantiam metiri diſcimus. Datis enim per obſervationes Aſtronomicas parallaxeos menſtrua angulo, ubi ſcilicet Luna præciſè biſecta apparet* ZEO; *& Lunæ diſtantiâ* ZO; *per analogiam ſequentem, diſtantiam Solis colligimus. Ut Sinus anguli* ZEO, *ad ſinum anguli recti* EOZ *ſive,* (a) *radium;* (b) *ita* ZO *diſtantia Lunæ, ad* ZE *diſtantiam Solis.* Q. E. I.] Fig. 8. l. 4.

(a) Per def. 10. l. 3.
(b) Per cor. 5. Int. ſchol.

PROPOSITIO VI. & VII.

Circulo quadratum inſcribere, & circumſcribere. Fig. 91

Ducantur diametri BD, CE ſe mutuò ſecantes perpendiculariter. Rectæ quæ harum terminos jungunt, circulo quadratum inſcribunt.

Demonſtratio patet ex 4. l. 1. & ex 31. l. 3. [*Nam in triangulis* CAD, DAE, *ob angulos æquales ad* A, *nempe rectos, & latera circa illos reſpectivè æqualia, baſes* CD, DE (c) *æquales erunt; & eodem modo omnia latera* EB, BC, CD, DE *figura inſcripta ſibi invicem æquari patebit. Et quia* CE *circuli diameter eſt, angulus* CDE *in ſemicirculo* (d) *rectus erit; & ob eandem rationem anguli* DEB, EBC, BCD *recti ſunt. Quadrilaterum ergo inſcriptum eſt æquilaterum & rectangulum; &* (e) *proinde quadratum eſt.*

(c) Per 4. l. 1.
(d) Per 31. l. 3.
(e) Per def. 32. l. 1.

Ducantur deinde quatuor tangentes circulum in B, C, D, E concurrentes in I, F, G, H. Figura IFGH quadratum eſt circulo circumſcriptum.

Demonſtratio patet ex 18. l. 3. & ex 28. 30. & 34. l. 1.

[*Quia enim recta* HI, IF, FG, GH *circulum tangunt in extremitatibus diametrorum* BD, CE: *cum diametris iſtis* (f) *efficient angulos rectos ad,* B, C, D, E. *Et propter angulos etiam rectos ad centrum* A, *æquales erunt alterni anguli* CAB, ABH, *& recta* CE, IH (g) *erunt parallela: eodem modo conſtabit rectas* CE, FG *parallelas eſſe: Ergo &* FG, IH *parallela* (h) *ſunt. Et pari modo probabitur rectas* FI, GH *tum recta* DB, *tum ſibi invicem parallelas eſſe. Parallelogrammum igitur eſt* IFGH, *& latera oppoſita* (i) *æqualia ſunt; nempe* FI = GH, *&* FG = IH. *Sed ob parallelogramma* CFGE, *&* DGHB, *latera* FG, GH *parallelogrammi* FGHI, (k) *æqualia ſunt circuli diametris* CE, DB; *& proindè omnia latera* IF, FG, GH, HI *ſibi invicem æqualia ſunt. Porro, in parallelogrammo* FDAC, *angulus ad* A *rectus eſt: ergo etiam angulus ad* F *rectus* (l) *erit; & pari modo, anguli ad* G, H, I *recti erunt. Ergo*

(f) Per 18. l. 3.
(g) Per 28. l. 1.
(h) Per 30. l. 1.
(i) Per 34. l. 1.
(k) Per eand.
(l) Per eand.

Ergo IFGH eſt parallelogrammum æquilaterum & rectangulum, ſive quadratum: cujus omnia latera circulum datum tangunt. Eſt igitur quadratum circulo circumſcriptum.]

Scholium.

Fig. 9. (a) Per 31. l. 3. (b) Per 47. l. 1. (c) Per cor. 1. p. 47. l. 1.

QUadratum circumſcriptum circulo, duplum eſt inſcripti: Nam quia angulus B C D in ſemicirculo rectus (*a*) eſt, erit quadratum ex D B (hoc eſt quadratum F I) æquale (*b*) quadratis D C, B C, ac proinde (*c*) duplum quadrati D C, hoc eſt quadrati C D E B. [*Item quadratum inſcriptum duplum eſt radii quadrati.*]

PROPOSITIO VIII. & IX.

Fig. 10.

QUadrato (BEFC) circulum inſcribere, & circumſcribere.

Ducantur diametri in quadrato ſe ſecantes in A. Centro A per B deſcriptus circulus tranſibit etiam per E, F, C.

Deinde ex A duc A D perpendicularem ad C B. Centro A per B deſcriptus circulus tanget omnia quadrati latera.

(d) Per 5. l. 1. (e) Per cor. 31. p. 32. l. 1. (f) Per 6. l. 1.

Pars 1. Quia ex hyp. C B, E B latera ſunt æqualia, erunt anguli B C E, B E C (*d*) æquales. Angulus autem CBE rectus eſt per hyp. Ergo B C E, B E C (*e*) ſunt ſemirecti. Eodem modo oſtendam C B F & reliquos eſſe ſemirectos, adeoque æquales inter ſe. Ergo in triangulo B A C, cùm duo ſint æquales anguli CBA, & BCA, erunt A B & AC (*f*) æquales. Eâdem ratione A B, A E, A F æquales erunt. Circulus igitur centro A per B deſcriptus, tranſibit etiam per E, F, C.

(g) Per 26. l. 1. (h) Per 16. l. 3.

Pars 2. Ex A ſint perpendiculares inſuper AG, AH, AI. Quoniam in triangulis G B A & D B A anguli ad D & G, itemque ad B inter ſe æquales ſunt, latuſque A B commune, latera (*g*) A D, A G æqualia erunt. Eâdem ratione æqualia ſunt AG, AH, AI. Circulus ergo centro A per D tranſiens, tranſibit etiam per G, H, I, tangetque latera (*h*) omnia quadrati, quia anguli ad D, G, H, I ſunt recti. Fecimus ergo quod petebatur.

Fig. 9.

Coroll. 1. *Hinc, cùm angulus CDF a tangente & ſecante factus ſit ſemirectus, ſive gr. 45; & angulus CDG ſeſquirectus ſive gr. 135; ergo latus quadrati circulo inſcriptibilis (ſive*

(*ſive recta abſcindens quadrantem totius peripheriæ*) *ut* DC,
circulum dividet in duo ſegmenta, (a) *quorum majus continet* (a) Per
angulum ſemirectum, & *minus angulum ſeſquirectum. An-* 32. l. 3.
gulus igitur in ſegmento quadrantali æqualis eſt angulo recto
& *ſemirecto ſimul ſumptis*, *atque angulus ſuper arcu quadran-*
tali, *ſive in ſegmento oppoſito*, *æqualis eſt ſemirecto.*

Coroll. 2. *Hinc etiam*, *ſi ſuper* DC *latere quadrati circulo inſcripti pro diametro*, *deſcribatur alius circulus minor*, *ipſius circumferentia per A centrum circuli majoris tranſibit. Nam circa quadratum ACFD*, *cujus angulus A eſt in centro majoris circuli*, *circumſcribetur* (b) *iſte circulus minor.*] (b) Per 9. l. 4.

PROPOSITIO X.

T*Riangulum Iſóſceles conſtruere* (BAC) *in quo angulus ad baſim* (ABC *vel* ACB) *ſit duplus anguli ad verticem* (A.) Fig. 110.

Sumatur quævis recta AB, quam ita ſeca (*c*) in D, ut (c) Per
rectangulum ABD ſit æquale quadrato DA. Tum centro A 11. l. 2.
per B deſcribe circulum, cui inſcribe BC (*d*) æqualem DA, (d) Per
& junge AC. Erit triangulum BAC quæſitum. 1. l. 4.

Ducatur enim recta DC, & per C, D, A deſcribe (*e*) (e) Per
circulum. Quoniam rectangulum ABD æquatur quadrato 5. l. 4.
AD, hoc eſt BC, liquet BC tangere (*f*) circulum DC quem (f) Per
ſecat CD. Ergo angulus BCD æquatur (*g*) angulo A in 37. l. 3.
ſegmento alterno: additoque communi DCA, erit BCA (g) Per 32. l. 3.
æqualis duobus A & DCA. Sed quia latera AB, AC æquantur, ABC æqualis (*h*) eſt BCA. Ergo etiam ABC æqua- (h) Per
tur duobus internis A & DCA. Sed etiam externus BDC 5. l. 1.
(*i*) æquatur duobus internis A & DCA. Ergo ABC & BDC (i) Per 32. l. 1.
æquales ſunt. Recta igitur DC æquatur (*k*) BC, hoc eſt (k) Per
per conſtr. DA. Ergo anguli A & DCA (*l*) æquantur. 6. l. 1.
Quare angulus ABC, qui duobus oſtenſus eſt æqualis, duplus (l) Per
erit unius A. Factum igitur eſt quod petebatur. 5. l. 1.

[Scholium. *Ex hujus propoſitionis conſtructione liquet quomodo ex dato AB uno crurum æqualium*, *conficiatur triangulum quæſitum. Si verò ſuper datâ baſi CB*, *triangulum Iſoſceles ABC ſit ita conſtruendum*, *ut utervis angulorum ad baſem duplus ſit anguli ad verticem*; *primò*, *ſuper CB tanquam uno crurum æqualium*, *conſtruatur ejuſmodi triangulum CBD*, *cujus vertex ſit C*, *baſis BD*: *deinde ſuper BC ad punctum* (m) Per
C fiat (m) *angulus BCA æqualis angulo CBD*, & *producatur* 23. l. 1.
BD donec occurrat ipſi CA in A. Erit ABC triangulum quæſitum ſuper datâ baſi BC conſtructum.]

Corollaria.

Fig. 11. 1. ANguli ad baſim ſinguli B & C in triangulo Iſoſcelio jam conſtructo, ſunt duæ quintæ duorum rectorum, ſeu quatuor quintæ unius recti, & reliquus A eſt una quinta duorum rectorum ſeu duæ quintæ unius. Patet ex propoſitione hac & ex 32. lib. 1.

Sch. ad cor. 1. *Cùm duo anguli recti per ſemicirculum, ſive per gradus* 180 *menſurentur, erit quinta pars duorum rectorum, nempe angulus A, gr.* 36; *& duæ quintæ duorum rectorum, nempe B, gr.* 36 *bis, ſive gr.* 72. *Et cùm unus ang. rectus ſit gr.* 90, *ejus quinta pars erit gr.* 18. *Ergo angulus A (gr.* 36) *continet duas quintas unius recti, & ang. B (gr.* 72.) *quatuor quintas unius recti, & proinde duæ quintæ duorum rectorum ſunt quatuor quintæ unius recti; & una quinta duorum efficit duas quintas unius. Et univerſaliter, in angulo æſtimando per rectorum quorumcunque partes, dimidiatus rectorum numerus inferet partium numerum duplicatum; & vice verſâ. Sic, ſi quivis angulus faciat ſex quintas unius recti, ergò tres quintas duorum rectorum efficiet.*

Fig. 11. Cor. 2. *Cùm angulus BAC ſit duorum rectorum pars quinta, ſive duæ partes decimæ, hoc eſt gr.* 36 *erit etiam una decima quatuor rectorum, ſive integri circuli, gr.* 360; *& proinde recta BC eſt latus decagoni ordinati, circulo inſcribendi, cujus radius ſit AB vel AC.*

Cor. 3. *Si radius circuli AB ita ſecetur in D, ut rectangulum ABD ſub toto radio & ſegmento minore, æquale ſit quadrato DA ſegmenti majoris; erit ſegmentum illud majus AD latus decagoni, circulo cujus radius ſit AB inſcribendi, Conſtat enim ex prop. hujus demonſtratione, ſegmentum AD ipſi BC æquale eſſe.*

Cor. 4. *Si centro C, radio CB vel CD deſcribatur circulus, cùm ſit BCD triangulum iſoſceles triangulo BAC æquiangulum,* (a) *erit baſis BD latus decagoni ordinati* (b) *eidem circulo inſcribendi. Et tùm circuli radius CB (=* (c) *AD) ſit latus hexagoni* (d) *eidem circulo inſcribendi: Ergo, ſi recta quævis AB ita ſecetur in D, ut rectangulum ABD ſub tota AB & ſegmento minore BD æquetur quadrato ſegmenti majoris AD, erit ſegmentum majus AD latus hexagoni, & minus DB decagoni eidem circulo inſcriptibilium. Atque hæc eſt prop.* 9. *lib.* 13. *Euclidis.*

Cor. 5. *Hinc diſcimus arcum circuli quadrantalem in quinque partes æquales (ac proinde, continuâ* (e) *biſectione, in partes æquales*

(a) *Liquet ex hujus prop.* 10. *demonſtr.*
(b) *Per cor.* 2. *hujus.*
(c) *Per conſtr. hujus p.* 10.
(d) *Per cor.* 1. *p.* 15. *l.* 4.
(e) *Per* 30. *l.* 3.

æquales 10, 20, 40, &c.) ſecare; nempe arcum BC biſecando. Cùm enim recta BC ſit latus (a) decagoni ordinati circulo, cujus centrum ſit A, radius AB, inſcripti; erit arcus BC pars decima totius circumferentiæ, ſive pars quinta ſemicircumferentiæ; atque adeo dimidium ipſius BC erit pars decima ſemicircumferentiæ, ſive pars quinta arcûs quadrantalis.] (a) *Per cor. 2. hujus.*

PROPOSITIO XI.

Circulo pentagonum ordinatum inſcribere. *Fig. 11. & 12.*

Deſcribatur (*b*) triangulum BAC habens angulum ad baſim duplum anguli ad verticem. Huic æquiangulum CAD (*c*) inſcribe circulo. Angulos ad baſim ACD, & ADC ſeca bifariam rectis CE, DB, occurrentibus circulo in E & B. Puncta A, B, C, D, E rectis lineis connexa, dabunt pentagonum ordinatum circulo inſcriptum. (b) *Per præc.* (c) *Per. 2. l. 4.*

Nam ex conſtructione liquet quinque angulos I, N, Q, S, O æquales eſſe. Quare etiam arcus iis ſubtenſi, AE, ED, DC, CB, BA (*d*) ſunt æquales. Itaque rectæ ſubtenſæ arcubus etiam æquales (*e*) erunt. Pentagonum igitur æquilaterum eſt. Eſt verò etiam æquiangulum, (*f*) quia ejus anguli BAE, AED, &c. inſiſtunt arcubus æqualibus BCDE, ABCD, &c. Factum eſt igitur quod petebatur. (d) *Per. 28. l. 3.* (e) *Per 27. l. 3.* (f) *Per. 29. l. 3.*

Corollaria.

1. Angulus Pentagoni ordinati facit ſex quintas unius recti, ſeu (*g*) tres quintas duorum. Nam tres anguli ad A, cùm ſint æquales, utpote æqualibus arcubus BC, CD, DE, inſiſtentes, & medius per coroll. 1. præced. ſit duæ quintæ unius recti, tres ſimul, hoc eſt, ipſe pentagoni angulus, conficient ſex quintas unius recti. *Fig. 12.* (g) *Vide ſchol. ad cor. 1. præc.*

[Schol. ad. cor. 1. *Cùm anguli recti pars quinta ſit gr.* 18, *erit angulus Pentagoni ordinati gr.* 18 *ſexies, ſive gr.* 108. *Cùm verò partes ſex quintas unius recti enumerat author, idem eſt ac ſi angulum rectum quintâ ſui parte auctum diceret.*

Cor. 2. *Ex hujus propoſitionis conſtructione liquet, quomodo ſuper datâ rectâ CD, pentagonum ordinatum conſtruere oportet. Fiat* (h) *enim ſuper illâ tanquam baſi, triangulum Iſoſceles ACD, in quo angulus ad baſem duplus ſit anguli ad verticem; circa quod* (i) *circumſcribatur circulus, & biſecentur anguli ad baſem rectis CE, DB, circulo occurrentibus in E, B. Ducta recta AB. BC, DE, EA perficient ordinatum pentagonum ſuper* *Fig. 12.* (h) *Per ſchol. poſt p. 10. l. 4.* (i) *Per 5. l. 4.*

per datâ rectâ CD *deſcriptum, uti ex propoſitionis demonſtratione apparet. Aliam porro methodum idem conſtruendi, docebit problema mox ſecuturum.*

Scholium 1. *Univerſaliter, figuræ imparium laterum inſcribuntur circulo beneficio triangulorum Iſoſcelium, quorum anguli æquales ad baſim,* multiplices *ſunt eorum qui ad verticem ſunt angulorum. Parium verò laterum figuræ in circulo inſcribuntur ope Iſoſcelium triangulorum quorum anguli ad baſim* multiplices ſeſquialteræ *ſunt eorum qui ad verticem ſunt angulorum.* Fig. 12. *Ut in triangulo Iſoſcele* ACD, *ſi angulus* C *aut* D *æqualis ſit tribus angulis A, Latus* CD *erit latus Heptagoni; ſi quatuor, erit latus Enneagoni, &c. Sin verò* C *vel* D *æqualis ſit* $1\frac{1}{2}$ *anguli A, erit* CD *latus quadrati: Et ſi* C *vel* D *æqualis ſit* $2\frac{1}{2}$ *anguli A, ſubtendet* CD *ſextam partem circumferentiæ. Pariterque ſi* C *vel* D *æqualis ſit* $3\frac{1}{2}$ *anguli A, erit* CD *latus octogoni, &c. Nam quâ ratione in Iſoſcele hujus prop. angulorum ad baſem biſectorum partes, unà cum angulo verticali, inſiſtunt arcubus quinque, æqualibus peripheriæ totius partibus; & proinde ſi ejuſmodi triangulum circulo inſcribatur, ipſius baſis erit latus pentagoni ordinati, eidem circulo inſcribendi: eâdem ratione, ſi Iſoſcelis angulus alteruter ad baſem triplus fuerit anguli ad verticem; angulorum ad baſem triſectorum partes, unà cum angulo verticali, inſiſtent arcubus ſeptem, æqualibus itidem totius peripheriæ partibus, ac proinde, ſi ejuſmodi triangulum circulo inſcribatur, ipſius baſis erit latus heptagoni ordinati, eidem circulo inſcribendi. Et pari modo conſtabit de reliquis. Sit n numerus laterum figuræ ordinatæ circulo inſcribendæ: Erit Iſoſcelis, inſcriptioni inſervientis, Angulus ad baſem, Ad angulum verticalem, Ut* $\frac{n-1}{2}$ *Ad* 1. *Unde poſitâ unitate pro angulo verticali, anguli ad baſem Iſoſcelis, unà cum angulo iſto verticali, hiſce numeris pro quavis figurâ ordinatâ inſcribendâ, erunt exponendi; nempe pro triangulo æquilatero,* $1 + 1 + 1 = 3$; *pro quadrato,* $1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} + 1 = 4$; *pro pentagono* $2 + 2 + 1 = 5$; *pro hexagono* $2\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} + 1 = 6$; *pro heptagono* $3 + 3 + 1 = 7$. *Et eodem modo pro aliis ordinatis inſcribendis, procedendum eſt.*]

Scholium. 2.

INgenioſa eſt Euclidea pentagoni inſcriptio, ſed multo expeditior illa Ptolemæi, quam tradit lib. 1. Almageſti, & eſt ejuſmodi.

Ducantur

Ducantur diametri ED, BF ſe mutuò perpendiculariter interſecantes in A. Radium AD biſeca in C. Centro C per B deſcribe arcum, diametro ED occurrentem in G. Recta GB eſt latus pentagoni, & AG decagoni. Fig. 13.

Demonſtratio hîc dari nequit, pendet enim à prop. 10. lib. 13. Eucl. Eam vide apud Clavium in ſcholio poſt p. 10. l. 13.

[*In illâ prop. 10. libri ſui 13. demonſtrat Euclides, pentagoni ordinati circulo inſcripti quadratum, æquari quadratis hexagoni & decagoni ordinatorum, eidem circulo inſcriptorum, ſimul ſumptis. Jam verò latus hexagoni ordinati circulo inſcripti, ejuſdem circuli radio æquale eſſe conſtabit ex cor. 1. p. 15. l. 4. Et latus decagoni ordinati eidem circulo inſcripti, partem eſſe majorem radii ſecundùm prop. 11. l. 2 ſecti, conſtat ex cor. 3. p. 10. l. 4. Atque in fig. 13. trianguli ABG rectanguli ad A, latus AB eſt circuli EBDF radius; & latus AG eſt ſegmentum majus radii AE ſecundùm prop. 11. l. 2. ſecti, ut propoſitionis illius conſtructionem cum Scholii hujus conſtructione conferenti patebit. Ergo per 10. l. 13. & 47. l. 1. BG erit latus pentagoni eidem circulo inſcripti. Propoſitionis autem illius decimæ lib. 13. demonſtrationem, ad calcem libri ſexti apponemus.*]

Problema.

SUper datâ rectâ (AB) pentagonum ordinatum ita conſtrues. Seca (*a*) AB, ſic ut rectangulum ABC ſit æquale quadrato AC. Ex AB utrimque productâ aufer AD, BE æquales majori ſegmento AC. Centris A & D, intervallo AB deſcribe arcus duos ſe ſecantes in F: Item centris B & E, eodem intervallo ſe ſecantes in G. Rurſum centris F & G intervallo itidem AB, alios ſe ſecantes in I. Puncta A, F, I, G, B rectis lineis juncta dabunt pentagonum ordinatum, (hoc eſt, æquilaterum & æquiangulum) ſuper datâ AB. Fig. 14. (a) Per 11. l. 2.

Æquilaterum eſſe patet ex conſtructione: æquiangulum eſſe ſic demonſtrabitur. Ducatur DF. Patet ex conſtructione triangulum AFD eſſe Iſoſceles. Et baſis AD eſt majus ſegmentum lateris DF, extremâ & mediâ ratione (*b*) ſecti, (eſt enim DF æqualis AB, & AD æqualis AC.) Ergo angulus (*c*) DAF eſt duæ quintæ duorum rectorum. Ergo reliquus FAB eſt (*d*) tres quintæ duorum rectorum, ſive ſex quintæ unius recti; ac proinde eſt (*e*) angulus pentagoni ordinati. Eodem modo oſtenditur angulum GBA eſſe ſex quintas unius recti, ac proinde parem FAB, Unde neceſſe

(b) Confer p. 30. l. 6. cum p. 11. l. 2.
(c) Per cor. 1. p. 10. l. 4.
(d) Per 13. l. 1.
(e) Per cor. 1. p. 11. l. 4.

ceſſe jam eſt reliquos F, G, I, his æquales eſſe, ut patet ex 8. l. 1. ſi concipiatur ſubtendi recta FG.

[*Ducantur enim rectæ FG, FB: Propter triangula ADF, EBG ſuper baſibus æqualibus AD, EB, æqualia, erunt rectæ FG, DE (a) parallelæ, & proinde alterni anguli DAF, AFG; EBG, BGF (b) æquales; & eorum quilibet erit duæ quintæ duorum rectorum. Porro, cùm in triangulo Iſoſcele AFB angulus A ad verticem ſit tres quintæ duorum rectorum, (c) erit alteruter ad baſem, una quinta, & proinde BF biſecat angulum AFG, & angulus FBG (ABG—ABF, una nempe quinta ex tribus quintis ſubducta) continebit duas quintas, FGB duas, BFG unam: Igitur in triangulo BFG, latus FB lateri FG (d) æquale eſt Ergo triangula BAF, FIG ſunt ſibi mutuò æquilatera, & proinde (e) æquiangula, & angulus FIG continebit etiam tres quintas duorum rectorum, IFG unam, IGF unam. Ergo anguli IFG, GFA ſimul additi, efficiunt etiam tres quintas; & eodem modo angulus IGB continebit etiam tres quintas. Ergo pentagonum eſt æquiangulum. Conſtruitur ergo ſuper datâ rectâ AB pentagonum ordinatum.* Q. E. F.

Alio modo ſuper datâ rectâ AB conſtruetur pentagonum ordinatum, ſi ſuper AB tanquam baſi, ex parte contrariâ, fiat triangulum Iſoſceles ABX, cujus angulus ad baſem BAX vel ABX duplus ſit anguli X ad verticem; & productis XA, XB ad F, G, ut ſint AF BG ipſi AB reſpectivè æquales, centris F & G, radiis AF, BG, deſcribantur circuli ſe ſecantes in duobus punctis, quorum ab AB remotius ſit I, & ducantur FI, GI: Dico factum. Demonſtratio fere eadem erit cum priore: Ductâ enim AG, rectarum AB, FG parallelïſmus triangulorum ABE, ABG (f) æqualitate etiamnum (g) conſtabit.]

(a) Per 40. l. 1.
(b) Per 27. l. 1.
(c) Per 32. l. 1.
(d) Per 6. l. 1.
(e) Per 8. l. 1.
(f) Per 4. l. 1.
(g) Per 40. l. 1.

PROPOSITIO XII.

Fig. 15. CIrculo pentagonum ordinatum circumſcribere.

Inſcribatur pentagonum ordinatum per præced. GHIKM, ducanturque tangentes in punctis, G, H, I, K, M, quæ concurrant in B, C, D, E, F. Dico factum.

Ex centro duc rectas AG, AB, AH, AC, AI. Quoniam BG, BH ex uno puncto B, tangunt circulum, æquales (*h*) erunt. Trigona igitur GAB, HAB, ſibi mutuò æquilatera ſunt. Æquantur ergo (*i*) anguli O, P, item Q, S: ac proinde totus B duplus eſt ipſius P, & totus GAH duplus eſt S. Eâdem de cauſâ anguli C & HAI dupli ſunt ipſorum T, & N. Sed GAH & HAI æquales (k) ſunt, quia inſiſtunt arcubus æqualibus GH, HI, per conſtr, Ergo etiam eorum

(h) Per cor. 2. p. 36. l. 3.
(i) Per 8. l. 1.
(k) Per 26. & 29. l. 3.

rum dimidii S, N æquales erunt. Quoniam igitur in triangulis BAH, CAH, duo anguli S, N æquantur, itemque duo ad H (a) recti, latuſque AH eſt commune, etiam (b) BH, CH, itemque anguli P, T æquales erunt. Eodem modo oſtendam rectas BG, FG eſſe æquales. Igitur CB, FB duplæ ſunt æqualium BG, BH, ac proinde æquales. Eodem modo oſtendam reliqua latera pentagoni circumſcripti eſſe æqualia. Illud igitur æquilaterum erit. Eſt verò & æquiangulum, quia cùm jam oſtenſum ſit angulos B & C duplos eſſe æqualium P & T.; etiam ipſi æquales erunt: eodemque modo & reliqui. Ordinatum igitur pentagonum circulo circumſcripſimus. Quod erat faciendum. (a) Per 18. l. 3. (b) Per 26. l. 1.

Scholium. Eodem artificio circulo circumſcribitur ordinata figura quæcunque, ſi priùs illi ſimilis circulo inſcribatur: [*nempe ductis tangentibus ad illa circumferentiæ puncta, G, H, I, K, &c. ubi figuræ inſcriptæ anguli circumferentiam tangunt.*]

PROPOSITIO XIII. & XIV.

Pentagono ordinato circulum inſcribere, & circumſcribere. Fig. 161

Duos pentagoni angulos B, C biſeca rectis BA, CA concurrentibus in A. Ex A duc perpendicularem AL.

Circulus centro A per L deſcriptus, tanget omnia pentagoni latera. Circulus verò deſcriptus centro A per B, tranſibit etiam per C, D, E, F.

Pars 1. [*Ab angulis D, E, F ad punctum A, ducantur etiam DA, EA, FA.*] In trigonis DCA, BCA, quia latera DC, AC, (c) lateribus BC, CA, itemque (d) anguli P & O æquantur, etiam G & I æquales (e) erunt. Sunt verò (f) etiam toti B & D æquales. Quare cùm (g) angulus G ſit dimidius anguli B, etiam I erit dimidius ipſius D. Igitur D quoque biſectus eſt rectâ DA. Ob eandem cauſam, reliqui pentagoni anguli E, F ſunt biſecti: ac proinde omnes dimidii anguli inter ſe æquales erunt. Ducantur inſuper perpendiculares AM, AS, AN, AR. Quoniam igitur in trigonis LBA, MBA, anguli G, BLA æquantur angulis Q, BMA, latuſque BA commune eſt, etiam (h) AL, AM æquales erunt. Pari modo oſtendam reliquas AM, AS, AN, AR inter ſe æquari. Circulus ergo centro A tranſiens per L, tranſibit etiam per M, S, N, R: & quia anguli ad L, M, S, N, R recti ſunt per conſtr. tanget (i) quinque latera pentagoni. Quod erat primum. (c) Per hyp. (d) Per conſtr. (e) Per 4. l. 1. (f) Per hyp. (g) Per conſtr. (h) Per 26. l. 1. (i) Per 16. l. 3.

Pars 2. In trigono CAB, quia anguli O & G jam oſtenſi ſunt æquales, erunt latera AC, AB (a) æqualia; eâdemque ratione æquantur etiam AB, AF, AE, AD; ac proinde circulus centro A tranſiens per B, tranſibit etiam per C, D, E, F. Pentagono igitur circulum inſcripſimus & circumſcripſimus. Quod erat faciendum.

(a) Per 26. l. 1.

Fig. 16. [Scholium. *Eâdem methodo in qualibet figurâ æquilaterâ & æquiangulâ, & circa quamlibet figuram æquilateram & æquiangulam, circulus deſcribetur, ſi biſecentur duo quivis anguli proximi DCB, CBF rectis CA, BA, & a puncto concurſûs A, lateri cuivis BC demittatur perpendicularis AL: Circuli enim centro A radiis AL, AB deſcripti, erunt figuræ datæ alter inſcriptus, alter circumſcriptus.*

Cor. 1. *Hinc, ſi duo anguli proximi B, C figuræ ordinatæ biſecentur rectis BA, CA, concurrentibus in A, & a puncto concurſûs ducantur rectæ AD, AE, AF ad reliquos figuræ angulos; omnes anguli figuræ erunt biſecti. Unde* (b) *figura illa ordinata dividetur in tot triangula iſoſcelia æqualia, quot ſunt latera figuræ. Et ab A demiſſis AL, AM, &c. ad figuræ latera perpendicularibus; hæ latera* (c) *biſecabunt, & cum radii ſint inſcripti circuli, ſibi invicem æquales erunt.*

(b) Per def. 3. l. 4. & p. 6. & 26. l. 1.
(c) Per 2. ſchol. p. 26 l. 1.

Cor. 2. *Dato itaque figuræ ordinatæ latere, & radio circuli inſcripti, habetur figuræ illius area, ſi radio in lateris ſemiſſem* (d) *ducto, numerus inde proveniens multiplicetur per denominatorem figuræ. Sic area pentagoni BCDEF eſt AL* $\times$ *LB* $\times$ *5.*]

(d) Per ſch. p. 41. l. 1.

PROPOSITIO XV.

Fig. 17. *IN dato circulo Hexagonum ordinatum deſcribere.*

Ducatur diameter FAB. Centro B per centrum A deſcribe circulum, qui datum ſecet in C & D. Item centro F per A deſcribe circulum, qui ſecet datum in E & G. Sex puncta B, C, E, F, G, D rectis lineis connexa, dabunt quæſitum.

Ex centro A emittantur rectæ AC, AE, AG, AD. Patet triangula H, I, M, L (e) eſſe æquilatera. Deinde quia anguli CAB, EAF, ſinguli (f) efficiunt unam tertiam rectorum duorum, ac proinde ſimul duas tertias, patet (g) EAC etiam eſſe unam tertiam duorum rectorum. Anguli igitur EAC, CAB æquales ſunt. Sunt autem & latera EA, AC æqualia lateribus BA, AC. Ergo (h) baſis EC baſi CB, hoc eſt (ut jam oſtenſum,) radio AC æqualis eſt. Quare etiam N æquilaterum eſt. Eodem modo oſtenditur æquilaterum

(e) Ex 1. l. 1.
(f) Per cor 12. p. 23. l. 1.
(g) Per 13. l. 1.
(h) Per 4. l. 1.

laterum eſſe K. Quoniam igitur triangula omnia H, I, K, L, M, N æquilatera ſunt, patet latera ſingula CB, BD, DG, GF, FE, EC æquari radio circuli AC, ſeu AB, ac proinde inter ſe. Hexagonum igitur æquilaterum eſt. Eſt verò & æquiangulum, cùm ſinguli ejus anguli E, C, B, D, G, F conſtent duobus æquilateri trianguli angulis. Ergo Hexagonum quod circulo inſcripſimus, eſt ordinatum.

Corollaria.

1. LAtus hexagoni circulo inſcripti [*ſive chorda graduum* 60.] æquale eſt radio. [*Ergo ſinus* 30. *graduum æquatur radii* (a) *dimidio.*] (a) *Per cor.* 1. *p.* 3. *l.* 3.

2. Angulus hexagoni ordinati eſt quatuor tertiæ unius recti; conſtat enim ex duobus angulis trianguli æquilateri, quorum ſinguli conficiunt (*b*) duas tertias unius recti. [*Continet igitur angulum rectum cum tertiâ parte recti, hoc eſt, gr.* 90 + 30. = *gr.* 120.] *& cor. p.* 30. *l.* 3. (b) *Per cor.* 12. *p.* 32. *l.* 1.

3. Si ducatur inſuper diameter PS, perpendicularis alteri FB, & intervallo radii PA, centris P & S, ſectiones fiant in O & Q, in R & T; puncta P, E, O, F, R, G, S, D, T, B, Q, C rectis lineis connexa, dabunt duodecangulum ordinatum unâ circini aperturâ circulo inſcriptum. Id quod magno eſt uſui in Gnomonicâ. [*Atque hinc etiam diſcimus arcum quadrantalem PF in tres partes æquales PE, EO, OF* (*& proinde, continuâ* (c) *biſectione, in partes æquales* 6, 12, 24, 48, *&c.*) *partiri.*] *Fig.* 18. (c) *Per* 30. *l.* 3.

4. Ex demonſtratis elicitur etiam deſcriptio facillima trianguli æquilateri in circulo. Ductâ diametro FB, centro B per A centrum deſcribe arcum CAD. Puncta C, F, D rectis juncta dant æquilaterum quæſitum. *Fig.* 16.

5. Æquilateri trianguli latus (CXD) a diametro (BF) ad ipſum perpendiculari, quartam partem (BX) abſcindit. Nam anguli ACX, BCX, æqualibus arcubus GD, DB inſiſtentes, æquales (*d*) ſunt: & latera AC, CX æquantur lateribus BC, CX. Ergo AX, BX (*e*) æquales ſunt. Ergo BX eſt quarta pars diametri BF. (d) *Per* 29. *l.* 3. (e) *Per* 4. *l.* 1.

[Aliter. *Propter ACX, BCX, ut priùs æquales, & angulos ad X* (f) *rectos & proinde æquales, & latus CX commune, erit* (g) *AX* = *BX.*] (f) *Per hyp.* (g) *Per* 26. *l.* 1.

Scholium.

Problema.

HExagonum ordinatum ſuper datâ rectâ (BC) ita conſtrues. Fac (*b*) triangulum CAB æquilaterum ſupra datam CB. Centro A per B & C deſcribe circulum. Is capiet *Fig.* 17. (b) *Per* 1. *l.* 1.

capiet hexagonum ſuper datâ rectâ CB. Patet ex propoſ. & corol. 1.

Theorema.

Fig. 18. Quadratum ex latere trianguli æquilateri, triplum eſt quadrati ex ſemidiametro circuli cui inſcriptum eſt, adeoque ad quadratum diametri eſt ut 3. ad 4. [*Eſt p.* 12. *l.* 13. *Euclidis.*]

(a) *Per* 12. *l.* 2. (b) *Per cor.* 5. *præced.* (c) *Per* 8. *l.* 2.

Ducatur ſemidiameter AD. Quadratum FD æquatur quadratis (*a*) FA, DA, & rectangulo FAX bis. Sed rectang. FAX bis eſt par quadrato ſemidiametri FA, ſeu DA: (nam quia AX, XB æquales (*b*) ſunt, rectangulum FAX bis æquatur duobus rectangulis nempe ſub FA, AX, & ſub FA, XB, hoc eſt rectangulo (*c*) FAB; hoc eſt quadrato FA.) Ergo quadratum FD triplum eſt quadrati ex ſemidiametro.

(d) *Per cor.* 3. *p.* 4. *l.* 2.

Quia autem quadratum totius diametri FB quadruplum (*d*) eſt quadrati FA; patet quadratum FD eſſe ad quadratum diametri, ut 3. ad 4.

Corol. Hinc ſequitur latus æquilateri trianguli eſſe ad diametrum, ut radix quadratica ternarii eſt ad 2. radicem nempe quadraticam quaternarii, ac proinde eſſe lineas incommenſurabiles.

PROPOSITIO XVI.

Fig. 19. *In circulo quindecangulum ordinatum deſcribere.*

(e) *Per* 11. *l.* 4. (f) *Per cor.* 4. *p.* 15. *l.* 4.

Circulo inſcribe (*e*) latus pentagoni AC, & trianguli (*f*) æquilateri latus AD. Arcum CD biſeca in E. Ducta recta CE eſt latus quindecanguli.

Nam ſi tota peripheria ſtatuatur eſſe 15. erit arcus AC, 3. & arcus AD, 5. ac proinde arcus CD, 2. ideoque CE unum.

Corollaria.

Fig. 19. 1. Hac methodo innumeræ figuræ ordinatæ circulo inſcribentur. Nam ſi duarum ordinatarum latera AC, AD circulo ſint inſcripta, arcuum differentia CD continebit tot latera novæ figuræ ordinatæ, quot unitatibus differunt denominatores priorum. Denominator autem novæ figuræ habetur, ſi denominatores priorum inter ſe multiplicentur.

Ut ſi AD ſit latus quadrati, & AC decagoni. Denominatorum

torum differentia eſt 6. Igitur arcus CD continet 6. latera figuræ novæ. Ea verò eſt 40. laterum. Denominatores enim 4. & 10. inter ſe multiplicati faciunt 40.

[Cor. 2. *Hinc diſcimus arcum quadrantalem in 15. partes æquales dividere, (& proinde, continuâ* (a) *biſectione, in 30, 60, 120, &c. partes;) Si nempe arcus CE, pars decima quinta totius circumferentiæ, biſectione repetitâ dividatur in partes quatuor æquales. Et univerſaliter, ſi detur cujuſcunque figuræ ordinatæ circulo inſcriptæ latus BX; arcum circuli quadrantalem, repetitâ arcûs BX biſectione, in tot partes æquales, quot ſunt latera figuræ, dividere licebit: & continuâ porro biſectione, ſecabitur arcus quadrantalis in bis, quater, octies, &c. tot partes æquales, quot ſunt latera figuræ.*

(a) *Per* 30. *l.* 3.

Cor. 3. *Cùm arcus circuli quadrantalis gradus 90. contineat, & unuſquiſque gradus ſcrupula prima 60; circumferentiæ quadrans igitur ſcrupula prima* (90 × 60, *ſive*) 5400. *continebit. Si itaque per cor. præced. quadrans in partes 120 dividatur, earum ſingulæ ſcrupula prima 45* $\left(=\frac{5400}{120}\right)$, *nempe tres quartas unius gradûs continebunt. Arcus autem adeo minutus, abſque errore ſenſibili, in partes quotvis æquales ac ſi eſſet* (b) *linea recta, dividi poteſt. Dividatur itaque in tres partes æquales, quarum ſingulæ 15 ſcrupula prima, ſive gradus quadrantem exhibebunt; unde etiam gradûs ſemiſſem* (= 15 + 15′) *& gradum integrum* (= 15 + 45) *obtinebimus. Præterea, triſectione arcûs 15′, habemus arcum 5′, & quiniſectione hujus, arcum unius ſcrupuli primi; unde obſcurum eſſe nequit, quomodo (ſi circulus datus ſatis amplus fuerit) diviſio in ſcrupula ſecunda effici poterit, atque ita porro. Quod ſi arcus 45′ curvior videatur quàm ut ſecaretur ad libitum ac ſi linea recta eſſet; continuâ tamen biſectione, ad arcum lineæ rectæ ſatis propinquum tandem perveniemus. Sic* $22'\frac{1}{2}$ *continent tres octantes,* $11'\frac{1}{4}$ *tres partes decimas ſextas unius gradûs; & ſic porro. Liquet igitur, quomodo circulus in gradus ſuos, graduumque ſemiſſes, quadrantes, octantes, &c. vel, ſi ita lubeat, in ſcrupula prima; ſecunda, tertia; &c. mechanice ſaltem dividi poteſt.*

(b) *Per* [illegible] *p.* 10. *l.* 6.

Scholium 1. *Circuli autem peripheria dividi poteſt Geometrice in partes*

4, 8, 16, *&c. per p.* 6. *l.* 4. *& p.* 9. *l.* 1.
3, 6, 12, *&c. per p.* 15. *l.* 4. *cum cor.* 4. *&* 3.
5, 10, 20, *&c. per p.* 11. *cum cor.* 2. *&* 5. *p.* 10. *l.* 4.
15, 30, 60, *&c. per p.* 16. *l.* 4. *cum cor.* 2.]

Scholium.

Scholium.

NOndum reperta ars eſt, quâ ſolo circino & regulâ inſcribantur circulo figuræ ordinatæ laterum 7, 9. 11, 13, 14, 17, &c. cùm illa inſcripto figurarum dependeat a diviſione circumferentiæ in partes datas, quæ etiamnum deſideratur. Licebit tamen, circuli circumferentiâ in 360. partes diviſâ, mechanice figuras quaſcunque ordinatas circulo inſcribere hunc in modum.

Problema 1.

Fig. 19. GRadus 360. (hoc eſt, totam circumferentiam) divide per denominatorem polygoni inſcribendi, (exem. gr. nonanguli.) Quot unitatibus conſtat quotiens (40.) tot graduum fac in centro angulum AGK. Ducta recta AK erit latus figuræ quæſitæ (nonangulæ) circulo inſcribendæ.

Problema 2.

Fig. 19. AT ſuper datâ rectâ quamvis figuram ordinatam deſcribes præſidio tabellæ ſequentis:

Angulus rectus eſt ad angulum figuræ,

			differ.
In Pentagono	ut 5.	ad 6...	1
Hexagono	ut 3.	ad 4...	1
Heptagono	ut 7.	ad 10...	3
Octogono	ut 2.	ad 3...	1
Enneagono	ut 9.	ad 14...	5
Decagono	ut 5.	ad 8...	3
Hendecagono	ut 11.	ad 18...	7
Dodecagono	ut 3.	ad 5...	2

Fig. 19. Oporteat igitur ſuper datâ rectâ XB heptagonum ordinatum deſcribere. Centro X, radio XB deſcribe circulum, a quo abſcinde quadrantem BO. Vide in tabulâ quæ ſit proportio recti anguli ad angulum heptagoni: reperies, ut 7. ad 10. & differentia eſt 3. Quadrantem igitur partire in 7. arcus æquales, quorum adhuc tot ipſi adde ex O in N, quot unitates habet differentia. Per tria puncta B, X, N deſcribe (a) circulum: hic capiet heptagonum ſuper datâ rectâ XB.

(a) *Per* 5. *l.* 4.

Tabella confecta eſt ope theorematis 2. in ſchol. poſt 32. l. 1. quo reperitur numerus rectorum angulorum, quos efficiunt

efficiunt anguli cujuſcunque figuræ rectilineæ, qui numerus diviſus per denominatorem figuræ, exhibet denominatorem proportionis anguli figuræ ad rectum.

Quoniam verò de figuris ordinatis multa hactenus ſunt propoſita, finiat hunc librum Procli celebre theorema.

Theorema.

TRes tantùm figuræ ordinatæ videlicet 6. triangula æquilatera, 4. quadrata, 3. hexagona, ſpatium replere poſſunt: Hoc eſt unam continuam ſuperficiem conſtituere. Quod ſic demonſtratur. Ut aliqua figura ordinata ſæpius repetita poſſit replere ſpatium, requiritur ut anguli plurium ejus ſpeciei figurarum circa unum punctum compoſiti, poſſint conficere quatuor rectos; tot enim circa unum punctum poſſunt conſtitui, ut patet ex coroll. 3. p. 13. l. 1. exempli gr. ut triangula æquilatera poſſint replere ſpatium, requiritur, ut aliquot anguli talium triangulorum N, M, L, K, I, H, circa punctum A compoſiti, efficiant quatuor rectos. Atqui quatuor rectos efficiunt 6. anguli trianguli æquilateri; nam unus facit duas tertias (*a*) unius recti, ac proinde 6. faciunt 12. tertias unius recti, hoc eſt 4. rectos;) item 4. anguli quadrati, ut patet; item 3. anguli hexagoni; (unus enim facit 4. tertias (*b*) unius recti ac proinde 3. faciunt 12. tertias unius recti, hoc eſt rurſum 4. rectos.) Ergo, &c.

Fig. 17.

(a) Per coroll. 12. p. 32. l. 1.

(b) Per coroll. 2. p. 15. l. 4.

Quòd autem id nulla alia figura poſſit, liquidò conſtabit; ſi angulum ejus repertum, ut ſupra, quocunque numero multiplices: ſemper enim aut deficient a 4. rectis, aut excedent.

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ

LIBER QUINTUS.

Quintus hic Elementorum liber demonſtrandis libri ſexti propoſitionibus omnino eſt neceſſarius. Doctrinam quam continet frequentiſſime uſurpamus. Argumentandi verò ratio e proportione Geometricâ petita, eſt plane ſubtiliſſima, ſoliſſima, breviſſima. Cujuſmodi ratiocinandi methodo, tanquam Logicâ *quadam*, Mathematica, Geometria, Arithmetica, Muſica, Aſtronomia, Statica, *& reliqua omnes Matheſeos partes maxime utuntur; utpote qua proportionibus quibuſdam inter ſe connexis fere tota nituntur; modoſque de proportionalibus ratiocinandi e libro hoc quinto mutuari ſolent.* Geometria *quidem* practica, *qua linearum, figurarum, atque corporum menſuras complectitur, e proportionum doctrinâ plerumque derivatur. Regula* Arithmeticæ *ad unam omnes ex hujuſce quinti libri propoſitionibus, ſine ſeptimo, octavo, nono de numeris ex profeſſo tractantibus, demonſtrari poſſunt. Antiquorum* Muſicam *proportiones Geometricas Sonorum modulamini applicatas rite dixeris: quod idem fere de* Staticâ, *corporum ponderibus applicatâ, poſſis aſſerere. Ut rem totam paucis complectar, ſi proportionis doctrinam e Matheſi abſtuleris, nihil fere praclarum aut egregium relinques.*

Quanti momenti in Geometriâ ſit ſcientia proportionum, nemo eſt Mathematicus, qui ignoret. Ea traditur ab Euclide toto quinto & ſexto libro. Sed quamvis illi cæteriſque elementorum conditoribus plurimùm debeamus; in iis tamen, quæ de proportione tradiderunt, deſiderari aliquid videtur. Difficultas tota in definitione 5. l. 5. vertitur: ubi tradit Euclides, quid ſit quatuor magnitudines eſſe proportionales, ſive duas rationes, eaſdem, ſimiles, æquales eſſe. Definit igitur duas rationes tum æquales dici ſeu ſimiles, quando antecedentia quocunque numero æqualiter multiplicata, conſequentibus etiam quocunque numero æqualiter multi-

multiplicatis, ſemper vel ſimul æqualia ſunt, vel ſimul majora, vel ſimul minora (*a*). Atque ex eâ definitione omnes deinde 5. & 6. libri demonſtrationes mediate vel immediate deducit. Hæc eſt doctrinæ Euclideæ ſumma: quæ multiplicem, ut dixi, difficultatem habet. Nam inprimis certum eſt eâ definitione non naturam æqualium rationum, ſed affectionem ſolummodo aliquam explicari. Deinde illa multiplicium proprietas adducitur, vel tanquam ſignum infallibile rationum æqualium, ut quandocumque ea demonſtrata fuerit de quibuſvis rationibus, inferre certò liceat æquales eas eſſe; vel is ſenſus illius eſt, ut per magnitudines eandem rationem habentes, nihil aliud intelligi velit, quàm earum multiplices modo jam dicto excedere, vel excedi. Si primum; demonſtrare debuerat, eam affectionem omnibus & ſolis rationibus æqualibus ineſſe, ut ex eâ, rationum æqualitas certò poſſet inferri. Id verò minime vulgare theorema eſt, quod neque Euclides, neque alius poſt Euclidem ullus demonſtravit. Si ſecundum; ſecuri quidem erimus de veritate theorematum in ſenſu definitionis acceptorum, minime tamen ex vi demonſtrationum nobis conſtare poterit de abſolutâ rationum æqualitate. Exemplum eſto prima ſexti. Certi erimus ex Euclideâ demonſtratione, rationem triangulorum ABC, & DEF æqualem eſſe rationi baſium AC, & DF, per rationum æqualitatem ſolùm intelligendo dictam illam proprietatem multiplicium; non colligemus tamen rationes illas triangulorum, baſium rationibus vere & abſolute æquales eſſe, cùm demonſtratum non ſit affectionem illam multiplicium cum abſolutâ & verâ rationum æqualitate neceſſariò eſſe connexam. Quomodocunque igitur illa definitio accipiatur, librorum 5. ac 6. demonſtrationes vacillant, quamdiu demonſtratum non fuerit veram rationum æqualitatem cum eâ multiplicium proprietate ſemper eſſe connexam. Denique ut ſibi conſtarent omnia, tamen ille multiplicium labyrinthus mihi, aliiſque ſemper diſplicuit; & tyronibus plurimum ſemper faceſſivit negotii, quorum ita plerumque mentes intricat, ut exitum vix reperiant. Quare ut doctrinam proportionum, quæ quaſi medulla, atque anima Geometriæ, & univerſæ Matheſeos eſt, ab eâ labe vindicemus, hæc tria præſtare conabimur.

(a) *Hæc definitio declaratur infra poſt defin. 6.*

Fig. 2. l. 6.

Primò oſtendam libri quinti theoremata, quæ ab Euclide per multiplices demonſtrantur, eo fere loco habenda eſſe, quo axiomata, ac proinde declaratione potius ſubinde aliquâ, quàm demonſtratione egere. Ita proportionum cognitio, quam ille circuitus multiplicium difficilem hactenus & perobſcuram effecerat, plana & expedita reddetur.

Secundò demonſtrabimus, quandocumque antecedentium quælibet æque multiplices, conſequentium quibuſlibet æque multiplicibus vel pariter majores ſunt, vel pariter minores, vel pariter æquales, tum rationes eſſe vere æquales, ſeu ſimiles. Quo ſtabilito, omnes Euclideæ demonſtrationes, totaque illius de proportionibus doctrina ſubſiſtet; ut qui noſtris probationibus contentus non ſit, ad Euclideas quamvis prolixas, jam tamen ſecuras ac ſolidas ſe poſſit convertere. Aſſignabimus item (ac demonſtrabimus) proportionum æqualium aliud indicium clariſſimum ac primum, ex quo omnes Quinti libri propoſitiones deducere poterit qui voluerit.

Tertiò, de proportionum denominatoribus, algorythmo, compoſitione, tractatum ſubjungam, penitioris Geometriæ ſtudioſis plane neceſſarium, ubi etiam demonſtrabimus axioma illud, ſeu potius theorema hactenus indemonſtratum, rationem extremorum ex rationibus quotlibet intermediorum componi.

Tyronibus ſatis erit definitiones & primam partem perlegere.

Monitum ad Tyrones.

QUanti momenti in Geometriâ ſit ſcientia proportionum; nemo eſt Mathematicus, *ut recte notat Tacquetus*, qui ignoret. *Eſt enim ipſa quodammodo ſcientiarum Mathematicarum medulla; & varii de proportionalibus ratiocinandi modi, utiliſſimi ſimul ſunt & certiſſimi; neque abſque iis pedem vel hilum promovere licet. Verùm hanc doctrinam animis humanis cum communi ratione quaſi congenitam exiſtimo; varioſque de proportionalibus ratiocinandi modos, quos integro hoc libro, per ambages quamplurimas, tradit Euclides, non tam* demonſtratione *proprie dictâ, quàm* illuſtratione *nonnullâ, & exemplis indigere cenſeo. Eos autem qui longo propoſitionum circuitu doctrinam hanc facillimam tradendam volunt, rem per ſe clariſſimam nube quadam involvere, & longe difficiliorem reddere omnino puto. Rei ſummam paucis aperiam. Notum eſt quatuor quantitates tum* proportionales, *ſive analogias tum* ſimiles *aut* æquales *eſſe, cùm Quantitas prima toties continet ſecundam, quoties tertia continet quartam: vel cùm prima toties continetur in ſecundâ, quoties tertia continetur in quartâ. Sic* 16 : 8 :: 4 : 2, *atque etiam* 3 : 9 :: 4 : 12. *ſunt* ſimiles *rationes: quoniam in exemplo priore, conſequentia* 8 *&* 2 *bis in antecedentibus ſuis* 16 *&* 4 *reſpectivè continentur: adeoque*

ratio

ratio dupla *in utriſque obſervatur. Et in exemplo poſteriore rationes ſunt etiam* ſimiles, *quoniam conſequentia* 9 *&* 12 *ter antecedentia ſua reſpectivè continent; adeoque ratio* ſubtripla *in utriſque obſervatur.* (*Neque ulla eſt quantitatum commenſurabilium ratio quæ non poſſit per numeros certos; neque ſane incommenſurabilium ulla quæ non poſſit per numeros ad veram rationem in infinitum approximantes certiſſime exprimi.*) *Ratio autem duarum quantitatum, antecedentis ad conſequentem, rectè per quotum ex antecedente per conſequentem diviſa ortum exprimitur. Sic ratio* 16 *ad* 8 *æquivalet* $\frac{16}{8}$ *vel* $\frac{2}{1}$, *ſive* 2; *ea nempe ratio dupla eſt. Et ratio* 3 *ad* 9 *eſt* $\frac{3}{9}$ *ſive* $\frac{1}{3}$, *nempe ſubtripla. Et ratio* 8 *ad* 3 *eſt* $\frac{8}{3}$ *ſive* $2\frac{2}{3}$, *hoc eſt, ratio dupla bipartiens tertias. Ejuſmodi verò quotus,* Rationis Exponens *appellatur. Porro, ex ante dictis liquet ſimiles rationes quaſcunque non tantùm per numeros diverſos, ſed etiam per eoſdem rectiſſimè exponi. Sic ſane ratio dupla, ſive* 2 *ad* 1 *rationem tam* 16 *ad* 8, *quàm* 4 *ad* 2 *pleniſſimè deſignat: Ratio ſubtripla, ſive* 1 *ad* 3 *non minùs exprimit rationem* 4 *ad* 12, *quàm rationem* 3 *ad* 9, *uti oppidò eſt manifeſtum. Si itaque quatuor quantitates ſint proportionales,* $A : B :: \alpha : \beta$; *quæritur in hoc quinto libro quot* ſimilibus *modis hæ* ſimiles *rationes mutari, atque inter ſe componi poſſint, ita ut rationes emergentes ſint etiamnum utrinque* ſimiles? *Reſponderi verò debet, modis omnino omnibus, quos quiſquam imaginari queat. Cùm enim tam ratio* A *ad* B, *quàm ratio* α *ad* β *inter ſe* ſimiles *ſint, per eoſdem numeros exprimi utraque poterunt hoc modo,* $A : B :: 9 : 3 ::$ *&* $\alpha : \beta :: 9 : 3$. *Atque proinde omnes omnino rationes utrinque aut* Alternando, *aut* Invertendo, *aut* Componendo, *aut* Dividendo, *aut* Convertendo, *aut* Miſcendo *emergentes, per eoſdem plane numeros exprimentur; & eandem proinde rationem utrinque ſervabunt. Sic e. g.* $A + B : B :: \alpha + \beta : \beta$; *quia utramque proportionem exprimit* $9 + 3 : 3$; *quæ eſt rationis* compoſitio. *Neque aliter de reliquis eſt cenſendum. Hoc itaque tantùm obſervent Tyrones, ut rationes quas tractant ubique* ſimiles, *modo plane* ſimili *mutentur & ordinentur. Neque exinde locus erit dubitationi, quin ex hujuſmodi ordinatione aut mutatione* conſimili, *rationes ubique* conſimiles *ſint oriundæ. Mirari autem ſubit eorum neminem qui elementa Geometrica hactenus conſiderunt, faciliimum hoc æqualium rationum indicium illuſtrando huic libro quinto, & proportionum doctrinæ faciliùs explicandæ adhibuiſſe. En verò modos primarios de* ſimilibus *rationibus argumentandi, quos adhibet Geometria, in brevem Tabellam conjectos:*

Sit $A : B :: \alpha : \beta :: 9 : 3.$

Erit ergo

Alternando ſive permutando, $A : \alpha :: B : \beta :: 9 : 9 :: 3 : 3.$

Invertendo, $B : A :: \beta : \alpha :: 3 : 9.$

Componendo, $A+B : B :: \alpha+\beta : \beta :: 9+3\,(12) : 3.$

Dividendo, $A-B : B :: \alpha-\beta : \beta :: 9-3\,(6) : 3.$

Convertendo, $A : A+B :: \alpha : \alpha+\beta :: 9 : 9+3\,(12.)$

vel $A : A-B :: \alpha : \alpha-\beta :: 9 : 9-3\,(6)$

Mixtim, $A+B : A-B :: \alpha+\beta : \alpha-\beta :: 9+3\,(12.) : 9-3\,(6.)$

Ex æquo ſit $A : B :: \alpha : \beta.$ & $B : C :: \beta : \gamma.$ *Erit* $A : C :: \alpha : \gamma.$
$9 : 3 :: 9 : 9 :$ & $3 : 1 :: 3 : 1.$ *Erit* $9 : 1 :: 9 : 1.$ *Ubi ratio A ad C (ſeu 9 ad 1)* componi *dicitur ex rationibus A ad B, & B ad C, (vel ex 9 ad 3, & 3. ad 1.)*

Ex æquo perturbatè ſit $A : B :: \alpha : \beta.$ $8.\ 3 :: 16.\ 6.$
Et $B : C :: \delta : \alpha.$ $3.\ 2 :: 24.\ 16.$
Erit $A : C :: \delta : \beta.$ $8.\ 2 :: 24.\ 6.$

Ubi, ſicut ratio A ad C (ſive 8 ad 2) componitur ex rationibus A ad B, & B ad C (vel ex 8 ad 3, & 3 ad 2) directè poſitis; ſic ratio δ ad β (ſive 24 ad 6) componitur ex rationibus δ ad α, & α ad β (ſive ex 24 ad 16, & 16 ad 6) ſed transpoſitis,

Cæterum de compoſitione rationum vide plura in def. 5. libri 6.

Denique ſi fuerit $A : B :: C : D :: 9 . 8,$
Et $\alpha : \beta :: \gamma : \delta :: 3 . 4.$
Erit $A \times \alpha : B \times \beta :: C \times \gamma : D \times \delta :: 27 . 32.$
Et $\frac{A}{\alpha} : \frac{B}{\beta} :: \frac{C}{\gamma} : \frac{D}{\delta} :: 3 . 2.$

Qui itaque hoſce de proportionalibus ratiocinandi modos probè callet, eoſque pro re natâ in uſum proferre novit, propoſitionibus libri quinti particularibus (niſi forte illis quæ mere ſunt axiomata ſuâ luce clariſſima,) perrarò indigebit. Unde ſane, ſi mihi eſſet integrum, rationum doctrinam ſine methodo Euclideâ a primordiis tradidiſſem: ſed cùm Tacquetum noſtrum, ordinis Euclidei ubique obſervantiſſimum, eumque integrum Lectori propinare certum ſit, pluribus ſuperſedebo.

*Hæc monuit Vir ille Clariſſ. mihique amiciſſimus qui editionem primam Cantabrigienſem recenſuit. Atqui velim potius ut ipſum Tacquetum hoc loco audiant Tyrones, ac definitionibus, primaque parti hujus libri incumbant: quorum notitia, cùm modico tempore & nullo fere negotio acquiri poteſt, haud temere omitti debet; maxime, cùm ipſæ propoſitiones Euclideæ paſſim in aliis libris mathematicis laudentur, quin

quin & earum nonnulla, haud paucis quæ in hiſce elementis poſtea traduntur, faciliùs intelligendis, perutiles videantur, ſi non neceſſaria. Nolim tamen ut ea quæ in hoc monito continentur, negligant Tyrones: ſed potius ut, antequam librum ſextum aggrediantur, præcipuos ex analogiâ ratiocinandi modos, perlecto hoc compendio, memoriæ inſigant. Porro, reliquas hujus l. 5. partes duas, 2. & 3. monente etiam Tacqueto, tyronibus omittere licebit. Et quidem, ea quæ continent, vera atque accurata eſſe omnia, pollicari non auſim.]

PRIMA PARS.

Proportionum elementa faciliori methodo proponuntur.

DEFINITIONES.

1. PArs aliquota magnitudinis eſt, quæ aliquoties repetita magnitudinem metitur, ſive adæquat. Pars aliquanta, quæ non metitur.

Longitudo unius pedis eſt pars aliquota longitudinis 10. pedum, quia illam decies repetita metitur. Longitudo verò 4. pedum, eſt pars aliquanta lineæ 10. pedum, quia aliquoties repetita, nempe bis, illam non adæquat, repetita verò ter excedit. [*Et hujuſmodi quidem pars aliquanta eſt toti commenſurabilis: ſi verò e quadrati cujuſvis diametro ſumatur recta lateri illius quadrati æqualis; ejuſmodi recta erit pars aliquanta quidem diametri, ſed toti incommenſurabilis. Vide Schol. p. 47. l. 1.*]

2. Magnitudo magnitudinis multiplex eſt, cùm minor metitur majorem, ac proinde ejus pars aliquota eſt; ſive cùm major minorem aliquoties continet præciſè.

3. Ratio ſive proportio, eſt duarum ejuſdem generis magnitudinum mutua quædam ſecundùm quantitatem habitudo,

Sunt igitur in omni proportione duo termini, quorum ille Antecedens dicitur, qui primò nominatur, ſive is qui nominandi caſu effertur: alter Conſequens.

Cùm antecedens & conſequens ſunt æquales, proportio æqualitatis dicitur; cùm inæquales, dicitur eſſe proportio inæqualitatis: [*& quidem majoris inæqualitatis, ſi terminus antecedens ſit conſequente major; minoris, ſi minor.*]

4. Ratio ſeu proportio rationalis eſt, quæ exiſtit inter magnitudines commenſurabiles, & numeris exprimi poteſt.

Proportio irrationalis eſt, quæ exiſtit inter magnitudines incommenſurabiles, & nullis numeris explicari poteſt. [*Sic proportio 2 ad 1 rationalis eſt: Sed $\sqrt{2}$ ad 1 eſt proportio irrationalis; nam $\sqrt{2}$ nullis numeris explicari poteſt.*]

Porro commenſurabiles quantitates ſunt, quas aliqua communis menſura metitur; incommenſurabiles, quas nulla metitur menſura communis.

Fig. 1. & 5. 5. Duæ rationes (A ad B, & C ad F) ſunt ſimiles, æquales, eædem; cùm unius antecedens (A) æque ſeu eodem modo (hoc eſt nec magis, nec minùs) continet ſuum conſequens (B,) quo alterius antecedens (C) continet ſuum conſequens (F.)

Fig. 2. Vel quando unius antecedens (A) eodem modo continetur in ſuo conſequente (B,) quo (C) antecedens alterius in ſuo (D.) [*Quantitates autem eandem habentes rationem, proportionales vocantur.*]

Fig. 3. 6. Duæ rationes ſunt diſſimiles, ſive una ratio eſt major alterâ, quando unius antecedens (I) magis continet ſuum conſequens (L,) quàm alterius antecedens (O) contineat ſuum conſequens (Q;) vel quando antecedens unius, mi-
Fig. 4. nùs continetur in ſuo conſequente, quàm antecedens alterius contineatur in conſequente ſuo.

Proportionum æqualitas & inæqualitas explicatur.

Quid porro ſit unum antecedens æque, vel magis continere ſuum conſequens, quàm antecedens alterum contineat ſuum, ſi proportiones ſint rationales, definiri &
Fig. 1. explicari ulteriùs poteſt per numeros: ut ſi A ſit triplum B, & C triplum F; perſpicuum erit, quid ſit, A æque ſeu
Fig. 3. eodem modo continere B, quo C continet F: vel ſi I ſit triplum L, O verò duplum Q; conſtabit rurſum, quid ſit, I magis continere L, quàm O contineat Q. At ſi pro-
Fig. 5. portiones fuerint irrationales, ea res explicari ulteriùs nec poteſt, nec debet. Dentur magnitudines incommenſurabiles, A, B: perſpicuum eſt A non ſolùm majus eſſe B, ſed etiam certo quodam modo eſſe majus; (A quippe aliter continet B, quàm alia quælibet major minorve quàm A:) neque tamen ulteriùs quæri, aut explicari debet, quis ſit
Fig. 5. certus ille modus, quo A continet B; quia per nullos numeros explicabilis eſt. Itaque quemadmodum datis binis incommenſurabilibus quantitatibus, non debet ulteriùs quæri, quid ſit unam certo modo continere alteram; ita neque cùm dantur quatuor proportionales incommenſurabiles, quæri debet ulteriùs, quid ſit, C eodem modo contine-

nere

nere D, quo A continet B. Sicuti enim modus quo A continet B, ulteriùs eſt inexplicabilis; ita plane etiam identitas modi quo A continet B, cum modo quo C continet D, ulteriùs inexplicabilis eſt. [*Identitas autem illorum modorum, ex definitione Euclideâ rationum æqualium, de quâ infra, vel ex altero illo, quod ſequitur, rationum æqualium indicio Tacquetiano, ſatis pro rei naturâ, videtur explicari.*]

Quòd verò cuicumque proportioni irrationali A ad B, dabiles ſint infinitæ aliæ proportiones irrationales æquales, majores, minores, diverſis terminis conſtantes, facile poterimus intelligere hunc in modum. Sumatur quæcunque quantitas C. Et auferatur B ex A incommenſurabili ſecum quantitate, quoties poteſt, puta ter: & ſuperſit EF. Sit deinde O tertia pars ipſus C. Sit inſuper quæpiam X ipſi C incommenſurabilis, quæ major ſit quàm O. Quoniam igitur A continet B plus quàm ter; C verò continet X minùs quàm ter, (nam C continet præciſè ter O minorem quàm X;) erit ratio irrationalis C ad X minor ratione irrationali A ad B. Accipiatur jam Q, quarta pars C, & quæpiam eſto Z, ipſi C incommenſurabilis, quæ minor ſit quàm Q. Quoniam igitur A continet B minùs quàm quater; C verò continet Z plus quàm quater, (cùm C præciſè quater contineat Q, majorem quàm Z;) erit ratio irrationalis C ad Z major ratione irrationali A ad B. *Fig. 18*

Jam verò, quia C ad aliquam X minorem rationem habet quàm A ad B; & rurſum, quia C ad aliquam Z majorem rationem habet quàm A ad B; manifeſtum eſt etiam C ad aliquam D mediam inter X & Z, eandem habere rationem quàm A ad B. Quod quidem perinde clarum eſt lumine naturali, atque iſtud: dabile eſt majus quàm P, & dabile eſt minus quàm P; ergo dabile eſt æquale aliquod ipſi P.

Quid in proportionum æqualium definitione Euclideâ deſideretur.

QUod ad Euclidem attinet, is duas proportiones A ad B, C ad F æquales eſſe dicit, cùm antecedentium quæcunque æque multiplices I, Q, conſequentium quibuſcumque æque multiplicibus L, R, vel ſimul majores ſunt, vel ſimul minores, vel ſimul æquales: hoc eſt, cùm I ſuperante L, etiam Q ſemper ſuperat R; & cùm I ſuperatur ab L, etiam Q ſemper ſuperatur ab R; & cùm I eſt æqualis L, etiam Q ſemper eſt æqualis R. Ubi bene notandum eſt, Euclidem non aſſumere æque multiplicium exceſſus defectuſque *Fig. 22*

proportionales, ſeu ſimiles,ſic enim ineptè idem per idem explicaſſet; ſed exceſſus & defectus ſimpliciter. Nihilominus hîc aliquid in ſummo Geometrâ deſiderari jam ſupra declaravimus. Nam vel cupit hiſce verbis rationes æquales definire, & ſic rei definitæ proprietatem pro definitione affert; evidens quippe eſt, hanc multiplicium affectionem ex rationum æqualitate profluere: Vel adducit tanquam indicium primum & infallibile rationum æqualium; & ſic demonſtrare debuerat, eam cum rationum æqualitate ita ſemper eſſe connexam, ut ex illâ certò poſſit inferri; quæ quidem connexio & perobſcura & demonſtratu difficilis eſt: Vel denique per rationum æqualitatem nihil aliud intelligit, quàm ſimultaneum illum exceſſum defectumve multiplicium; Et ſic toto 5. ac. 6. libro, cùm quatuor magnitudines proportionales eſſe demonſtrat, nihil ſciemus aliud, quàm dictum exceſſum & defectum illis competere, incerti plane, utrùm magnitudines de quibus agitur, ſint verè proportionales.

[*Cùm in definitione rationum æqualium Euclides nihil aliud, quàm quo ſenſu voces illas acceperit, pro more Mathematicorum oſtendere voluerit; non video cur eapropter tantopere culpandus ſit: maximè, cùm definitio Euclidea omnibus omnino rationibus æqualibus verè conveniat, ſive rationales fuerint, ſive irrationales, ut in parte 2. hujus lib. 5. Tacquetus ipſe demonſtrat, quod etiam cuilibet ipſam definitionem accuratiùs perpendenti, ſatis manifeſtum erit. Vide quæ ad def. 36. L. 1. notavimus: ad eundem enim lapidem utrobique offendit noſter. Cùm tamen Tacqueti methodum neceſſe eſt ut ſequamur; videamus tandem, quodnam aliud rationum æqualium indicium univerſale nobis exhibet.*]

Proportionum æqualium aliud indicium primum & infallibile aſſignatur.

QUod ſi rationum æqualium deſideretur indicium infallibile, & facile, & primum; nos tale aſſignabimus, demonſtrabimuſque theor. 5. & 6. partis 2. [*At verò demonſtratione operoſâ non videtur indigere hoc rationum æqualium indicium; ex definitionibus enim quintâ & ſextâ immediatè fluit; vel potiùs, tanquam definitionum iſtarum illuſtratio quædam exiſtimari debet.*] Eſtque ejuſmodi.

Fig. 26. Rationes [majoris inæqualitatis] æquales ſunt, (AB ad CF; GM ad NQ;) quando & conſequentes ipſæ, & conſequentium ſimiles partes aliquotæ quæcunque, in antecedentibus æquali ſemper numero continentur,

Ut

Ut ſi una decima ipſius CF continetur in AB ducenties, una quoque decima NQ continetur ducenties in GM; & ſi una centeſima CF continetur millies in AB, etiam una centeſima NQ continetur millies in GM, & ſic deinceps in infinitum; erit AB ad CF, ut GM ad NQ. [*Ita enim fiet ut (ſecundum def. quintam) prioris rationis antecedens AB æque ſeu eodem modo (hoc eſt, nec magis nec minus) contineat ſuum conſequens CF, quo poſterioris antecedens GM continet ſuum conſequens NQ.*

Vel ſi minoris inæqualitatis rationes, CF ad AB; NQ ad GM ponantur æquales; tum antecedentes ipſæ, & antecedentium ſimiles partes aliquotæ quæcunque, in conſequentibus ſuis æquali ſemper numero continebuntur. Hoc enim rurſum poſtulat def. quinta, ut ſcil. antecedens CF eodem modo contineatur in ſuâ conſequente AB, quo antecedens NQ in ſuâ GM.]

Inæquales autem rationes ſunt, quando aut conſequentes ipſæ, aut conſequentium aliquæ ſimiles aliquotæ in antecedentibus inæquali numero continentur. Et illa ratio major eſt, cujus vel conſequens, vel conſequentis aliquota, ſæpius continetur in antecedente.

Ut ſi una centimilleſima CF ſæpius continetur in AB, quàm una centimilleſima NQ, in GM, erit ratio AB ad CF major ratione GM ad NQ, quamvis innumeræ aliæ conſequentium CF, NQ ſimiles aliquotæ in antecedentibus AB, GM æquali numero continerentur. [*Sequitur ex def.* 6.] *Fig.* 26

Porro æquali numero contineri dicuntur, cùm ablatæ quoties poſſunt, æquali numero ſunt ablatæ.

Ex hoc indicio, rationum irrationalium æqualitas & inæqualitas continuò eluceſcit, cùm ſic antecedentes conſequentibus incommenſurabiles, per ablata conſequentibus commenſurabilia & proportionalia exhauriantur.

7. Similes partes ſunt, quæ in ſuis totis æque, ſeu eodem modo continentur, ut qualis pars ſui totius eſt una, talis pars ſui totius ſit altera. Quod ſane nihil aliud eſt, quàm partes ad ſua tota [*vel etiam tota ad partes ſuas*] eandem habere rationem, [*ſive partes illæ totis ſuis commenſurabiles fuerint, ſeu incommenſurabiles.*]

Similes verò partes aliquotæ ſunt, quæ ſua tota æqualiter metiuntur; ut ſi utraque ſit ſui totius una tertia, una decima, &c.

8. Magnitudines (A, B, C, D) continuè proportionales dicuntur, cùm medii termini (B, C) bis ſumuntur; hoc eſt, cùm ſunt conſequens reſpectu præcedentis, & antecedens reſpectu ſequentis. *Fig.* 6.

Continuas

Continuas rationes ſic efferimus: A eſt ad B, ut B ad C; & B eſt ad C, ut C ad D, & ſic deinceps.

9. Magnitudines diſcretim proportionales ſunt, cùm nullus terminus bis accipitur.

Fig. 2. Diſcretas rationes ſic efferimus: A eſt ad B, ut C ad F.

Cùm plures fuerint proportionales magnitudines quàm tres, ſi proportionales dicantur, ſemper intelliguntur diſcretim.

Fig. 4. 10. Cùm magnitudines (A, B, C, D) fuerint continue proportionales, prima (A) ad tertiam (C) habere dicitur rationem duplicatam ejus rationis, quam eadem prima (A) habet ad ſecundam (B;) & prima (A) ad quartam (D) rationem habere dicitur triplicatam ejus, quam eadem prima habet ad ſecundam (B:) & ſic deinceps.

[*Item, prima* (*A*) *ad ſecundam* (*B*) *ſubduplicatam* (*ſive dimidiatam*) *rationem habere dicitur ejus rationis quam habet eadem prima* (*A*) *ad tertiam* (*C*,) *& ſubtriplicatam ejus rationis quam habet prima* (*A*) *ad quartam* (*D*:) *& ſic deinceps.*

Si verò ratio aliqua triplicata, ſit alteri rationi duplicatæ æqualis; erit ratio ſimplex poſterior, rationis ſimplicis prioris ſeſquiplicata ſive ſeſquialtera. *Sint A, B, C, D* $\div\!\div$; *& α, β, γ* $\div\!\div$; *& ſit A prima ad D quartam in priore analogiâ, ut α prima ad γ tertiam in ſecundâ analogiâ, dico quòd α eſt ad β in ratione ſeſquialterâ rationis A ad B. Sit enim F inter B & C, ſive quod perinde eſt, inter A & D media proportionalis: Ob æquales rationes A ad D & α ad γ, & medias proportionales utrinque F & β, Erit A : F :: α. β. Sed ratio A ad F componitur ex ratione integrâ A ad B & ex dimidiatâ quoque ejuſdem ratione B ad F atque adeo ratio α ad β rationi A ad F æqualis, continet rationem A ad B integram, & etiam rationem ejuſdem dimidiatam, nempe rationem B ad F. Ratio verò integra & dimidiata dicitur ratio ſeſquiplicata ſive* ſeſquialtera. *Eſt ergo α ad β in ratione ſeſquiplicatâ ſive* ſeſquialterâ *A ad B. Sic ſane in Aſtronomicis, cùm cubi diſtantiarum planetarum a Sole eam inter ſe rationem habeant quam temporum periodicorum quadrata; ita ut* triplicata *diſtantiarum ratio eadem ſit cum ratione temporum periodicorum* duplicatâ; (*Cubi enim ſunt in* (a) *triplicatâ, & quadrata ſunt* (b) *in duplicatâ ratione laterum ſuorum, ſive radicum, reſpective;*) *dici ſolet, tempora ipſa periodica eſſe inter ſe in ratione ſeſquiplicatâ ſive* ſeſquialterâ *diſtantiarum a Sole.*]

(a) *Per* 33. *l.* 11.
(b) *Per* 20. 6.

11. Homologæ, ſeu ſimiles ratione magnitudines dicuntur antecedentes antecedentibus, conſequentes conſequentibus.

bus. Ut ſi A eſt ad B, ut C ad F; homologæ erunt A, C; & B, F. Fig. 2.

Reliquæ definitiones commodiùs ex ipſis propoſitionibus intelligentur.

Quintus liber propoſitiones complectitur 25. Ex his 10. non alium uſum habent, quàm ut reliquæ earum ope per multiplices demonſtrentur. Illis igitur prætermiſſis, 15. reliquas proponemus ſolas, Euclidis ordine non mutato. Porro hujus libri theoremata non ſolis lineis, ſed omnibus omnino quantitatibus conveniunt. Lineæ igitur, quibus hîc utimur, omne genus quantitatis repræſentant.

Axioma.

Datis tribus quantitatibus A, B, C, dabilis eſt quarta Z, ad quam C eam proportionem habet, quam A habet ad B.

PROPOSITIO I, II, III, IV, V, VI.

I*N noſtrâ methodo ſunt ſuperfluæ.* [Inter has inſignior & uſûs frequentioris eſt prop. 4. cujus demonſtratio habetur infra. Eſt enim Lem. 1. par. 2. hujus libri 5.]

PROPOSITIO VII.

SI quantitatès A & B fuerint æquales, & alia quæpiam detur Z: erit A ad Z, ut B eſt ad Z. Et Z erit ad A, ut eadem Z eſt ad B. Fig. 3.

Hæc propoſitio, uti & ſequentes quatuor, ſunt meriſſima axiomata, ac proinde nullo modo demonſtrari debent.

[Scholium. *Eodem modo, æquales ad æquales eandem habent rationem; hoc eſt, ſi detur etiam alia quantitas X, ipſi Z æqualis; erit A ad X, ut B eſt ad Z; & vice verſâ. Sic etiam propoſitionum 3. ſequentium patebit adhuc veritas, ſi loco unica quantitatis Z, ubique ponantur duæ æquales, X & Z.*]

PROPOSITIO VIII.

Fig. 8. *SI quantitates (C & F) fuerint inæquales; major C ad tertiam Z majorem habebit rationem, quàm minor F habeat ad eandem Z.* [Item minor F minorem habet rationem ad Z, quàm habet major C ad Z.]

Et Z ad majorem C, minorem habebit rationem, quàm eadem Z habeat ad F, quæ minor eſt quàm C. [Et Z ad minorem F, majorem habebit rationem, quàm habet eadem Z ad C quæ major eſt.]

PROPOSITIO IX.

Fig. 7. *SI A & B ad Z eandem habeant rationem, æquales ſunt A & B.*

Et ſi eadem Z ad A & B eandem rationem habeat, rurſum A & B æquales erunt.

PROPOSITIO X.

Fig. 8. *SI C ad Z majorem rationem habeat, quàm F ad Z; erit C major quàm F.* [Et proinde, ſi F minorem habeat rationem ad Z, quàm habet C ad Z; F minor erit quàm C.]

Et ſi Z ad F majorem rationem habeat, quàm eadem Z ad C; erit F minor quàm C. [Et ſi Z ad C minorem rationem habeat, quàm habet eadem Z ad F; erit C major quàm F.]

PROPOSITIO XI.

Fig. 9. *RAtiones, quæ eidem rationi ſunt æquales, eædem, ſimiles, (idem omnia ſignificant;) ſunt æquales, eædem, ſimiles inter ſe.*

Ut ſi tam ratio A ad B, quàm ratio C ad F, ſint æquales rationi X ad Z, erunt quoque rationes A ad B, & C ad F æqua-

æquales inter ſe. Sive ſi A ſit ad B, ut X ad Z; & C ſit ad F, ut X ad Z; erit quoque A ad B, ut C ad F.

[*Scholium.*] Eodem modo rationes, quæ æqualibus ſunt æquales, inter ſe ſunt æquales. [*Et rationes quæ unâ æqualium rationum majores vel minores ſunt, etiam alterâ æqualium majores vel minores erunt: aut ſi æqualium rationum una quævis, ratione tertiâ major fuerit vel minor, etiam altera æqualium eâdem tertiâ major vel minor erit reſpectivè.*

Ex. gr. *Si A ſit ad B ut C ad F; & ſit ratio C ad F major ratione X ad A; Erit quoque ratio A ad B major ratione X ad Z; quæ ipſa eſt prop. 13. a Tacqueto omiſſa. Eodem modo ſi fuerit A ad B ut X ad Z; & fuerit ratio X ad Z minor quàm ratio C ad F; erit etiam ratio A ad B minor ratione C ad F.*]

PROPOSITIO XII.

SI ſingulæ magnitudines quotcunque (A, B, C,) eandem habuerint proportionem ad ſingulas totidem (F, I, L:) quam proportionem habent ſingulæ ad ſingulas, ſive una (A) ad unam (F;) eandem habebunt omnes (A, B, C) ſimul ſumptæ, ad omnes (F, I, L) ſimul ſumptas. Fig. 10.

Rem per ſe manifeſtam, exemplo tantùm aliquo rationali declaro; ut ſi ſingulæ A, B, C, ſingularum F, I, L, ſint tripla, (hoc eſt, ſi ſingulæ ad ſingulas eandem habeant rationem quam 3. ad 1.) etiam A, B, C ſimul ſumptæ, ſimul ſumptarum F, I, L triplæ erunt, (hoc eſt, etiam A, B, C ſimul ſumptæ ad F, I, L ſimul ſumptas rationem habent eandem, quam 3. ad 1.) In proportione irrationali res æque clara eſt.

[*Propoſitionem 13. in Scholio poſt pr. 11. ſupra collocavimus; demonſtratione enim vix eget. Sequens autem propoſitio 14. etſi Tacqueto ſuperflua, uſum ſuum habet; atque adeo illam in locum ſuum reduxi cum demonſtratione ſuâ.*]

PROPOSITIO XIV.

SI prima (A) ſit ad ſecundam (B,) ut tertia (C) ad quartam (F,) & ſit prima (A) major quàm tertia (C,) erit ſecunda (B) major quàm quarta (F:) Si verò prima ſit æqualis tertiæ, erit ſecunda quartæ æqualis: Et ſi minor, minor. Fig. 11.

Si

Si data fuerit proportio æqualitatis, ubi antecedentia conſequentibus ſuis æqualia ſunt, propoſitio per ſe patet. Et (a) *cùm, in proportione majoris inæqualitatis, unius antecedens æque ſeu eodem modo contineat ſuum conſequens quo alterius antecedens continet ſuum conſequens; atque in proportione inæqualitatis minoris, antecedens unius eodem modo contineatur in ſuo conſequente quo antecedens alterius in ſuo continetur; etiam in proportione inæqualitatis majoris vel minoris, propoſitio ſatis patebit attendenti. Si quis tamen ampliorem demonſtrationem velit, legat ea quæ ſequuntur.*

(a) Per def. 5. l. 5. (b) Per 8. l. 5. (c) Per hypoth. (d) Per ſchol. poſt p. 11. l. 5. (e) Per 10. l. 5. (f) Per 7. l. 5. (g) Per 11. l. 5. (h) Per 9. l. 5. (i) Per 8. l. 5. (k) Per ſchol. poſt p. 11. l. 5. (l) Per 10. l. 5.

1. *Sit A major quàm C, eritque ratio A ad B* (b) *major ratione C ad B. Sed eſt* (c) *A ad B ut C ad F: ergo ratio C ad F major* (d) *eſt ratione C ad B:* (e) *unde F minor eſt quàm B, & proinde B major quàm F.*

2. *Sit A æqualis ipſi C; erit ratio A ad B* (f) *æqualis rationi C ad B: Sed eſt A ad B ut C ad F: erit* (g) *igitur C ad B ut C ad F, ac proinde B & F* (h) *æquales erunt.*

3. *Sit A minor quàm C; & habebit A ad B minorem* (i) *rationem quàm habet C ad B. Eſt autem A ad B ut C ad F: ergo C* (k) *minorem habet rationem ad F quàm habet eadem C ad B; & proinde F* (l) *major eſt quàm B, ſeu B minor quàm F.*]

PROPOSITIO XV.

Fig. 10. *ALiquota ſimiles (F, I) eandem inter ſe rationem habent quam tota (A, B.)*

Fig. 11. *Et univerſim, partes ſimiles (C, F) ſunt inter ſe ut tota (A, B)* [ſive partes illæ totis ſuis fuerint commenſurabiles, ſive non fuerint.]

Verè inſtar axiomatis haberi poteſt, ſi rectè intelligatur quid ſint partes ſimiles. Vide defin. 7.

Fig. 12. [Schol. *Partes ſimiles CB, LI, ſi a totis ſuis AB, FI auferantur, relinquunt partes ſimiles AC, FL; quod per ſe ſatis manifeſtum eſt.*]

PROPOSITIO XVI.

Fig. 11. vel 13. *SI prima (A) ſit ad ſecundam (B,) ut tertia (C) ad quartam (F;) etiam* permutando *erit prima (A) ad tertiam (C,) ut ſecunda (B) ad quartam (F.)*

Ponan-

Ponantur B & F eſſe minores quàm A & C; (nam ſi æquales ſint, res patet;) [*Tunc enim, æquales A & B ad æquales C & F eandem rationem* (a) *habebunt, ut ſit A:C::B:F.*] Quoniam A ponitur eſſe ad B, ut C ad F, erunt per defin. 7. B & F, totorum A & C partes ſimiles, ac proinde per præc. quam proportionem inter ſe habent tota A, C, eam quoque habent partes ſimiles B, F; hoc eſt, A eſt ad C, ut B ad F. [*Eodem modo ſi antecedentes A & C minores fuerint conſequentibus B & F reſpectivè; cùm ſit A: B::C: F,* (b) *erunt A & C partes ſimiles totorum B & F,* & (c) *proinde A:C::B:F.*]

(a) Per ſchol. poſt. p. 7. l. 5.
(b) Per def. 7. l. 5.
(c) Per 15. l. 5.

Scholium.

SI A eſt ad B, ut C ad F; etiam *invertendo* erit ut B ad A, ſic F ad C. Per ſe patet.

Apud Euclidem hoc eſt corollarium prop. 4. quæ cùm in noſtrâ methodo tanquam ſuperflua ſit omiſſa, viſum eſt corollarium illud hoc loco ponere.

PROPOSITIO XVII.

SI antecedens unum (AB) ſit ad conſequens (CB,) ut antecedens alterum (FI) ad conſequens alterum (LI,) etiam dividendo *erit (AC) exceſſus antecedentis primi ſupra ſuum conſequens, ad idem conſequens (CB,) ut (FL) exceſſus antecedentis ſecundi ſupra conſequens ſecundum, ad ſecundum conſequens (LI.)* Fig. 124

Axiomatis inſtar aſſumi poteſt: ſi tota AB, FI eandem rationem habeant ad X & Z; etiam ſimilibus partibus mulctata, eandem ad X & Z pergent habere rationem: hoc eſt, adhuc AB ſic mulctata erit ad X, ut FI ſic mulctata ad Z. Id verò eſt quod aſſerit propoſitio. Nam quia ponitur AB eſſe ad CB, ut FI ad LI, erunt (*d*) CB, LI ſimiles partes totorum AB, FI; & AC, FL erunt tota ſimilibus partibus mulctata. Cùm ergo tota habuerint ad CB, LI eandem rationem; etiam AC, FL, (hoc eſt tota ſimilibus partibus mulctata) pergent ad CB, LI eandem inter ſe habere rationem; hoc eſt, adhuc erit AC ad CB, ut FL ad LI.

(d) Per def. 7. l. 5.

[Aliter *Cùm ſit AB: CB::FI:LI;* (e) *ergo CB, LI ſunt*

(e) Per def. 7. l. 5.

 ſimiles

ſimiles partes totorum AB, FI, & proinde ſi a totis ſuis auferantur, (a) relinquunt ſimiles partes AC, FL totorum AB, FI. Unde (b) AB: FI:: AC: FL; & ob eandem cauſam AB: FI:: CB: LI. Ergo (c) AC: FL:: CB: LI. Et permutando; AC: CB:: FL: LI. Q. E. D.

(a) Per ſchol. p. 15. l. 5. (b) Per 15. l. 5. (c) Per 11. l. 5.

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 12.

SI antecedens unum (AC) ſit ad conſequens unum (CB,) ut antecedens alterum (FL) ad conſequens alterum (LI,) etiam componendo *erit (AC cum BC) primum antecedens cum ſuo conſequente, ad idem conſequens (CB,) ut (FL cum LI) ſecundum antecedens cum ſuo conſequente, ad conſequens (LI.)*

Rurſum enim inſtar axiomatis aſſumi poterit: ſi duæ quantitates AC, FL, eandem ad X & Z habeant rationem; etiam AC, FL ſimiliter, ſeu proportionaliter auctæ, pergent ad X & Z eandem habere rationem: hoc eſt, adhuc erit AC ſic aucta ad X, ut FL ſic aucta ad Z. Id verò eſt quod propoſitio aſſerit. Nam ponitur AC eſſe ad CB, ut FL ad LI. Quare ſi ipſis AC, FL addantur CB, LI; erunt AC, FL proportionaliter, ſeu ſimiliter auctæ. Cùm igitur AC, FL eodem modo ſe habeant ad CB, LI; etiam cùm ſimiliter fuerint auctæ, (hoc eſt ipſæ jam AB, FI) pergent ad eaſdem CB, LI eodem modo ſe habere; hoc eſt, adhuc AB erit ad CB, ut FI ad LI.

(d) Per 16. l. 5. (e) Per 12. l. 5. (f) Per 16. l. 5.

[Aliter. *Cùm ſit AC: CB:: FL: LI; ergo* (d) *permutando, erit AC: FL:: CB: LI. Ergo* (e) *AC + CB: FL + LI:: (hoc eſt, AB: FI:: CB: LI:) & iterum* (f) *permutando, AB: CB:: FI: LI. Q. E. D.*]

Corollarium 1.

Fig. 12.

SI antecedens unum (AB) fuerit ad conſequens (CB,) ut antecedens alterum (FI) ad conſequens alterum (LI;) etiam antecedens primum (AB) erit ad (AC) exceſſum ſuum ſupra conſequens, ut antecedens alterum (FI) eſt ad (FL) exceſſum ſuum ſupra conſequens alterum (LI.)

(g) Per 17. l. 5. (h) Per ſch. p. 16. l. 5. (i) Per 18. l. 5.

Cùm enim AB ſit ad CB, ut FI ad LI, erit dividendo (*g*) AC ad CB, ut FL ad LI: & invertendo (*h*) BC ad CA; ut IL ad LF: & componendo (*i*) BA ad CA, ut IF ad LF.

Hæc

Hæc argumentatio vocatur *converſio* rationis.

[*Et præterea, ſi fuerit unum antecedens* (*AC*) *ad conſequens ſuum* (*CB*,) *ut alterum antecedens* (*FL*) *ſit ad ſuum conſequens* (*LI*;) *erit etiam, ex aliâ* convertendi *ſpecie, antecedens primum* (*AC*) *ad primum antecedens cum ſuo conſequente* (*AB*) *ut antecedens alterum* (*FL*) *ad alterum antecedens cum ſuo conſequente* (*FI*.)

Cùm enim ſit AC: *CB*:: *FL*: *LI*; *erit* (a) *invertendo*, *BC*: *CA*:: *IL*: *LF*; *&* (b) *componendo*, *BA*: *AC*:: *IF*: *FL*; *& rurſum invertendo*, *AC*: *AB*:: *FL*: *FI*.] (a) Per ſch. p. 16. l. 5. (b) Per 18. l. 5.

Corollarium 2.

SI AC eſt ad AB, ut FL ad FI; erit quoque AC ad CB, ut FL ad LI; & AB ad CB, ut FI ad LI. Fig. 12.

Cùm enim ſit ut AC ad AB, ſic FL ad FI, erit invertendo, B A ad C A, ut IF ad LF: & divid. (*c*) BC ad CA, ut IL ad LF: & rurſum invertendo, AC ad CB, ut FL ad LI: & compon. (*d*) AB ad CB. ut FI ad LI. (c) Per 17. l. 5. (d) Per 18. l. 5.

[Aliter. *Cùm ſit CA*: *AB*:: *LF*: *FI*; *erit invertendo*, *BA*: *AC*:: *IF*: *FL*, *&* (e) *convertendo*, *AB*: *BC*:: *FI*: *IL*; *quod erat unum*: *&* (f) *dividendo*, *AC*: *CB*:: *FL*: *LI*, *quod erat alterum*.] (e) Per cor. 1. hujus. (f) Per 17. l. 5.

PROPOSITIO XIX.

SI ut totum (*AB*) *eſt ad totum* (*FI*,) *ita ablatum* (*CB*) *ſit ad ablatum* (*LI*,) *etiam ut totum eſt ad totum, ita reliquum* (*AC*) *erit ad reliquum* (*FL*.) Fig. 12.

Omnino clarum eſt per ſe. Poteſt tamen ex præcedentibus ſic oſtendi. Quoniam AB eſt ad FI, ut C B ad LI; erit permutando (*g*) A B ad C B, ut F I ad L I. Ergo per converſionem rationis AB eſt ad A C, ut (*h*) F I ad F L. Ergo permutando, ut AB ad FI, ita AC ad FL. (g) Per 16. l. 5. (h) Per cor. 1. præc.

[Aliter. *Cùm ſit AB*: *FI*:: *CB*: *LI*, (*ſive permutando*, (i) *AB*: *CB*:: *FI*: *LI*;) (k) *erunt CB*, *LI partes ſimiles totorum AB*, *FI*, *& proinde ſi a totis ſuis auferantur*, (l) *relinquunt partes ſimiles AC*, *FL*. (m) *Ergo AB*: *FI*:: *AC*: *FL*.] (i) Per 16. l. 5. (k) Per def. 7. l. 5. (l) Per ſch. p. 15. l. 5. (m) Per 15. l. 5.

PROPOSITIONES XX. & XXI.

IN noſtrâ methodo ſunt ſuperflua. [Habentur tamen in coroll. prop. 22. & 23. quæ ſequuntur.]

PROPOSITIO XXII.

Fig. 13. *SI fuerit A ad B, ut O ad Q; & B ad C, ut Q ad R, & ſic deinceps: erit* ex æquo *ut A prima ad C ultimam, ita O prima ad ultimam R.*

Ponantur C, R eſſe minores quàm B, Q: eadem foret oſtenſio, ſi majores ponerentur. Quoniam (*a*) B eſt ad C, ut Q ad R; erunt C, R totorum B, Q (*b*) partes ſimiles. Cùm igitur A & O ad B & Q eandem habeant rationem; habebunt quoque ad C & R, quæ ſunt ipſorum B & Q partes ſimiles, eandem rationem. Inſtar enim axiomatis eſt, ſi duæ quantitates ad alias duas eandem inter ſe habuerint rationem, etiam ad partes earum ſimiles, eandem inter ſe habere rationem.

(a) Per hyp. (b) Per def. 7. l. 5.

Si plures fuerint utrimque quantitates quàm tres, eodem ratiocinio procedatur ad reliquas.

[Aliter *Cùm ſit A: B:. O: Q; erit* (c) *permutando, A: O :: B: Q. Et cùm ſit B: C:: Q: R; erit permutando, B: Q :: C: R. Ergo* (d) *A: O :: C: R; & iterum permut. A: C :: O: R.*

(c) Per 16. l. 5. (d) Per 11. l. 5.

Cor. 1. *Hinc prop. 20. a Tacqueto omiſſa deduci poteſt. Sint enim tres quantitates A, B, C, tribus O, Q, R proportionales, binæ binis; hoc eſt, ſit A: B :: O: Q, & B : C :: Q: R; Si A fuerit major quàm C, erit ex æquo O major quàm R; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. Nam per hanc prop. erit A: C :: O: R; & permutando, A: O :: C: R. Ergo per* 14. *hujus libri, liquet propoſitum.*

Cor. 2. *Cùm ſit A: B :: O: Q; erit* (e) *componendo, A + B: B :: O + Q: Q. Eſt autem B: C :: Q: R. Ergo per hanc prop. erit A + B: C :: O + Q: R. Et pari modo, ſi* (f) *diviſionem pro compoſitione adhibeas, erit A — B: C :: O — Q: R.*]

(e) Per 18. l. 5. (f) Per 17. l. 5.

PRO-

PROPOSITIO XXIII.

S*I fuerit ut A prima ad B ſecundam, ita O prima ad Q ſecundam; & ut B ſecunda ad C tertiam, ita tertia quæpiam R ad primam O; erit* ex æquo [perturbate] *ut A prima ad C tertiam, ita R tertia ad Q ſecundam.* Fig. 14.

Ut B eſt ad C, ita (*a*) poteſt Q eſſe ad aliquam quampiam S. Jam quia ut B ad C, ſic (*b*) R eſt ad O, & ut B ad C, ſic Q eſt ad S; (*c*) erit R ad O, (*d*) ut Q ad S. Igitur permutando (*e*) R eſt ad Q, ut O ad S. Deinde, quia O eſt ad Q, ut (*f*) A ad B, & Q eſt ad S, (*g*) ut B ad C; ex æquo erit O ad S, ut (*h*) A eſt ad C. Sed jam oſtendi R eſſe ad Q, ut O eſt ad S. Ergo etiam (*i*) R eſt ad Q, ut A ad C.

Vocatur a Geometris hæc ratio *perturbata.*

[Coroll. *Sint tres quantitates A, B, C, tribus R, O, Q proportionales, bina binis, ſed perturbate; hoc eſt, ſit A*:B::O:Q; *& B*: C::R:O; *ſi A fuerit major quàm B, erit ex æquo R major quàm Q; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. Nam per hanc prop. erit A*:C::R:Q; *& permutando, A*:R::C:Q. *Ergo per* 14. *hujus libri liquet propoſitum. Hæc verò eſt prop.* 21. *priùs omiſſa.*]

(a) *Per axiom. ante* 1. *l.* 5.
(b) *Per hyp.*
(c) *Per conſtr.*
(d) *Per* 11. *l.* 5.
(e) *Per* 16. *l.* 5.
(f) *Per hyp.*
(g) *Per conſtr.*
(h) *Per præc.*
(i) *Per* 11. *l.* 5.

PROPOSITIO XXIV.

S*I fuerit ut A ad B, ita C ad F; & ut I ad B, ita L ad F: erit ut A cum I ad B, ita C cum L ad F.* Fig. 15.

Quoniam I per hyp. eſt ad B, ut L ad F; erit quoque (*k*) invertendo B ad I, ut F ad L. Cùm igitur A ſit ad B, (*l*) ut C ad F, & B ad I, ut F ad L; ex æquo erit (*m*) ut A ad I, ſic C ad L. Igitur (*n*) componendo, ut AI eſt ad I, ſic CL eſt ad L: I verò eſt ad B, (*o*) ut L ad F. Rurſum igitur (*p*) ex æquo AI eſt ad B, ut CL ad F.

(k) *Per ſch. p.* 16. *l.* 5.
(l) *Per hyp.*
(m) *Per* 22. *l.* 5.
(n) *Per* 18. *l.* 5.
(o) *Per hyp.*
(p) *Per* 21. *l.* 5.

PROPOSITIO XXV.

Fig. 16. *SI quatuor magnitudines (AB, CF, I, L) fuerint proportionales; maxima (AB) & minima (L) duabus reliquis (CF, I) majores erunt.*

Sit AB ad CF, ut I ad L. Ex maximâ AB ſumatur AQ æqualis I; & ex CF ſumatur CR par minimæ L. Erit igitur AB tota ad totam CF, ut ablata AQ ad ablatam CR. Ergo reliqua QB eſt ad reliquam (a) RF, ut tota AB ad totam CF. Sed AB major (b) eſt quàm CF. Ergo & QB major quàm RF. Jam verò quia AQ ipſi I, & CR ipſi L æquales ſunt; etiam AQ cum L, ipſi I cum CR æquales erunt. Quare ſi ad AQ cum L addatur majus QB, & ad I cum CR addatur minus RF; erit totum AQB cum L majus toto I cum CRF. Quod erat demonſtrandum.

(a) Per 19. l. 5.
(b) Per hyp.

Fig. 6. [Corol. *Si tres magnitudines, A, B, C, fuerint proportionales, extremarum ſemiſumma mediâ major erit. Cùm enim* (c) *ſit A ad B ut B ad C, erit* (*per hanc pr.*) *ſumma extremarum A & C major quàm B bis ſumpta, &* (d) *proinde ſemiſumma extremarum major erit quàm B ſemel ſumpta.*]

(c) Per def. 8. l. 5.
(d) Per axio. 6. l. 1.

Quæ ſequuntur non ſunt propoſitiones Euclidis, ſed ex Pappo Alexandrino, aliiſque deſumptæ, ob frequentem earum uſum Euclideis ſubjungi ſolent.

PROPOSITIO XXVI.

Fig. 17. *SI prima (A) ad ſecundam (B) majorem rationem habeat, quàm tertia (C) ad quartam (F;) habebit* invertendo *(B) ſecunda ad (A) primam, minorem rationem, quàm (F) quarta ad (C) tertiam.*

Quoniam ponitur A habere ad B majorem rationem, quàm C ad F: Igitur A ad (e) aliquam BX (quæ (f) major erit quàm B) eandem habebit rationem, quàm C ad F. Invertendo igitur erit BX ad A, ut F ad C; [*Sed B eſt ad A in minori* (g) *ratione quàm BX ad A*;] ac proinde (h) B ad A in minori ratione erit, quàm F ad C.

[Scholium. *Idem ſimiliter demonſtrabitur de proportione minori: hoc eſt, ſi B ad A minorem habeat rationem quàm F ad C; habebit invertendo, A ad B majorem rationem quàm C ad F.*]

(e) Per axio. ante 1. l. 5.
(f) Per 10. l. 5.
(g) Per 8. l. 5.
(h) Per ſch. p. 11. l. 5.

PRO-

PROPOSITIO XXVII.

SI A habet ad B majorem rationem quàm C ad F; etiam permutando *A ad C majorem rationem habebit, quàm B ad F.* Fig. 17.

Quoniam ratio A ad B ponitur major ratione C ad F; erit (*a*) ratio A ad aliam BX (quæ neceſſariò major eſt quàm (*b*) B) æqualis rationi C ad F. Jam igitur (*c*) permutando A erit ad C, ut BX ad F. Sed BX ad F eſt in majori ratione, (*d*) quàm B ad F. Ergo (*e*) etiam A eſt ad C in majori, quàm B ad F.

Scholium. Idem ſimiliter demonſtrabitur de proportione minori.

(a) *Per axio. ante* 1. *l.* 5.
(b) *Per* 10. *l.* 5.
(c) *Per* 16. *l.* 5.
(d) *Per* 8. *l.* 5.
(e) *Per ſch. p.* 11. *l.* 5.

PROPOSITIO XXVIII.

SI AB ad BC majorem rationem habet, quàm FI ad IL; etiam componendo *AC ad BC majorem rationem habet, quàm FL ad IL.* Fig. 18.

Quoniam ponitur AB ad BC eſſe in majori ratione, quàm FI ad IL: Ergo (*f*) alia OB (quæ neceſſariò erit minor (*g*) quàm AB) eſt ad BC, ut FI ad IL. Ergo (*h*) componendo OC eſt ad BC, ut FL ad IL. Ergo AC eſt ad BC in (*i*) majori, quàm FL ad IL.

Scholium. Idem ſimiliter demonſtrabitur de proportione minori.

(f) *Per axio. ante* 1. *l.* 5.
(g) *Patet ex* 10. *l.* 5.
(h) *Per* 18. *l.* 5.
(i) *Per* 8. *l.* 5. *& ſchol.* 11. *l.* 5.

PROPOSITIO XXIX.

SI AC ad BC majorem rationem habet, quàm FL ad IL; etiam dividendo *AB ad BC majorem habet rationem, quàm FI ad IL.* Fig. 18.

Quia ponitur AC ad BC majorem habere rationem, quàm FL ad IL; Ergo (*k*) alia OC (quæ neceſſariò minor erit (*l*) quàm AC) erit ad BC, ut FL ad IL. Jam igitur erit dividendo (*m*) OB ad BC, ut FI ad IL. Ergo AB eſt ad BC in (*n*) majori, quàm FI ad IL.

(k) *Per axio ante* 1. *l.* 5.
(l) *Per* 10. *l.* 5.
(m) *Per* 17. *l.* 5.
(n) *Per* 8. *l.* 5. *& ſch. p.* 11. *l.* 5.

Scholium. Idem ſimiliter demonſtrabitur de proportione minori.

PROPOSITIO XXX.

Fig. 18. *SI AC ad BC majorem rationem habet, quàm FL, ad IL;* convertendo *habebit AC ad AB minorem, quàm FL ad FI.*

(a) Per 29. l. 5. (b) Per 26. l. 5. (c) Patet ex 18. l. 5.

Quoniam AC eſt ad BC in majori, quàm FL ad IL; erit dividendo (*a*) AB ad BC in majori, quàm FI ad IL. Ergo invertendo (*b*) CB ad BA, eſt in minori, quàm LI ad IF. Ergo componendo (*c*) CA eſt ad BA in minori, quàm LF ad IF.

[Scholium. *Idem ſimiliter demonſtrabitur de proportione minori: hoc eſt, ſi AC ad AB minorem rationem habeat quàm FL ad FI; habebit convertendo, AC ad BC majorem rationem quam FL ad IL.*]

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 19. *SI AB ad C majorem rationem habet, quàm F ad I; & C ad LQ majorem rationem habeat, quam I ad S, & ſic deinceps; etiam* [ex æquo] *prima AB ad ultimam LQ majorem rationem habebit, quàm prima F ad ultimam S.*

(d) Per. axio. ante 1. l. 5. (e) Per. 10. l. 5. (f) Per 22. l. 5. (g) Per 8 l. 5. (h) Per eand.

Quoniam AB eſt ad C in majori, quàm F ad I; Ergo alia (*d*) quæpiam OB (quæ neceſſariò minor (*e*) erit quàm AB) eſt ad C, ut F ad I. Et quia C eſt ad LQ in majori quàm I ad S; Ergo C ad aliam quampiam LR (quæ erit neceſſariò major quàm LQ) eſt ut I ad S. Igitur ex æquo (*f*) OB eſt ad LR ut F ad S. Ergo OB eſt ad LQ in majori quàm (*g*) F ad S. Ergo AB eſt ad LQ (*h*) in multo majori, quàm F ad S.

[Scholium. *Idem ſimiliter demonſtrabitur de proportione minori.*

Corol. *Ex hujus prop. demonſtratione liquet, quòd ſi AB ad C majorem rationem habeat quàm F ad I; & C ad LR eandem habeat rationem quàm I ad S; etiam prima AB ad ultimam LR majorem rationem habebit quàm prima F ad ultimam S. Idemque ſimiliter verum eſt de proportione minori.*]

PRO-

PROPOSITIO XXXII.

SI AB ad C majorem rationem habet, quàm I ad S; & C ad LQ majorem quàm F ad I; etiam ex æquo [perturbate] *habebit majorem rationem AB ad LQ, quàm F ad S.* Fig. 19.

Demonſtratio eadem quæ præcedentis; ſed pro 22. citetur 23.

[Scholium. *Idem ſimiliter demonſtrabitur de proportione minori. Et ab hac propoſitione, corollario illi quod a prop. præcedente deducitur, ſimile corollarium deducetur.*]

PROPOSITIO XXXIII.

SI tota (AB) ad totam (FI) majorem rationem habuerit, quàm ablata (CB) ad ablatam (LI,) tota ad totam minorem rationem habebit, quàm reliqua (AC) ad reliquam (FL.) Fig. 12.

Quia AB eſt ad FI in majori, quàm CB ad LI; erit (*a*) permutando etiam AB ad CB in majori, quàm FI ad LI. Ergo convertendo (*b*) AB eſt ad AC in minori, quàm FI ad FL. Ergo etiam permutando (*c*) AB eſt ad FI, in minori, quàm AC ad FL.

(a) *Per* 27. *l.* 5.
(b) *Per* 30. *l.* 5.
(c) *Patet ex* 27. *l.* 5.

[Scholium. *Eodem modo, ſi tota ad totam minorem rationem habuerit quàm ablata ad ablatam; tota ad totam majorem rationem habebit quàm reliqua ad reliquam.*]

PROPOSITIO XXXIV.

SI rationes (A ad C, & E ad O) ſunt æqualium rationum (A ad B & E ad F) duplicatæ aut triplicatæ & ſic deinceps; æquales ſunt etiam ipſæ. Fig. 20.

Quia ratio A ad C duplicata eſt rationis A ad B; erit (*d*) ut A ad B, ſic B ad C. Ob eandem cauſam erit ut E ad F, ſic F ad O. Cùm ergo ſit ut A ad B, ſic per hyp. E ad F: & ut B ad C, ſic F ad O, (nam ut B ad C, ſic A ad B, hoc eſt E ad F, hoc eſt F ad O,) igitur (*e*) ex æquo erit, ut A ad C, ſic E ad O.

(d) *Per def.* 10. *l.* 1.
(e) *Per* 22. *l.* 5.

PROPOSITIO XXXV.

Fig. 12. *Rationes æquales A ad C & E ad O, ſint duplicatæ, aut triplicatæ, & ſic deinceps, rationum A ad B, & E ad F: etiam hæ æquales erunt.*

Si negas, ſit ut A ad B, ſic E ad aliam Z inæqualem ipſi F, & fiat ut E ad Z, ſic Z ad X. Quoniam igitur rationum æqualium A ad B, & E ad Z duplicatæ (*a*) ſunt rationes A ad C, & E ad X; etiam ratio E ad X æqualis erit (*b*) rationi A ad C, hoc eſt per hyp. rationi E ad O. Ergo (*c*) æquantur O & X. Ergo patet etiam medias F & Z æquales eſſe. Ergo A eſt ad B, ut E ad F ſeu Z. Quod erat demonſtrandum.

(a) Per def. 10. l. 5. (b) Per prec. (c) Per 9. l. 5.

Ex contradictorio aſſertionis, directè illata eſt aſſertio.

PARS SECUNDA.

Euclidea per multiplices definitio æqualium rationum demonſtratur: exhibeturque ac demonſtratur aliud magis immediatum, & facilius indicium æqualitatis rationum.

PRoportionum elementis, methodo (niſi fallor) commodiori explicatis, reliquum eſt, ut quod ſecundo loco ſupra promiſeram, præſtare aggrediar. Hoc igitur loco (quod a nullo hactenus factum eſt) demonſtrabimus, nihil aſſumendo, niſi quod per ſe lumine naturali ſit manifeſtum, duas rationes inter ſe æquales eſſe, quando antecedentium quælibet æque multiplices, conſequentium æque multiplicibus, ſemper ſunt vel pariter majores, vel pariter minores, vel pariter æquales. Cujus quidem negotii cùm ſatis ardua, atque prolixa ſit demonſtratio, ut jam reipſâ cognoſcemus, facile apparebit præpoſtere egiſſe Euclidem, qui æqualitatis rationum primum, & fundamentale indicium ſumi voluit ex hoc multiplicium indemonſtratâ hactenus proprietate, cujus tam remota & obſcura ſit cum rationum æqualitate connexio.

Lemma

Lemma, I.

SIT A ad B, ut C ad F; & ſint antecedentium A, C, quælibet æque multiplices I, Q, nimirum vel duplæ, vel triplæ & ſic deinceps. Sint item conſequentium B, F quælibet æque multiplices L. R. *Fig.* 21.

Erit quoque ut I ad L, ſic Q ad R. [*Eſt prop.* 4. *hujus libri, quæ in parte primâ omittitur.*]

Quoniam enim A eſt ad B, ut C ad F; etiam I dupla ipſius A erit ad B, ut Q dupla ipſius C eſt ad F: & I tripla A erit ad B, ut Q tripla C, ad F, & ſic in infinitum. Quod quidem æque eſt per ſe clarum ac quodlibet axioma. Quoniam igitur I eſt ad B, ut Q ad F; erit quoque I ad L duplam ipſius B, ut Q ad R duplam ipſius F; & ut I ad L triplam ipſius B, ita Q ad R triplam F: Et ſic in infinitum, quod rurſus tam clarum eſt, quàm axioma quodcunque. Liquet ergo propoſitum.

[Aliter, *ex prop.* 16. 15. *&* 11. *l.* 5.

Cùm ſit $A:B::C:F$; *permutando erit* $A:C::B:F$. *Sed per* 15. *eſt* $A:C::I:Q$; *&* $B:F::L:R$. *Ergo per* 11. *eſt* $I:Q::L:R$; *& permutando*, $I:L::Q:R$.]

Lemma 2.

SI quantitates A, B habeant communem menſuram C; erit A toties ſumpta, quoties eſt C in B, æqualis quantitati B toties ſumptæ, quoties C eſt in A. *Fig.* 22.

Ponatur C contineri in B quater, & in A ſexies, ac proinde B eſſe 4. C, & A eſſe 6. C. Igitur 6. C. (hoc eſt A) ducta in 4, (hoc eſt, toties ſumpta quoties C eſt in B.) efficiunt 24. C. Similiter 4. C (hoc eſt B) ducta in 6, (hoc eſt, toties ſumpta quoties C eſt in A) efficiunt etiam 24. C. Ergo A toties ſumpta quoties C in B æquatur B toties ſumptæ quoties C in A.

Theorema I.

SI ratio AB ad FI major ſit ratione L ad R; tales ſumi poſſunt antecedentium (AB & L) æque multiplices, tales item æque multiplices conſequentium (FI & R,) ut multiplâ antecedentis (AB) rationis *Fig.* 23.

tionis majoris, excedente multiplam conſequentis (*FI*;) *multiplex antecedentis* (*L*) *rationis minoris, non excedat multiplicem ſui conſequentis* (*R*.)

Sit ratio AB ad FI major ratione L ad R, & ſint AB & L, majores rationum termini. Quoniam igitur AB ad FI majorem habet rationem quàm L ad R; alia quædam quantitas Z (*a*) habebit ad FI eandem rationem, quam L ad R. Quia jam igitur ratio Z ad FI æqualis eſt rationi L ad R, ponitur que ratio AB ad FI major ratione L ad R, erit quoque ratio AB ad FI major ratione Z ad FI, ac proinde AB major eſt quàm Z: quæ omnia per ſe ſunt manifeſta. Igitur ex AB ſumi poterit AC per Z; eritque etiam AC ad FI, ut L ad R. Auferatur reſiduum BC ex AC quoties poteſt, puta ter; tum ſeca AC in tot æquales partes, exem. gr. in 6. donec earum una poſſit auferri ſæpius ex FI, quàm BC ex AC, puta quater, & reſiduum eſto OI, quod erit minus unâ particulâ. Hoc quoque fieri poſſe per ſe eſt manifeſtum, & patet ex p. 1. l. 10. quæ a proportionibus non dependet. Particularum verò illarum quantitas eſto Q.

(*a*) *Per axio. ante* 1. *l.* 5.

Quoniam igitur Q eſt menſura communis quantitatum AC, FO, ergo AC toties ſumpta, quoties Q eſt in FO, nempe quater, æquatur FO toties ſumptæ, quoties Q eſt in AC, nempe ſexies. Deinde quia reſiduum OI eſt minus unâ particulâ, hoc eſt quàm Q, erit OI toties accepta, quoties Q eſt in AC, nempe ſexies, adhuc minor quàm AC. Ulterius, quia BC minus ſæpe auferri poteſt ex AC, quàm Q ex FI, (poſitum quippe fuit BC ex AC auferri tantùm poſſe ter, Q verò quater ex FI;) manifeſtum eſt BC toties ſumptum, quoties Q in FI, nempe quater, majus fore quàm AC, ac proinde multo majus eſſe quàm OI ſumptum ſexies, quod oſtendi ſupra eſſe minus quàm AC. Atqui oſtenſum eſt AC ſumptum quater, & FO ſumptum ſexies eſſe æqualia. Quare ſi AC ſumpto quater addatur BC quater, & ad FO ſexies ſumptum addatur OI ſexies, erunt 4. AC & 4. BC, hoc eſt 4. AB majora, quàm 6. FO & 6. OI, hoc eſt quàm 6. FI. Quia verò 4. AC æqualia erant 6. FO, erunt 4. AC minora quàm 6. FI. Sed ut AC ad FI, ita ponebatur ſupra L eſſe ad R. Ergo per lem. 1. etiam 4. L minora ſunt quàm 6. R. Acceptæ ſunt igitur antecedentium AB & L æque multiplices, nempe quadruplæ, item æque multiplices conſequentium FI & R, nempe ſextuplæ, & tamen oſtenſum eſt multiplam antecedentis AB (nempe 4. AB,) ſuperare multiplicem conſequentis

ſequentis FI (nempe 6. FI:) multiplicem verò antecedentis L (nempe 4. L,) non excedere multiplicem conſequentis R (nempe 6. R.) Quod erat demonſtrandum.

Theorema 2.

SI antecedentium (A, C) qualibet æque multiplices, quibuſlibet conſequentium (B, F) æque multiplicibus, ſint vel ſimul majores, vel ſimul minores, vel ſimul æquales, ratio (A ad B) rationi (C ad F) æqualis erit. Fig. 21.

Si negas, ſit ratio A ad B major ratione C ad F. Ergo per theor. præced. poterunt antecedentium A, C ſumi tales æque multiplices, itèm tales conſequentium B, F æque multiplices, ut multipla antecedentis A excedente multiplam conſequentis B, multipla antecedentis C non excedat multiplam conſequentis F; quod eſt abſurdum, quia evertit hypotheſim. Ergo &c.

In hac demonſtratione, uti & in ſequentibus eæ ſolum propoſitiones ex quinto libro adhibentur, quæ per ſe æque ſunt manifeſtæ, atque ipſa axiomata.

Theorema 3.

SI ſumi poſſint antecedentium (O, R) tales æque multiplices, itemque tales æque multiplices conſequentium (Q, S,) ut multipla antecedentis unius (O) ſuperante multiplam conſequentis (Q,) multipla antecedentis alterius (R) non excedat multiplam ſui conſequentis (S;) erit ratio (O ad Q,) cujus antecedentis multiplex ſuperat multiplicem conſequentis, major ratione alterâ (R ad S.) Fig. 24.

Rationes illas inæquales eſſe ſic oſtendo. Si eſſent æquales; quæcunque antecedentium æque multiplices (ut patet a fortiori ex lemmate primo) quibuſcunque æque multiplicibus conſequentium, vel ſimul majores eſſent, vel ſimul minores, vel ſimul æquales; quod eſt abſurdum, quia evertit hypotheſim.

Quòd

Quòd autem ratio O ad Q major ſit, cujus antecedentis, multiplex ſuperat, ſic oſtendo. Si negas, ſit ratio R ad S major ratione O ad Q. Ergo per theor. 1. tales accipi poſſunt antecedentium R & O æque multiplices, taleſque item æque multiplices conſequentium S ad Q, ut multiplâ antecedentis R rationis majoris excedente multiplam conſequentis S. multipla antecedentis O non excedat multiplam conſequentis Q: non autem tales (quod facile ex 1. lem. oſtenditur,) ut multiplâ O excedente multiplam Q, multipla R non excedat multiplam S. Quod eſt abſurdum, cùm evertat hypotheſim.

Theorema 4.

Fig. 25. *CUM proportio irrationalis eſt, nulla multiplex antecedentis ulli conſequentis multiplici æqualis eſſe poteſt. Quare, cùm per multiplices inquiritur proportionum irrationalium æqualitas, ſolummodo multiplicium ſimultaneus exceſſus, defectuſque ſpectari debent.*

Sit proportio irrationalis A ad B. Si A aliquoties ſumpta poſſet fieri æqualis B aliquoties ſumptæ, ac proinde eandem ambæ efficere quantitatem Z: ſingulæ A & B eſſent eidem Z commenſurabiles, ac proinde & commenſurabiles inter ſe, contra hypotheſim.

Quia tamen ſecundùm theorema tam ad rationales proportiones pertinet, quàm ad irrationales; ſimultaneo exceſſui & defectui æqualitatem ſimultaneam addidimus cum Euclide.

Demonſtratis hunc in modum, quæ ab Euclide def. 5. & 6. ponuntur, jam omnes ejus quinti & ſexti libri demonſtrationes ſubſiſtunt: patetque multiplicium illum exceſſum defectumque ſimultaneum, infallibile indicium eſſe æqualitatis rationum, non quidem per ſe immediate, ſed demonſtratione, quam modò dedimus, priùs rite intellectâ.

Verùm quia indicium per multiplices, quantumvis jam ſecurum, nihilominus remotum eſt & implexum, hic aliud clariſſimum & proximum, quod promiſi ſupra, demonſtrabo.

Theorema

Theorema 5.

SI conſequentes (CF, NQ,) & conſequentium qualibet aliquota ſimiles, (puta & decima, & centeſima, & milleſima, & ita deinceps ſine termino) in antecedentibus (AB, GM) æquali ſemper numero contineantur; rationes (AB ad CF, & GM ad NQ) æquales erunt. Fig. 16.

Nota, æquali numero contineri dicuntur, cùm, ſi auferantur quoties poſſunt, æqualis eſt utrimque numerus ablatarum.

Demonſt.. Si negas, erit ratio alterutra, puta AB ad CF, major ratione GM ad NQ. Quoniam igitur AB ponitur ad CF majorem habere rationem quàm GM ad NQ, manifeſtum eſt aliquam (puta AD) minorem quàm AB, æqualem habere rationem ad CF, quàm GM ad NQ. Manifeſtum ſimiliter eſt, aliquam ipſius CF aliquotam (ex. gr. unam trigeſimam) eſſe minorem differentiâ DB. Sit CE una trigeſima ipſius CF, & auferatur ex AB quoties poteſt exemp. gr. millies, totumque ablatum ſit AO. Quoniam igitur AO eſt 1000. CE, & CF eſt 30. CE, erit AO ad CF ut 1000. ad 30.

Sumatur jam ex NQ aliquota NP, ſimilis alteri CE, nempe etiam una trigeſima. Quoniam ex hyp. CE, NP æquali numero in AB, GM continentur, & CE ablata ex AB quoties potuit, ablata fuit millies, etiam NP ex GM auferri poterit millies. Quia ergo totum ablatum GK eſt 1000. NP, & NQ eſt 30. NP, erit GK ad NQ ut 1000. ad 30. hoc eſt, ut AO ad CF. Quia verò CE ablata ex AB quoties potuit, reliquit OB, erit OB minus quàm CE. Sed CE, nempe una trigeſima CF, eſt minor poſita quàm DB. Ergo OB eſt multò minor quàm DB. Ergo AO eſt major quàm AD. Ergo AO ad CF, majorem rationem habet quàm AD ad CF. Sed ponebatur eſſe AD ad CF, ut GM ad NQ. Ergo AO ad CF majorem rationem habet, quàm GM ad NQ: hoc eſt, multò majorem quàm GK ad NQ. Quod eſt abſurdum, quia oſtendi ſupra AO eſſe ad CF ut GK ad NQ. Non poſſunt igitur rationes datæ AB ad CF & GM ad NQ eſſe inæquales. Æquales igitur ſunt. Quod erat demonſtrandum.

Theorema

Theorema 6.

Fig. 26. *SI aut conſequentes (CF, NQ,) aut conſequentium aliqua ſimiles aliquotæ (ex. gr. decimæ,) inequali numero in antecedentibus (AB, GM) contineantur; rationes (AB ad CF, & GM ad NQ) inequales erunt, & erit illa major, cujus conſequentis aliquota ſæpius continetur.*

Contineatur CE decima una ipſius CF, in AB millies; & ſit AO, 1000. CE; tum verò reſiduum OB erit minus quàm una CE. Deinde NP una decima NQ, contineatur in GM, tantùm nongenties nonagies ſepties, & ſit GK, 997. NP; patet reſiduum KM fore minus unâ NP, ac proinde 1000. NP fore majores quàm GM. Sit ergo GR, 1000. NP. Quoniam igitur AO eſt 1000. CE, & GR, 1000. NP; CF verò, 10. CE, & NQ, 10. NP, erit AO ad CF, ut GR ad NQ. Ergo AB eſt ad CF in majori ratione, quàm GR ad NQ; ac proinde in multo majori, quàm GM ad NQ. Quod erat demonſtrandum.

Habemus jam igitur indubitatum, facillimumque indicium, ex quo rationes æquales inæqualeſque certò liceat diſcernere. Et poſſemus ex illo, omnes, quæ quidem axiomata non ſint, l. 5. propoſitiones, quas per multiplices Euclides demonſtrat, multo expeditiùs demonſtrare, niſi magis ex uſu diſcentium putaremus, illas eâ methodo, quâ in primâ parte uſi jam ſumus, proponere.

TER-

TERTIA PARS.

De proportionum denominatoribus, algorythmo, compoſitione.

I.

Proportionis Diviſio.

PRima diviſio eſt in rationalem & irrationalem, ut dictum def. 4. Rationalis dividitur in rationem æqualitatis & inæqualitatis. Ratio inæqualitatis dividitur in rationem majoris inæqualitatis, quæ habet antecedens majus conſequente, & in rationem minoris inæqualitatis, quæ habet antecedens minus conſequente.

Rationalis proportio inæqualitatis majoris dividitur in quinque ſpecies, quæ ſunt; multiplex, ſuperparticularis, ſuperpartiens, multiplex ſuperparticularis, multiplex ſuperpartiens.

Ratio multiplex eſt, quando major minorem aliquoties continet, ut bis, ter, quater, &c. diciturque ratio dupla, tripla, quadrupla.

Ratio ſuperparticularis eſt, quando major minorem continet ſimul, & unam ejus partem aliquotam: ut ratio 3. ad 2. vel 6. ad 4. quæ dicitur ſeſquialtera, quia major minorem continet ſemel & ejus dimidium: ratio 4. ad 3. ſive 16. ad 12. quæ dicitur ſeſquitertia, quia major minorem continet ſemel, & tertiam ejus partem, & ſic deinceps.

Ratio ſuperpartiens eſt, cùm major minorem continet ſemel & plures ejus aliquotas, non conficientes unam aliquotam. Talis eſt ratio 8. ad 5. vel 14. ad 10. quia 8. continet 5. ſemel, & inſuper 3. hoc eſt tres quintas ejuſdem numeri 5. quæ tamen ſimul ſumptæ non conficiunt unam aliquotam ipſius 5. Similiter 14. continet 10 ſemel, & bis 2. hoc eſt, duas quintas numeri 10. quæ tamen ſimul ſumptæ (nempe 4.) non conficiunt unam aliquotam ipſius 10. Additur porro, non conficientes unam aliquotam, quia aliàs eſſet ratio ſuperparticularis.

Ratio multiplex ſuperparticularis eſt, cùm major minorem aliquoties continet, & inſuper unam ejus aliquotam, ut ratio 5. ad 2. 10. ad 4. &c.

Ratio multiplex ſuperpartiens eſt, cùm major minorem aliquoties continet, & adhuc plures ejus aliquotas non conficientes unam aliquotam, ut ratio 8. ad 3. 16. ad 6. &c.

I I.

De Denominatore Proportionis rationalis.

DEnominator proportionis rationalis eſt, qui diſtinctè & clarè exprimit habitudinem unius numeri ad alterum; ſive qui ita ſe habet ad unitatem, ut major ad minorem; ac proinde oſtendit, quoties major minorem contineat, & quoties minor contineatur a majore. Rationis 27. ad 9. denominator eſt 3. quia 3. ita eſt ad unitatem, ut 27. ad 9. ac proinde oſtendit quoties conſequens in antecedente continetur, nempe ter.

Cujuſcunque rationis denominator invenitur, ſi major terminus dividatur per minorem, nam quotiens diviſionis erit denominator. Ratio eſt, quia quotiens ita eſt ad unitatem, ut dividendus ad diviſorem, hoc eſt ut major ad minorem.

Exempl. Detur ratio 60. ad 6. Divide 60. per 6. quotiens 10. eſt denominator. Detur rurſum ratio 60. ad 16. diviſo 60. per 16. fit quotiens $3\frac{3}{4}$. hic eſt denominator.

I I I.

De Denominatoribus Proportionum irrationalium.

CUM rationes irrationales fuerint reductæ ad rationes commune conſequens habentes; communis conſequentis antecedentia erunt rationum denominatores, & commune conſequens munus ac locum explet unitatis.

Proportionis nullius irrationalis, ſi ſola ſit, exhiberi poteſt denominator. At ſi duæ fuerint, vel plures proportiones irrationales, alio quodam ſenſu earum denominatores poterunt exhiberi, qui nimirum oſtendant, quomodo una ratio ad alteram ſe habeat. Id quod egregie obſervavit P. Gregorius a S. Vincentio, operis ſui Geometrici lib. 8. def. 2. Qui vir cum præclariſſimis, & prope innumeris inventis Geometriam auxit; tum imprimis libro 8. ejuſdem operis de proportionalitatibus ita ſcripſit, ut novam de proportio-
Fig. 17. nalitatibus ſcientiam condidiſſe cenſeri meritò debeat. Datæ ſint

ſint rationes irrationales A ad B, & C ad D, quæ revocentur ad rationes FH, GH, habentes commune conſequens H, ſic ut ratio F ad H ſit par rationi A ad B, & ratio C ad D par rationi G ad H; commune conſequens H munus explebit unitatis, & antecedentia F, G erunt denominatores rationum F ad H & G ad H (hoc eſt rationum A ad B, & C ad D,) quia oſtendunt quomodo una ratio ſeſe habeat ad alteram. Sicut enim F eſt ad G, ita ratio FH eſt ad rationem GH, hoc eſt ratio AB ad rationem CD.

I V.

Axiomata.

AX. 1. Rationes (F ad H, & G ad H) commune habentes conſequens (H,) eam inter ſe proportionem habent, quam antecedentia (F, G.) Eſt prop. 2. P. Gregorii a S. Vinc. l. 8. quadr. *Fig. 28.*

Hoc eſt, ratio G ad H, tanto major eſt ratione F ad H, quanto G major eſt quàm F.

Ax. 2. Rationes (I ad L, & I ad M) commune habentes antecedens, reciprocam inter ſe habent conſequentium proportionem. Eſt propoſ. 7. P. Gregorii a S. Vinc. lib. 8. quadr. *Fig. 29.*

Hoc eſt, ratio I ad L eſt ad rationem I ad M, ut reciprocè eſt M conſequens, ad conſequens L: ſive ratio I ad L tanto major eſt ratione ejuſdem I ad M, quanto L fuerit minor quàm M, ac proinde quanto M fuerit major quàm L.

Ax. 3. Rationes rationales eam inter ſe rationem habent, quam denominatores. Patet ex axiom. 1.

Dentur ratio 12. ad 3. & ratio 15. ad 6. quarum denominatores ſunt 4. & $2\frac{1}{2}$. Ex defin. (*a*) denom. ratio 12. ad 3. eſt eadem cum ratione 4. ad 1. & ratio 15. ad 6. eſt eadem cum ratione $2\frac{1}{2}$. ad 1. Sed ratio 4. ad 1. eſt ad rationem $2\frac{1}{2}$. ad 1. ut (*b*) 4. eſt ad $2\frac{1}{2}$. Ergo etiam ratio 12. ad 3. eſt ad rationem 15. ad 6. ſit denominator 4. eſt ad denominatorem $2\frac{1}{2}$.

(a) *Num.* 2.

(b) *Per axio.* 1. *hic.*

V.

Rationum rationalium Additio & Subtractio.

ADditio perficitur, ſi rationum denominatores addantur. Ratio enim quam habet denominatorum ſumma ad unitatem, eſt rationum datarum ſumma quæſita.

Dentur ratio 12. ad 3. & 15. ad 6. earum denominatores 4. & $2\frac{1}{2}$ additi ſibi mutuò, faciunt $6\frac{1}{2}$. Ratio $6\frac{1}{2}$. ad 1. eſt par rationi 12. ad 3. & rationi 15. ad 6. Patet ex Ax. 1 & 3.

Subtractio fit ablatione minoris denominatoris a majore; nam ratio reſidui ad unitatem, eſt ratio quæ remanet poſt minorem rationem a majori detractam. Patet ex axiom. 1. & 3.

Dentur rationes 12. ad 3. & 15. ad 6. Harum denominatores ſunt 4. & $2\frac{1}{2}$. Aufer minorem $2\frac{1}{2}$. a majori 4. remanet $\frac{3}{2}$. Ratio $\frac{3}{2}$ ad 1. eſt ea quæ remanet, ubi rationem 15. ad 6. ſeu $2\frac{1}{2}$. ad 1. detraxeris ex ratione 12. ad 3. ſeu 4. ad 1.

VI.

Rationum irrationalium Additio & Subtractio.

Fig. 30. RAtiones datæ (A ad B, & C ad D) reducantur ad rationes (F ad H & G ad H) habentes commune conſequens (H.) Antecedentia F & G ſibi addita ſunt FG. Ratio FG ad H eſt ſumma rationum F ad H, & G ad H, hoc eſt rationum A ad B & C ad D. Patet ex axio. 1.

Subtractio perficitur, ſi rationes datæ ad commune conſequens reducantur, ac tum minus antecedens G auferatur a majori F: ratio enim reſidui ad H, eſt ea quæ remanet poſtquam rationem G ad H, ſeu C ad D ſubtraxeris a ratione F ad H, ſeu A ad B. Patet ex 1. axiom.

VII.

Rationum rationalium Multiplicatio & Diviſio.

DEnominatores rationum per invicem multiplicati, dabunt denominatorem rationis quæ ex datarum rationum multiplicatione producitur.

Hoc

Hoc eſt, ratio quam ad unitatem habet numerus ex denominatorum multiplicatione productus, eſt ea quæ fit ex rationum multiplicatione. Patet ex Ax. 1. &. 3. Nam multiplicatio rationum eſt unius ad alteram additio ſæpius repetita. Hanc autem perfici repetitâ ſæpius antecedentium additione, (hoc eſt multiplicatione,) patet ex jam citatis axio. 1. & 3.

Sint datæ rationes 9. ad 3. & 20. ad 4. denominatores 3. & 5. multiplicati faciunt 15. Ratio 15. ad 1. eſt ea, quæ ex multiplicatione rationum 9. ad 3. (ſeu 3. ad 1.) & 20. ad 4. (ſeu 5. ad 1.) producitur.

Diviſio rationum perficitur, ſi denominator majoris dividatur per denominatorem minoris. Nam ratio quotientis ad unitatem, eſt ea quæ habetur ex diviſione rationis datæ majoris per rationem minorem. Patet ex 1. & 3. axiomate; cùm rationis per rationem diviſio, ſit ſubtractio unius ab alterâ ſæpius repetitâ.

VIII.

Multiplicatio rationum irrationalium.

DAtæ ſint rationes A ad B, & C ad D, per invicem multiplicandæ. Fiat ut A ad B, ita D ad E. Ratio C ad E eſt ea, quæ producitur ex multiplicatione rationum A ad B, & C ad D. Fig. 31.

Hæc operatio eſt Gregorii a S. Vincentio, lib. 8. prop. 75. Sed eam nec ipſe, nec alius quiſquam demonſtrat.

Hunc igitur in modum demonſtrabitur. Ratio C ad E producitur ex multiplicatione rationum C ad D, & D ad E, ut patebit ex demonſtratione numeri 12. ab his independente. Sed rationes C ad D, & D ad E per conſt. ſunt rationes C ad D, & A ad B. Ergo ratio C ad E eſt ea quæ fit ex multiplicatione rationum A ad B, & C ad D. Quod erit demonſtrandum.

IX.

Diviſio rationum irrationalium.

DAta ſit ratio C ad E dividenda per rationem A ad B. Fiat ut A ad B, ſic C ad D. Ratio D ad E eſt quotiens. Fig. 31.

Nam ratio C ad D (hoc eſt per conſt. ratio A ad B) multiplicata per rationem D ad E producit rationem C ad E, ut patebit ex demonſtratione num. 12. ab his independente. Ergo ratio D ad E eſt quotiens, cùm multiplicata in diviſorem, qui eſt ratio A ad B, reſtituat rationem C ad E, quæ proponebatur dividenda.

X.

De compoſitione rationum: Ejus Definitio.

Ratio ex rationibus componi dicitur, cùm rationum quantitates (hoc eſt denominatores) inter ſe multiplicatæ aliquam effecerint rationem. Eſt definitio 5. l. 6. Euclidis.

Dentur rationes quotcunque quarum denominatores ſint 2. 3. $1\frac{1}{4}$. Multiplica denominatorem 2. per 3. denom. fit 6. denominator rationis compoſitæ ex rationibus, quarum denominatores ſunt multiplicati. Hoc eſt ratio 6. ad 1. eſt compoſita ex rationibus 6. ad 3. & 12. ad 4. Quod ſi denominatorem 6. multiplices per denominatorem tertium $1\frac{1}{4}$. ſit $7\frac{1}{2}$. denominator rationis compoſitæ ex tribus datis rationibus, quarum denominatores ſunt 2. 3. $1\frac{1}{4}$.

X I.

Compoſitio rationum non aliud eſt quàm rationum multiplicatio: & ratio omnis ex iiſdem rationibus componitur ex quarum multiplicatione producitur.

NAM ut patet ex axiomatis n. 4. & ex n. 7. ratio, quæ ex plurium rationum multiplicatione producitur, ea eſt, quam quantitas ex denominatorum multiplicatione producta habet ad unitatem, ſeu conſequens commune. Atqui etiam per defin. Euclid. ratio, quæ ex pluribus rationibus componitur, ea eſt, quam quantitas ex denominatorum multiplicatione producta habet ad unitatem ſeu conſequens commune. Ergo ratio ex iiſdem componitur, ex quarum multiplicatione producitur.

Scholium.

UT numeri ſequentis demonſtratio clariùs percipiatur, obſervandum eſt, multiplicari ac dividi magnitudines per invicem, cum analogiâ quadam ad numeros. Quemadmodum igitur numerus per numerum multiplicari dicitur, cùm, ut eſt unitas ad alterutrum, ita reliquus fit ad alium quempiam, qui productum dicitur; ita plane magnitudo per magnitudinem dicitur multiplicari, cùm, ut quæpiam recta pro unitate aſſumpta ſe habet ad alterutram datarum, ita reliqua fiet ad aliquam quartam, quæ productum vocabitur. Pari modo quemadmodum numerus per numerum dividi dicitur, quando ut unus eſt ad alterum, ita unitas fit ad alium, qui quotiens nominatur: ita quoque magnitudo per magnitudinem dicetur dividi; quando aſſumptâ quantitate aliquâ pro unitate, ut una ſe habet ad alteram, ita unitas ad aliam, quæ proinde dicetur quotiens.

XII.

Si fuerint quæcunque & quotcunque quantitates, ſeu magnitudines, ſeu numeri; ratio prima ad ultimam componitur ex rationibus mediarum.

IN numeris demonſtratum eſt a Theone, Eutocio, & Vitellione. Qui in magnitudinibus demonſtraret, nemo hactenus inventus eſt. Unde Gregorius a S. Vincentio, magnus Geometra, libro 8. ad principium ſecundum, cenſet inter principia numerandum eſſe, donec alicui demonſtratio occurrerit, qua inter theoremata referri poſſit.

Univerſalem igitur hujus rei demonſtrationem dare conabimur hunc in modum.

Demonſtratur in magnitudinibus.

DAtæ ſint magnitudines quæcunque & quotcunque A, B, C, D. Oſtendendum eſt rationem A ad D componi ex rationibus A ad B; B ad C; C ad D. Fig. 32.

Fiat ut B ad C, ita X ad B. Eruntque rationes A ad B, B ad C reductæ ad rationes A ad B, X ad B, habentes commune conſequens B, ac proinde rationum denominatores

natores ſunt A, X: & conſequens commune B, (*a*) munus explet unitatis, quæ eſt commune conſequens reſpectu omnium denominatorum numericorum.

(a) *Per n. 3.*

Itaque ſi velimus magnitudines A, X. per invicem multiplicare, oportebit (*b*) facere ut B unitas eſt ad X, ita A ad quartam Z, quæ erit productum multiplicationis A per X, ſeu X per A, plane ac ſi cupias invicem multiplicare numeros R, S, fit ut unitas ad unum numerum S. ita alter R ad quartum V, qui eſt productum multiplicationis.

(b) *Per ſch. præced.*

Quoniam igitur quantitas Z eſt productum ex multiplicatione denominatorum A, X, erit ratio (*c*) hujus producti Z ad B unitatem, ſeu commune conſequens, ea, quæ producitur ex multiplicatione rationum A ad B; X ad B; prorſus ut in rationum numericarum multiplicatione, numero 7. oſtendimus evenire, in quâ ſi denominatores inter ſe multiplicentur, ratio producti ad unitatem ea eſt quæ fit ex rationum multiplicatione.

(c) *Per defin. num. 10.*

Atqui per conſtr. ratio X ad B eſt ratio B ad C. Ergo etiam ratio Z ad B producitur ex multiplicatione rationum A ad B; B ad C. Quia verò per conſtr. ut B eſt ad X, ita A eſt ad Z, etiam inverſim Z ad A, ut X ad B, hoc eſt, per conſtr. ut B ad C. Igitur permutando ut Z eſt ad B, ita A eſt ad C. Sed jam oſtenſum rationem Z ad B produci ex multiplicatione rationum A ad B; B ad C. Ergo etiam ratio A ad C producitur ex multiplicatione rationum A ad B, & B ad C. Atqui num. XI. oſtenſum eſt rationes componi ex iiſdem rationibus, ex quarum multiplicatione producuntur. Ergo ratio A ad C componitur ex rationibus A ad B, & B ad C.

Eodem modo demonſtrabitur ratio A ad D componi ex rationibus A ad C, & C ad D. Ergo ratio A ad D componitur ex rationibus A ad B, & B ad C, & C ad D. Et ſic deinceps in infinitum. Quod erat demonſtrandum.

Demonſtratur in numeris.

8	2	$\frac{8}{3}$
4	1	$\frac{4}{3}$
3	$\frac{3}{4}$	1

EAndem prorſus demonſtrationem valere in numeris jam oſtendam, unde etiam veritas illius, ac ſoliditas magis ſtabilietur.

Dati ſint tres numeri quicumque exem. gr. 8, 4, 3. Fiat ut 4. ad 8. ita 1. ad 2. & ut 4. ad 3. ſic 1. ad $\frac{3}{4}$. Erunt igitur rationes 8 ad 4 & 2 ad 1. item rationes 4 ad 3. & 1 ad $\frac{3}{4}$. inter ſe æquales; eritque ex æquo (*a*) etiam ratio 8 ad 3 æqualis rationi 2 ad $\frac{3}{4}$. (a) *Per 22. l. 5.*

Fiat deinde ut $\frac{3}{4}$ ad 1. ita 1 ad $\frac{4}{3}$. eruntque rationes 2 ad 1. & 1 ad $\frac{3}{4}$ (hoc eſt, rationes 8 ad 4 & 4 ad 3,) reductæ ad duas rationes 2 ad 1 & $\frac{4}{3}$ ad 1. habentes commune conſequens unitatem; ac proinde 2 & $\frac{4}{3}$ erunt (*b*) rationum 8 ad 4. & 4 ad 3. denominatores. Multiplicentur jam per invicem denominatores 2 & $\frac{4}{3}$. hoc eſt, fiat, ut 1 ad $\frac{4}{3}$. ita 2 ad $\frac{8}{3}$. Erunt 1$\frac{8}{3}$ productum ex 2 & $\frac{4}{3}$ denominatoribus rationum 8 ad 4. & 4 ad 3. inter ſe multiplicatis. Ergo ratio hujus producti $\frac{8}{3}$. ad 1. eſt ea, (*c*) quæ producitur ex multiplicatione rationum 8. ad 4. & 4. ad 3. Jam verò quia per conſt. ut 1. eſt ad $\frac{4}{3}$ ita 2. eſt ad $\frac{8}{3}$. erit etiam inverſim $\frac{8}{3}$. ad 2. ut $\frac{4}{3}$ ad 1. Sed rurſum per conſt. $\frac{4}{3}$. ſunt ad 1. ut 1. ad $\frac{3}{4}$. Ergo $\frac{8}{3}$. ſunt ad 2. ut 1. ad $\frac{3}{4}$. Ergo permutando $\frac{8}{3}$. ſunt ad 1. ut 2 ad $\frac{3}{4}$. Sed jam oſtendi rationem $\frac{8}{3}$. ad 1. eſſe eam quæ producitur ex multiplicatione rationum 8. ad 4. & 4. ad 3. Ergo etiam ratio 2. ad $\frac{3}{4}$. eſt ea, quæ producitur ex multiplicatione rationum 8. ad 4. & 4. ad 3. Sed oſtenſum eſt ſupra rationem 2. ad $\frac{3}{4}$. parem eſſe rationi 8. ad 3. Ergo etiam ratio 8. ad 3. producitur ex multiplicatione rationum 8. ad 4. & 4. ad 3. Igitur per num. XI. ratio 8 ad 3. ex rationibus 8. ad 4. & 4. ad 3. compoſita eſt. Quod erat demonſtrandum.

(b) *Patet ex num. 2.*

(c) *Patet ex num. 7.*

8	Eodem modo demonſtrabitur ſi plures dentur nume-
4	ri quàm tres, rationem 8 ad 25 componi ex rationibus
3	8 ad tria, (hoc jam eſt, ex rationibus 8 ad 4. & 4. ad
25	3) & ex ratione 3 ad 25: & rationem 8 ad 73 compo-
73	ni ex rationibus 8 ad 25 (hoc jam eſt ex rationibus 8

ad 4; 4 ad 3; 3 ad 25) & ratione 25 ad 73, & ſic in infinitum.

XIII.

Si dentur quotcunque rationes, A ad B, C ad D, E ad F: Exhibebitur ratio ex omnibus compoſita.

Fig. 33. SI fiat ut A ad B, ita quæpiam G ad H; & ut C ad D, ita H ad I; & ut E ad F, ita I ad K: ratio enim G ad K erit compoſita ex rationibus G ad H, H ad I, I ad K, ut num. præced. demonſtravimus, hoc eſt per conſtr. ex rationibus datis A ad B, C ad D, E ad F.

XIV.

Ratio non eſt æqualis rationibus ex quibus componitur.

Fig. 33. INter duas quantitates G, K, aliæ quantitates interponantur, ſive illæ ſint continue proportionales ſive non; ratio primæ G ad ultimam K non eſt æqualis rationibus intermediis G ad H, H ad I, I ad K, licèt ex iis ſit compoſita. Nam ex iis componi idem eſt, quod produci ex earum multiplicatione mutuâ, ut oſtenſum eſt num XI. Cùm igitur ratio G ad K ſit producta ex rationibus G ad H, H ad I, I ad K inter ſe multiplicatis, ut ex demonſtratione num. 12. patet, non poſſunt rationes G ad H, H ad I, I ad K ſimul ſumptæ æquales eſſe rationi G ad K, niſi cùm per accidens rationum additio & multiplicatio eandem effecerint rationem. Ut igitur rationibus dictis habeatur una æqualis, erunt illæ ſibi mutuò addendæ, ut traditur num. 5 & 6. ex quâ additione proveniet ratio illis omnibus æqualis; quæ fere ſemper, ut dixi, erit diverſa ab illâ, quæ ex earundem rationum compoſitione, hoc eſt, multiplicatione exſurget.

ELE-

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ

LIBER SEXTUS.

PRoportionum doctrina libro quinto univerſim expoſita, in ſexto figuris planis applicatur. Et ſunt quæ hoc libro traduntur adeo ſcitu neceſſaria, ut ſine illis arcana Geometriæ penetrare, fructuſque ſuaves Matheſeos percipere nemo poſſit. Ad propoſitiones prope ſingulas oporteret encomium texere: tanta omnium utilitas eſt.

INcipit autem Liber hic Sextus *egregiam illam de proportione Geometricâ doctrinam nuperrimè expoſitam, uſibus variis, planeque præſtantiſſimis applicare: & a triangulis, figurarum ſimpliciſſimis exorſus, eorum latera & areas, prout ad ſe invicem proportione quadam reſpondent, inveſtigat. Deinde lineas proportionales & figurarum augmenta aut decrementa proportionalia definit; & quo eaſdem modo in ratione datâ augeamus aut minuamus, oſtendit. Regulam etiam Auream ſive proportionalem, totius arithmeticæ palmariam aperit, & in rectangulo triangulo non tantùm quadratum ſed pentagonum, hexagonum, & univerſim polygonum quodcunque ab hypotenuſâ deſcriptum, æquari quadratis, pentagonis, hexagonis vel quibuſcunque polygonis ſimilibus a duobus lateribus deſcriptis, demonſtrat. Poſtremò facillima certiſſimaque tum lineas tum ſuperficies tum corpora menſurandi principia, in omnibus Mathematicarum ſcientiarum partibus utiliſſima proponit.*

DEFINITIONES.

1. SImiles figuræ ſunt, quæ & ſingulos angulos ſingulis æquales habent, & latera, quæ æqualibus angulis opponuntur, vel quæ inter æquales angulos exiſtunt, vel quæ ſunt circa æquales angulos (Eodem omnia recidunt) proportionalia.

Fig. 1. l. 6. Ut triangula X, Z dicentur ſimilia, ſi angulus A ſit æqualis angulo F, & angulus B angulo I, & angulus C angulo L, atque inſuper ſi AB ſit ad FI, ut BC ad LI; & BC ad LI, ut CA ad LF; & CA ad LF, ut AB ad FI; [*vel ſi,* (a) Per 16. l. 5. (a) *permutando, AB ſit ad BC, ut FI ad IL; & BC ad CA, ut IL ad LF; & CA ad AB, ut LF ad FI;*] Comparando ſemper latera æqualibus angulis oppoſita [*vel quæ inter æquales angulos, vel quæ circa æquales angulos exiſtunt.*] Eodem modo aliarum figurarum rectilinearum omnium ſimilitudo explicabitur.

Fig. 39. 2. Reciprocæ figuræ ſunt, cùm in utrâque antecedentes & conſequentes rationum termini [*reciprocè*] fuerint.

Ut in parallelogrammis X, Z,
ſi AC ſit ad CB,
ut FC ad CL.

Antecedentia ſunt AC & FC, quorum in utrâque figurâ unum eſt; [*hoc eſt, AC in X, FC in Z:*] & conſequentia ſunt CB & CL, quorum ſimiliter in quaque figurâ unum eſt, [*ſed inverſo ordine; nempe CB in Z, CL in X:*] parallelogramma proinde X, Z, reciproca dicuntur. Idem de aliis figuris intellige.

[*Porro, quatuor quantitates, A, B, C, D, ſunt reciprocè proportionales, ſi fuerit prima ad tertiam ut quarta eſt ad ſecundam; vel ſi prima fuerit ad quartam ut tertia eſt ad ſecundam: nempe, ſi A: C :: D: B, vel ſi A: D :: C: B, erunt A, B, C, D, reciprocè proportionales.*]

Fig. 1. 3. Altitudo figuræ eſt perpendicularis AQ, a vertice ad baſim deducta. Eſt Euclidi 4.

Ut trianguli ABC altitudo eſt perpendicularis AQ, a vertice cadens in baſim BC, vel intra triangulum, vel extra in baſim protractam. Baſis autem & vertex aſſumuntur ad libitum.

4. Similes arcus circulorum dicuntur, qui eandem habent ad totas ſuas circumferentias rationem.

Ut ſi ambo ſint ſuæ circumferentiæ pars tertia vel quarta, &c.

[*Et ſegmenta circulorum ſimilia ſunt, quæ arcus ſimiles habent. Idem intellige de ſectoribus ſimilibus.*]

5. Ratio ex rationibus componi dicitur, cùm harum exponentes in ſe invicem multiplicati, illius exponentem producunt. (Rationis autem exponens invenitur dividendo antecedentem per conſequentem.)

Sic

Sic ex rationibus A ad B, & R ad S componitur ratio A×R ad B×S. Nam $\frac{A}{B} \times \frac{R}{S} = \frac{A \times R}{B \times S}$. *Vel ſi fiat, ut R ad S ita B ad C; ex rationibus A ad B, R ad S componitur ratio A ad C. Tunc enim* $\frac{A}{B} \times \frac{R}{S} =$ (a) $\frac{A}{B} \times \frac{B}{C} = \frac{A \times B}{B \times C}$ (a) *Per 36. l. 1.*

$=$ (b) $\frac{A}{C}$. (b) *Per 15. l. 5.*

Sic duplum tripli eſt ſextuplum: ſic etiam ratio 4. ad 3. componitur ex rationibus 4 ad numerum quemvis, (v. gr. 7.) & iſtius numeri (7) ad 3. Nam $\frac{4}{7} \times \frac{7}{3} = \frac{4}{3}$.

Eodem modo liquet, rationem quamvis ex plurimis rationibus componi poſſe. Sic ratio A ad E componi poteſt ex rationibus A ad B, B ad C, C ad D, & D ad E.]

PROPOSITIO PRIMA.

TRiangula (ABC, DEF) & parallelogramma (AOPC, DQRF) quæ eandem habent altitudinem, ſive inter eaſdem exiſtunt parallelas, eam inter ſe proportionem habent, quam baſes (AC, DF.) Fig. 1.

Ab hoc theoremate dependet totus ſextus liber, imo quidquid uſpiam de figuris ſive planis, ſive ſolidis per proportionem demonſtratum eſt. Demonſtrat illam Euclides per multiplices, quæ in primo ſtatim aditu hujus libri tyrones perturbant. Aliam igitur demonſtrationem dabimus facillimam ex theor 5. partis ſecundæ lib. 5. [*vel ex altero illo proportionum æqualium indicio primo & infallibili, quod definitionibus lib. 5 interpoſuit Tacquetus, ante def. 7.*] hunc in modum.

Sumatur baſeos DF quævis pars aliquota, ex. gr. DG una tertia, & ducatur recta GE, erit etiam triangulum DEG tertia pars trianguli DEF, ut colligitur ex 38. l. 1. Quare recta DG & triangulum DGE ſunt conſequentium (*c*) ſimiles aliquotæ. Auferatur deinde DG ex baſi AC quoties poteſt, puta ſexies, [*& relinquetur AN ipſa DG minor,*] ducanturque rectæ HB, IB, KB, LB, MB, NB. Quoniam CH, HI, &c. æquales ſunt ſingulæ ipſi DG, etiam ſex triangula CBH, HBI, &c. triangulo DEG æqualia (*d*) erunt ſingula. Ergo quoties DG continetur in antecedente AC, toties

(c) *Per def. 7. l. 5.*

(d) *Per 38. l. 1.*

toties triangulum DEG continentur in antecedente ABC. Eodem diſcurſu oſtendam quaſcunque conſequentium (baſeos DF & trianguli DEF) ſimiles aliquotas in antecedentibus; (baſi AC & triangulo ABC,) æquali numero contineri. Ergo per theor 5. partis ſecundæ lib. 5. [*hoc eſt, per alterum illud proportionum æqualium indicium*,] ut baſis AC ad baſim DF; ita triangulum ABC ad triangulum DEF. Quod erat demonſtrandum.

(a) Per 41. l. 1. Quoniam verò parallelogramma AP, DR ſunt dupla (*a*) triangulorum ABC, DEF, etiam illa erunt inter ſe ut baſes.

Corollaria.

Fig. 3. 1. TRiangula (ABC, FIL) & parallelogramma, æquales baſes (AC, FL) vel eandem habentia, eam inter ſe rationem habent quam altitudines BO, IQ.)

Fiant enim QS, OR æquales æqualibus baſibus FL, AC. Erunt igitur etiam QS, OR inter ſe æquales. Duc SI, RB. Si in triangulis OBR, QIS accipiantur BO, IQ tanquam baſes, erunt OR, QS eorum altitudines: quæ cùm ſint æquales, erunt OBR, QIS inter ſe, ut (*b*) baſes BO, IQ. Sed quia ex conſtr. OR par eſt AC, & QS par FL, triangula OBR, QIS æquantur (*c*) triangulis ABC, FIL. Ergo etiam triangula ABC, FIL ſunt inter ſe ut BO ad QI.

(b) Per 1. l. 6. (c) Per 38. l. 1.

Fig. 2. [2. *Triangula (ABC, DEF,) & parallelogramma (AP, DR,) quæ ſunt ut baſes (AC, DF,) eandem habebunt altitudinem, ſive inter eaſdem parallelas ſtatui poſſunt. Eſt converſa propoſitionis primæ.*

Si enim inter eaſdem parallelas non conſtituentur triangula ABC, DEF; BE non erit ipſi AF parallela. Per punctum igitur E ducatur SE ipſi AF parallela, quæ ſecet CB in S, & jungatur AS. Triangula itaque ASC, DEF, quæ ſunt inter eaſdem parallelas, inter ſe (d) *erunt ut baſes, AC, DF. Sed per hypoth. triangula ABC, DEF ſunt etiam ut AC, DF: ergo* (e) *triangulum ASC æquatur triangulo ABC, pars toti; quod eſt abſurdum. Non igitur per punctum E, ad rectam AF parallela, a rectâ BF diverſâ duci poteſt; ac proinde triangula ABC, DEF, quæ ſunt ut baſes, inter eaſdem parallelas conſtituentur.*

(d) Per hanc prop. (e) Per 11. & 9. l. 5.

Et cùm parallelogramma AP, DR, quæ triangulorum ABC, DEF (f) *dupla ſunt, ſupra eaſdem cum triangulis baſes, & inter eaſdem parallelas conſtituantur; liquet parallelogramma quæ* (g) *ſunt ut baſes, inter eaſdem parallelas exiſtere.*

(f) Per 41. l. 1. (g) Per 15. l. 5.

3. Trian-

3. Triangula (ABC, FIL,) & parallelogramma, quæ inter ſe ſunt ut altitudines (BO, IQ,) baſes (AC, FL) habent æquales. Eſt converſ. coroll. 1. Fig. 3.

Conſtructis enim triangulis OBR, QIS, ut in corollario primo, demonſtrabitur ut ſupra, tri. ABC = tri. OBR, & tri. FIL = tri. QIS. Sed per hypoth. eſt ABC : FIL :: BO : IQ; ergo OBR : QIS :: BO : IQ. Si itaque accipiantur BO, IQ pro triangulorum OBR, QIS baſibus, erunt OR, QS eorum altitudines; & cùm iſta ſint ut baſes, altitudines OR, QS (a) erunt æquales. Sed per conſtr. OR = AC, & QS = FL. Ergo AC, FL erunt æquales.] (a) Per cor. 2. hujus.

PROPOSITIO II.

SI ad unum trianguli latus (BC) ducta fuerit (FL) parallela, hæc ſecabit proportionaliter latera, (hoc eſt, AF erit ad FB, ut AL ad CL.) Fig. 4.

Et ſi recta (FL) ſecuerit latera (BA, CA) proportionaliter, erit ad reliquum latus (BC) parallela.

Pars 1. Ducantur BL, CF. Quoniam FL ponitur parallela BC, erunt triangula FBL, LCF, eandem baſim FL habentia, inter (*b*) ſe æqualia. Ergo triangulum X, ad utrumque eandem (*c*) habet rationem, hoc eſt, triangulum X eſt ad triang. FBL, ut triangul. idem X eſt ad triang. LCF. Sed triangulum X eſt ad triang. FBL, ut (*d*) AF ad FB: & triangulum X eſt ad triang. LCF, ut (*e*) AL ad LC. Ergo (*f*) etiam AF eſt ad FB ut AL ad LC. Quod erat demonſtrandum.

Pars 2. Ut AF eſt ad FB, ita triangulum X (*g*) eſt ad triangulum FBL; & ut AL eſt ad LC, ita triangulum X eſt ad triang. LCF. Sed jam ponitur AF ad FB, ut AL eſt ad LC. Ergo triang. X eſt (*h*) ad triang. FBL, ut idem X ad LCF. Ergo (*i*) triangula FBL, LCF, eandem habentia baſim, æquantur. Ergo FL, BC (*k*) ſunt parallelæ. Quod erat demonſtrandum.

(b) Per 37. l. 1. (c) Per 7. l. 5. (d) Per præc. (e) Per eand. (f) Per 11. l. 5. (g) Per præc. (h) Per 11. l. 5. (i) Per 9. l. 5. (k) Per 39. l. 1.

Corollaria.

1. SI ad unum trianguli latus (BC) ductæ fuerint plures parallelæ (IO, FL,) erunt omnia laterum ſegmenta, proportionalia. Fig. 5.

Ducatur FQ parallela AC. Rectæ FS, SQ æquantur (*l*) LO, OC. Sed BI eſt ad IF, ut (*m*) QS ad SF. Ergo etiam BI eſt ad IF, ut CO ad OL.

(l) Per 34. l. 1. (m) Per 2. l. 6.

[Cor. 2.

Fig. 6. [Cor. 2. *Si duo circuli ſe intus tangant, & a tactûs puncto ducatur AB majoris circuli diameter ſecans circulum minorem*
(a) Per cor. poſt. 12. l. 3. *in C, & AD quavis alia recta, ſecans minorem in E;* (a) *erit AC diameter minoris: Et erunt diametri ſubtenſis proportionales, & ſic erit etiam differentia diametrorum ad differentiam ſubtenſarum; hoc eſt, AB : AD :: AC : AE :: BC : DE; vel permutando, AC : CB :: AE : ED, & AB : BC :: AD : DE; & BA : AC :: DA : AE; Ductis enim rectis BD, CE propter angulos ADB, AEC* (b) *rectos, & proinde æquales, BD, CE parallelæ* (c) *erunt. Ergo per hanc prop. AC : CB :: AE : ED, quod erat unum; & componendo,* (d) *AB : BC :: AD : DE, quod erat alterum; & convertendo,* (e) *BA : AC :: DA : AE, quod erat tertium.*]

(b) Per 31. l. 3.
(c) Per 29. l. 1.
(d) Per 18. l. 5.
(e) Per cor. 1. p. 18. l. 5.

PROPOSITIO III.

Fig. 7. *SI recta (BF) angulum trianguli bifariam ſecans, etiam ſecet baſim (AC,) habebunt baſis ſegmenta (AF, FC) eandem proportionem quam reliqua latera (AB, CB.)*

Et ſi baſeos partes (AF, FC) eandem rationem habuerint quam reliqua latera (AB, CB;) recta (BF) baſim ſecans, angulum oppoſitum (ABC) biſecabit.

Pars 1. Produc CB, donec BL ſit par BA, & junge AL. Quoniam in triangulo Z, latera LB, AB æquantur; anguli (*f*) quoque L & O æquales erunt. Quia igitur externus ABC duobus (*g*) internis L, O æqualis eſt; angulus I, qui per hyp. ipſius ABC dimidius eſt, æquabitur angulo L. Ergo AL, FB ſunt (*h*) parallelæ. Ergo in triangulo ACL, AF eſt ad FC, (*i*) ut LB (hoc eſt AB) ad BC. Quod erat demonſtrandum.

(f) Per 5. l. 1.
(g) Per 32. l. 1.
(h) Per 29. l. 1.
(i) Per 2. l. 6.

Pars 2. Produc iterum CB donec LB ſit par AB. Quoniam ponitur ut AF eſt ad FC, ita AB (hoc eſt LB) eſſe ad BC; erunt AL, FB (*k*) parallelæ. Ergo externus I, eſt par (*l*) interno L, & alternus Q æqualis alterno O. Sed quia LB, AB æquales ſunt, anguli (*m*) L & O ſunt æquales. Ergo etiam I & Q æquales ſunt. Biſectus ergo eſt ABC. Quod erat demonſtrandum.

(k) Per 2. l. 6.
(l) Per 27. l. 1.
(m) Per 5. l. 1.

[Coroll. *Si recta quæ angulum trianguli bifariam ſecat, biſecet etiam baſem, triangulum per hanc prop. erit Iſoſceles, & biſecans recta erit* (n) *perpendicularis baſi.*

(n) Per n. 3. ſchol. poſt 26. l. 1.

PRO-

PROPOSITIO IV.

TRiangula ſibi mutuò æquiangula, ſunt ſimilia, hoc eſt, (a) etiam latera æqualibus angulis oppoſita, habent proportionalia. (a) Def. 1. l. 6.

IN triangulis X, Z, angulus A ſit par angulo F, & angulus C angulo L, & angulus B angulo I; Dico AB eſſe ad FI, ut AC ad FL; & AC eſſe ad FL, ut CB ad LI; & CB eſſe ad LI, ut BA ad FI. [*Item AB : AC :: FI : FL; & AC : CB :: FL : LI; & CB : BA : LI : FI.*] Fig. 8.

Dem. Si angulus F ponatur ſupra ſibi æqualem A, latera FI, FL, cadent ſupra latera AB, AC. Et quia (*b*) angulus externus AIL per hypoth. par eſt interno B, erunt (*c*) IL, BC parallelæ. Ergo (*d*) BI eſt ad IA, ut CL ad LA. Ergo (*e*) componendo BA eſt ad IF ut CA ad LF. Quòd ſi angulus L imponatur angulo C, eodem modo oſtendam AC eſſe ad FL, ut BC ad IL: & ſi angulus I, imponatur angulo B, oſtendetur pari modo, BC eſſe ad IL, ut AB ad FI. [*& cùm antecedentes BA, AC, CB ad conſequentes IF, FL, LI eandem rationem habeant; erit* (f) *permutando, BA : AC :: IF : FL; & AC : CB :: FL : LI; & CB : BA :: LI : IF.*] Liquet ergo propoſitum. Fig. 8. & 9. (b) Fig. 9. ſola. (c) Per 29. l. 1. (d) Per 2. l. 6. (e) Per 18. l. 5. (f) Per 16. l. 5.

Corollaria.

1. SI in triangulo ducatur uni lateri (BC) parallela (LI,) erit triangulum LFI ſimile toti CFB; ac proinde CF eſt ad LF, ut BC ad LI; [*Et permutando FC eſt ad CB, ut FL ad LI. Item FB ad FC, ut FI ad FL.*] Fig. 9.

Nam quia LI, BC parallelæ ſunt, erunt (*g*) externi FIL, FLI, pares internis B & C. F verò utrique triangulo eſt communis. Ergo ſunt æquiangula. Ergo latera CF, LF oppoſita æqualibus angulis B & FIL, ſunt (*h*) proportionalia lateribus BC, LI, quæ opponuntur communi angulo F. [*Item, latera circa communem* (i) *angulum proportionalia erunt; hoc eſt, FB : FC :: FI : FL.*] (g) Per 27. l. 1. (h) Per hanc. (i) Per def. 1. l. 6.

2. Si in triangulo parallelas AC, LO ſecet recta BF, ab angulo oppoſito B ducta, ſecabit eas proportionaliter. Fig. 10.

Nam per coroll. 1. AF eſt ad LI, ut FB ad IB; & FC quoque eſt ad IO; ut FB ad IB. Ergo AF eſt ad LI ut (*k*) FC ad IO. Igitur permutando AF eſt ad FC (*l*) ut LI ad IO. (k) Per 11. l. 5. (l) Per 16. l. 5.

Fig. 12. 3. *Si inter parallelas AB, CD, duæ rectæ EF, GH ſe invicem decuſſent in I; earum ſegmenta EI, IF; GI, IH erunt proportionalia. Triangula enim EIG, FIH; propter æquales angulos* (a) *oppoſitos ad I; atque* (b) *alternos ad E, F; & ad G, H, erunt æquiangula, & proinde ſimilia. Ergo EI: IF :: GI: IH.*

(a) Per 15. l. 1.
(b) Per 27. l. 1.

Fig. 12. 4. *E Corollario primo Turris aut puncti cujuſvis elevati altitudinem per ſolam baculi umbram definire diſcimus. Baculum FL ſolo perpendiculariter defige eo loco ubi radius ſolis XBA umbram Turris BZ definiens, etiam tranſeat per L. Erit in triangulo AZB linea FL altitudini turris ZB parallela. Unde ut AF diſtantia baculi ab umbra mucrone, ad FL baculi longitudinem; ita AZ diſtantia turris ab umbra mucrone, ad ZB altitudinem Turris. Et quia tria prima menſurando facile habeantur, habebitur & quartum, Altitudo quæſita. Q. E. I.*

Fig. 13. 5. *Hinc Tabularum quæ Sinus, Tangentes, atque Secantes continent, originem repetimus. Sit enim e. g. Circuli ſemidiameter AC partium* 100000: *& Angulus BAD graduum* 30. *Quoniam Chorda ſive ſubtenſa graduum* 60 (c) *æqualis eſt AC ſemidiametro; BD ſinus graduum* 30 *ſemiſſi ſemidiametri ſive* ½ *AC* (d) *æqualis erit: & proinde partes* 50000 *continebit. In rectangulo verò triangulo ADB, quadratum AB* (e) *æquale eſt quadratis AD & BD. Quadretur itaque ſemidiameter AB* (100000 *in* 100000 *ducendo*) *& ab iſto quadrato quadratum BD ſubtrahe: Reliquum erit Quadratum ipſius AD, aut coſinûs eidem* (f) *æqualis BF: e quo extractâ radice dabitur linea BF, ſeu AD, quæ a radio AC* (= 100000) *ſubducta, relinquit ſinum verſum DC. Deinde per analogiam ſequentem* (g) *AD: BD :: AC: CE, habebitur Tangens CE. Et quoniam eſt* (h) *AD: AB :: AC: AE; habebitur etiam ſecans AE. Eâdem methodo ex BF ſinu recto anguli BAG graduum* 60, *habebitur ejuſdem anguli ſinus verſus, tangens & ſecans. Porro, quia* (Fig. 9. l. 4.) *quadratum circulo inſcriptum eſt* (i) *duplum quadrati radii; ſi radius ſit* 100000, *erit latus quadrati circulo inſcripti* (*hoc eſt, chorda graduum* 90) *æqualis radici quadraticæ numeri* 100000 × 100000 × 2. *Unde innoteſcit dimidium latus, ſeu* (k) *ſinus rectus gr.* 45, *ac proinde ſinus verſus, tangens & ſecans. Et univerſaliter, datâ chorda arcûs cujuſvis ad radium proportione, invenientur arcûs dimidii ſinus rectus, ſinus verſus, tangens, ſecans; item coſinus, cotangens & coſecans. Qui plura volet, adeat Clariſſ. Walliſii Tractatum* de ſectionibus Angularibus, *Operum Vol.* 2. *pag.* 533—601.

(c) Per cor. 1. p. 15. l. 4.
(d) Per cor. 1. p. 3. l. 3.
(e) Per 47. l. 1.
(f) Per 34. l. 1.
(g) Per cor. 1. p. 4. l. 6.
(h) Per id.
(i) Per ſch. poſt prop. 6. & 7. lib. 4.
(k) Per cor. 1. prop. 3. lib. 5.

Fig. 14. l. 6. 6. *Hinc etiam, ſi ab angulo quovis A trianguli ABC circulo inſcripti, demittatur ad baſem perpendicularis AE, & ducatur circuli diameter AD; erit iſta perpendicularis AE ad ejuſ-*

dem

dem anguli latus unum AC, ut latus alterum AB eſt ad circuli diametrum AD. Nam ductâ BD, *triangula AEC, ABD ſunt æquiangula; anguli C & D æquales,* (a) *quia eidem arcui BOA inſiſtunt; anguli* (b) *ABD,* (c) *AEC recti, & proinde æquales; Ergo etiam BAD, EAC æquales* (d) *erunt. Ergo triangula per hanc prop. ſimilia ſunt, & AE: AC :: AB: AD. Q. E. D.*

(a) Per 21. *l.* 3.
(b) Per 31. *l.* 3.
(c) Per hyp.
(d) Per cor. 9. pr. 32. *l.* 1.

7. Circuli diametrum AB (ſi opus productam) perpendiculariter ſecet infinita recta EF in C, & in EF ſumpto quovis puncto E extra circulum, jungatur AE circulum ſecans in D: erit ſubtenſa AD ad circuli diametrum AB, ut AC ad AE. Nam ductâ rectâ DB, triangula ADB, ACE ſunt æquiangula: angulus enim A eſt utrique communis, & anguli ad (e) *C, D,* (f) *ſunt recti; unde tertius* (g) *tertio æqualis eſt. Ergo per hanc prop. triangula ſunt ſimilia, & AD: AB :: AC: AE.*

Fig. 15.

Si puncta B, C coincidunt, erit circuli diameter media proportionalis inter AD & AE. Erit enim AD: AB :: AC=AB: AE.]

(e) Per hyp.
(f) Per 31. *l.* 3.
(g) Per cor. 9. *p.* 32. *l.* 1.

PROPOSITIO V.

Fig. 16.

SI duo triangula habuerint omnia latera ſibi mutuò proportionalia, etiam ſibi mutuò æquiangula erunt.

Hoc eſt, ſi AB ſit ad RF, ut AC ad RQ; & ut AC ad RQ, ſic CB ad QF; & ut CB ad QF; ſic AB ad RF: dico angulos antecedentibus oppoſitos æquari angulis qui opponuntur conſequentibus; nimirum C ipſi I; B ipſi F; A ipſi O.

Ang.	Antec.	Conſeq.	Ang.
C	AB	RF	I
B	AC	RQ	F
A	CB	QF	O

Angulis A & C fac æquales X & Z: & latera coeant in N. Etiam igitur (*h*) B & N æquales erunt. Quia ergo triangula P, T ſunt æquiangula, erit (*i*) AB ad RN, ut AC ad RQ. Sed ex hyp. etiam eſt AB ad RF, ſicut AC ad RQ. Ergo AB eſt ad RF, ut eadem AB ad RN. Ergo RN, RF (*k*) æquantur. Pari modo oſtendam æquari QN & QF. Triangula igitur T, S, ſibi mutuò ſunt æquilatera. Igitur anguli I, F, O æquantur (*l*) angulis Z, N, X, hoc eſt per conſtr. angulis C, B, A: Quod erat demonſtrandum.

(h) Per cor. 9. *p.* 32. *l.* 1.
(i) Per præc.
(k) Per 9. *l.* 5.
(l) Per 8. *l.* 1.

PROPOSITIO VI.

Fig. 16. *SI duo triangula (P, S) habeant unum angulum (A) æqualem uni (O,) & latera (AB, AC; RF, RQ) quæ æquales angulos continent, proportionalia, triangula erunt ſimilia.*

Angulis A, C fiant æquales X, Z, & latera coeant in N. Igitur anguli quoque (*a*) B & N æquales erunt. Oſtendam, ut in præcedenti, æquales eſſe RF, RN. Eſt verò RQ utriſque triangulis S, T communis. Anguli quoque O & X æquales ſunt, quia æquantur ambo eidem A; X per conſt. O per hyp. Ergo etiam I & F (*b*) æquantur ipſis Z & N. Triangulum igitur S æquiangulum eſt triangulo T; hoc eſt, per conſt. triangulo P. Ergo S, P (*c*) ſimilia ſunt. Quod erat demonſtrandum.

(a) *Per cor. 9 p. 32. l. 1.*
(b) *Per 4. l. 1.*
(c) *Per 4. l. 6.*

PROPOSITIO VII.

Fig. 8. SI duo triangula (ABC, FIL) unum angulum (B) uni (I) æqualem habeant; & circa alios angulos (A, F) latera habeant proportionalia, (ut ſit BA: AC :: IF: FL;) & reliquos angulos (C, L) vel ſimul rectos, vel ſimul acutos, vel ſimul obtuſos: triangula erunt ſimilia.

Si anguli C, L fuerint recti; ob angulos B, I æquales, triangula erunt (d) *æquiangula, & proinde* (e) *ſimilia.*

Si anguli C, L fuerint obliqui, ſed homogenei, (hoc eſt, vel ſimul acuti, vel ſimul obtuſi,) & anguli A, F æquales fuerint; ob angulos B, I æquales, triangula adhuc erunt (f) *æquiangula &* (g) *ſimilia. Ponantur autem A, F inæquales, & ſit A major, & ſuper rectâ BA ad punctum A, angulo F æqualis fiat BAD, & propter angulos B & I æquales,* (h) *erunt anguli reliqui ADB & L æquales, & triangula ABD, FIL erunt* (i) *ſimilia, & IF: FL :: BA: AD. Sed IF: FL ::* (k) *BA: AC. Ergo AC =* (l) *AD, & in Iſoſcele ACD, anguli ad baſem C & ADC* (m) *ſunt acuti. Ergo ADB eſt* (n) *obtuſus, & proinde L eſt obtuſus. Sed L eſt angulo*

(d) *Per cor. 9. p. 32 l. 1.*
(e) *Per 4. l. 6.*
(f) *Per cor. 9. p. 32. l. 1.*
(g) *Per 4. l. 6.*
(h) *Per cor. 9. p. 32. l. 1.*
(i) *Per 4. l. 6.*
(k) *Per hyp.*
(l) *Per 9. & 11. l. 5.*
(m) *Per cor. 11. p. 32. l. 1.*
(n) *Per 13. l. 1.*

gulo C homogeneus (a), *& proinde acutus: quod fieri non poteſt; nam eundem angulum L obtuſum eſſe, oſtenſum eſt priùs. Non igitur angulus B AC, angulo F inæqualis eſt. Ergo eſt ei æqualis; & triangula ABC, FIL ſunt æquiangula, & proinde ſimilia. Q. E. D.* (a) Per hyp.

Hanc propoſitionem (a Tacqueto male omiſſam) propter uſus multiplices omnino reſtituendam cenſui.

Corol. 1: *Iiſdem poſitis, erit ang. A* = *ang. F, & ang. C.* = *ang. L.*

Corol. 2. *Si duo triangula S*, *T, unum angulum F uni N æqualem habeant; & circa alios angulos O, X, latera reſpectivè æqualia; & reliquos angulos I, Z vel ſimul rectos, vel ſimul acutos, vel ſimul obtuſos; triangula erunt æqualia. Sunt enim ſimilia per hanc, & ſchol. p. 7. l. 5. Ergo angulus X angulo O* (b) *æqualis eſt; & proinde ipſa etiam triangula* (c) *æquantur.*] Fig. 16. (b) Per def. 1. l. 6. (c) Per 4. l. 1.

PROPOSITIO VIII.

IN triangulo rectangulo (ABF,) perpendicularis (BC) ab angulo recto in baſim ducta, ſecat triangulum in partes toti, & inter ſe ſimiles. Fig. 17.

In triangulis ABF & L, angulus F communis eſt, anguli verò ABF, & X per hypotheſim ſunt recti, adeoque æquales. Ergo reliqui A & O etiam (*d*) æquales erunt. Ergo (*e*) triangula ABF & L ſimilia ſunt. Eodem modo ſimilia oſtendam eſſe triangula ABF & R, angulumque I parem angulo F. Ex quo jam patet etiam R & L ſimilia eſſe, cùm æquales ſint anguli I & F; A & O; V & X. Quod erat demonſtrandum. (d) Per cor. 9 p. 32. l. 1. (e) Per 4. l. 6.

Corollaria.

PRimò, BC eſt media proportionalis inter AC, CF. Fig. 17.

Cùm enim ſint in triangulis R & L,

æqu. ang. F.	æqu. ang. A. O.
lat: opp. AC. CB	lat. opp. CB. CF;

Patet (*f*) AC eſſe ad CB, ut CB eſt ad CF. (f) Per 4. l. 6.

2. BF eſt media proportionalis inter AF & CF. Item AB eſt media inter FA & CA.

Nam in triangulis ABF & L, ſunt

æqu. ang. ABF. X.	æqu. ang. A. O.
lat. opp. AF. BF.	lat. opp. BF. CF;

(a) Per 4. l. 6. Ergo AF eſt (a) ad BF, ut BF ad CF.
Similiter, quia in triangulis ABF & R, ſunt

æqu. ang. ABF. V.	æqu. ang. F. I.
lat. opp. AF. AB.	lat. opp. AB. AC.

Erit rurſum AF ad AB, ut AB ad AC.

Fig. 17. (b) Per 4. l. 6. [3. *In tribus his triangulis ABF, R & L, recta æqualibus angulis oppoſita proportionales* (b) *erunt. Unde, ſi primæ rationis termini e triangulo ABF, illi ſecundæ rationis e triangulo R, iique tertiæ rationis ex L ſumantur; erit AB: BF :: AC: CB :: BC: CF. Et rurſum, BA: AF :: CA: AB :: CB: BF. Denique AF: FB :: AB: BC :: BF: FC. Nam hoc modo ratiocinando, termini homologi æqualibus angulis ubique opponentur.*]

PROPOSITIO IX.

Fig. 18. *Datam rectam (AB) dividere ſecundum datam proportionem (FI ad IL.)*

Ducatur infinita AZ; ex quâ ſume AQ, QR æquales FI, IL. Ex R duc RB. Huic ex Q duc QC parallelam. Dico factum.

Patet ex p. 2. l. 6.

[Cor. 1. *Hinc datam rectam AB ita ſecabis, ut tota ſit ad partem abſciſſam BC in datâ ratione majoris inæqualitatis, nempe ut FL ad LI, ſi in rectâ infinitâ AZ, capiatur AR = FL, & in rectâ RA capiatur RQ = LI, & jungatur RB, eique parallela ducatur QC.*

Cor. 2. *Hinc etiam, datam rectam AC ſic producere licebit ad B, ut tota producta AB ſit ad partem adjectam BC, in ratione datâ majoris inæqualitatis, nempe ut FL ad LI, ſumendo in rectâ infinitâ AZ, AR = FL, & in rectâ RA, RQ = LI, ac jungendo QC, eique parallelam ducendo RB, quæ in rectâ AC productâ, punctum B determinabit.*

Cor. 3. *Hinc denique, datam rectam AC ſic producere licebit, ut ipſa AC ſit ad totam productam in ratione datâ minoris inæqualitatis, nempe ut FI ad FL; ſumendo in rectâ infinitâ AZ, rectas AQ, AR, rectis FI, FL reſpectivè æquales, & jungendo QC, eique ducendo parallelam RB, quæ in rectâ AC producta punctum B determinabit.*]

PRO-

PROPOSITIO X.

Datam rectam (AB) ſimiliter ſecare ut altera data (AI) fuerit ſecta (in F, C.) Fig. 19.

Extremitates ſectæ & inſectæ jungat recta IB. Huic ex punctis F, C duc parallelas, rectæ ſecandæ AB occurrentes in L & Q. Dico factum.

Patet ex coroll. 1. p. 2. l. 6.

[*Aut etiam, ſi linea ſecta IA ſit major ſecandâ BQ, ſint tres circuli ſe mutuò tangentes diametris IF, IC, IA deſcripti; & aptetur ſubtenſa BQ a puncto I ad circumferentiam circuli maximi: circuli duo minores in punctis L, P lineam BQ ſecabunt in* (a) *ratione ſectionum diametri IA. Si linea IA ſecta ſit in partes quatuor, circuli quatuor adhibendi ſunt; ſi in quinque, circuli etiam quinque; & ita in infinitum.*] Fig. 20. (a) Per cor. 2. p. 2. l. 6.

Scholium.

Ex hac propoſitione diſcemus rectam datam in quotvis æquales partes ſecare. Cum rectâ ſecandâ AB faciat quemvis angulum recta quæpiam infinita; ex quâ circino cape tot æquales partes AC, CF, FI, in quot ſecare placuerit AB. Duc rectam IB, eique parallelas FL, CQ. Dico factum. Fig. 19.

Aliter idem & faciliùs efficiemus cum Maurolyco hunc in modum. Sit AB triſecanda. Duc ad AB parallelam IX infinitam, ſupra vel infra. Ex IX, ſi eſt infra AB, cape circino tres æquales partes IQ, QR, RS, quæ ſimul majores ſint quàm AB, minores verò ſi IX eſt ſupra. Per I & A, item per S & B duc rectas; quæ (*b*) concurrent in C. Ex C ad Q & R ductæ rectæ datam AB triſecabunt. Demonſtratio patet ex coroll. 2. prop. 4. Fig. 21. (b) Per ſch. p. 33. l. 1.

Rurſum cum Maurolyco aliter id ipſum ita obtinebimus. Sit quatriſecanda AB. Duc infinitam AX, eique parallelam BZ etiam infinitam. Ex his cape circino partes æquales AL, LO, OQ, & BV, VS, SR, in ſingulis nempe unâ pauciores; quàm deſiderentur in AB: tum rectæ ducantur LR, OS, QV. Hæ quatriſecabunt datam AB. Fig. 22.

Nam quia per conſt. LO, RS parallelas & æquales, jungunt LR & OS, etiam hæ erunt (*c*) parallelæ. Pari modo OS, QV ſunt parallelæ. Ergò cùm AQ ſit ſecta in tres æquales partes, etiam erit AI ſecta (*d*) in tres æquales. Similiter (c) Per 33. l. 1. (d) Per cor. 1. p. 2. l. 6.

militer erit BC ſecta in tres æquales. Tota igitur AB ſecta eſt in quatuor æquales.

Hæ duæ praxes ſunt faciliores Euclideâ, quia pauciores ducendæ ſunt parallelæ.

Fig. 23. Coroll. *Hinc Trapezium ABCD, cujus latera AD & BC ſunt parallela, in partes quotcunque æquales, partiri diſcimus. Producatur enim BC ad E: ut fiat CE æqualis AD. Ob angulos alternos DAF, FEC, & ADF, ECF*(a) *æquales, & baſes AD, CE per conſtructionem æquales, triangula ADF & FCE* (b) *æqualia ſunt; & proinde triangulum ABE Trapezio ABCD æquale. Diviſâ* (c) *itaque baſi BE in æquales quotcunque partes, puta tres BG, GR, RE, ductiſque AG, AR, erit triangulum ABG, vel AGR, vel ARE, trapezii pars tertia. Q. E. I.*

(a) Per 27. l. 1. (b) Per 26. l. 1. (c) Per hoc ſch.

PROPOSITIO XI.

Fig. 24. D*Atis duabus rectis (AB, BC) tertiam proportionalem invenire.*

Duc rectam AC. Ex BA productâ accipe AF parem BC. Per F ad AC duc parallelam FX infinitam, cui in L occurrat producta BC. Dico AB eſſe ad BC ut BC ad CL.

Nam AB eſt ad AF, (d) ut BC ad CL. Sed AF eſt (e) par BC. Ergo AB eſt ad BC; ut BC ad CL; adeoque CL eſt tertia proportionalis quæ petebatur.

(d) Per 2. l. 6. (e) Per conſtr.

Aliter.

Fig. 25. STatuantur AB, BC ad angulum rectum. Junge AC. Ex C duc infinitam CX perpendicularem ad AC, cui in L occurrat AB producta. Dico AB eſſe ad BC, ut BC ad BL. Patet ex coroll. 1. prop. 8.

Scholium.

POterit verò proportio data non ſolùm per tres terminos, ſed etiam per infinitos continuari, & tota infinitorum proportionalium terminorum ſumma exhiberi. Pulcherrimè hanc rem, totumque adeo Geometricæ progreſſionis negotium Gregorius a S. Vincentio proſecutus eſt totò libro 2. ſui operis. Nos in gratiam ſtudioſorum, ſuccinctam rei propoſitæ conſtructionem ac demonſtrationem hîc exhibebimus.

Lemma

Lemma 1.

SI ratio minoris inæqualitatis LO ad LR ſemper continuetur, venietur ad quantitatem quavis datâ majorem. *Fig. 26. ſecunda.*

Sit LO ad LR, ut LR ad LQ, &c. Igitur (*a*) invertendo, ut QL ad RL, ſic RL ad OL. Ergo divid. (*b*) QR ad RL, ut RO ad OL: & permut. (*c*) QR ad RO, ut RL ad OL. Sed RL eſt major quàm OL. Ergo etiam QR major quàm RO. Pari modo oſtendam IQ eſſe majorem quàm QR, & ſic deinceps. Quoniam igitur continuando rationem LO ad LR, ad primam LO ſemper accedunt partes OR, RQ, QI, &c. perpetuò creſcentes, patet veniri ad quantitatem quavis datâ majorem. Quod erat demonſtrandum.

(a) *Per ſch. p. 16. l. 5.* (b) *Per 17. l. 5.* (c) *Per 16. l. 5.*

Lemma 2.

SI ratio quæcunque majoris inæqualitatis AB ad CB ſemper continuetur, ad quantitatem venietur quavis datâ minorem. *Fig. 26. utraque.*

Data ſit LO quantumvis parva. Fiat (*d*) ut BC ad BA, ſic LO ad LR. Poterit (*e*) ratio LO ad LR toties continuari, ut aliquis terminus habeatur, puta LI major quàm AB. Quoties verò continuata jam eſt ratio LO ad LR, per totidem terminos CB, EB, FB continuetur ratio AB ad CB. Erit FB minor quàm OL.

Nam ex conſt. patet IL, QL, RL, OL, eſſe proportionales ipſis AB, CB, EB, FB. Igitur ex æquo ut (*f*) IL ad OL, ſic AB ad FB, & permutando (*g*) ut IL ad AB, ſic OL ad FB. Sed IL eſt major (*h*) quàm AB. Ergo etiam data OL eſt major quàm FB. Quod erat demonſtrandum.

(d) *Per cor. 3. p. 9. l. 6.* (e) *Per lem. 1.* (f) *Per 22. l. 5.* (g) *Per 16. l. 5.* (h) *Per conſtr.*

Problema.

DAta ſit ratio majoris inæqualitatis AB ad BC. Oporteat hanc per infinitos terminos continuare, & omnium ſummam exhibere. *Fig. 27.*

Erigantur perpendiculares AL, BO, æquales datis AB, BC, & per LO ducatur recta concurrens (*i*) cum ABC productâ, in Z. Dico 1. Si ex C. erigas perpendicularem CQ; erit CQ tertia proportionalis. QC transfer in CE, & ex E erige

(i) *Per ſch. p. 33. l. 1.*

ER; erit hæc quarta. ER transfer in EF, & erige FS; erit hæc quinta: atque ita ratio AB ad BC, hoc eſt AL ad BO, per terminos AL, BO, CQ, ER, FS, &c. ſive AB, BC CE, EF, FI, &c, in infinitum continuabitur, quia quilibet terminus (ut FS) poterit auferri ex reſiduo FZ; cùm enim LA (hoc eſt AB) ſit minor quàm AZ, etiam FS erit (a) minor quàm FZ.

(a) *Patet ex cor. 1. p. 4. l. 6. & p. 14. l. 5.*

Dico 2. AZ eſt æqualis toti ſummæ infinitarum proportionalium.

1. Pars. AZ eſt ad BZ, ut (b) AL ad BO; hoc eſt, ut AB ad BC: Igitur permutando & invertendo, (c) AB eſt ad AZ, ut BC ad BZ. Ergo AZ eſt ad BZ, (d) ut BZ ad CZ. Sed ut AZ eſt ad BZ, (e) ſic LA eſt ad OB; & ut BZ ad CZ, ita OB ad QC. Ergo etiam LA eſt ad OB, ut OB ad QC. Eodem modo oſtendam OB eſſe ad QC, ut QC ad RE, & ſic deinceps in infinitum.

(b) *Per idem coroll.*
(c) *Per 16. l. 5. cum ſchol.*
(d) *Per cor. 2. p. 18. l. 5.*
(e) *Per cor. 1. p. 4. l. 6.*

2. Pars. Tota ſumma infinitorum terminorum, neque minor eſt quàm AZ, neque major; Ergo æqualis. Non eſt major, quia, cùm jam oſtenderim ſupra, QC eſſe minorem quàm CZ, & RE quàm EZ, & SF quàm FZ, & ſic deinceps ſine termino; poterunt omnes termini QC, RE, SF &c. ſine fine conſtitui juxta invicem in rectâ AZ, ſic ut numquam punctum Z [*quolibet finito terminorum numero*] attingatur; [*neque terminorum ſerie in infinitum continuatâ, excedi poſſe rectam AZ, exinde patet, quòd tota illa ſeries infinita, in AZ poterit transferri; ac proinde ſeries illa non erit major quàm AZ.*] Non erit etiam minor quàm AZ; quia jam oſtendi ſupra AZ, BZ, CZ eſſe continuè proportionales, & eodem modo oſtenditur de reliquis EZ, FZ, IZ, &c. Cùm igitur, transferendo proportionales QC, ER, FS, &c. in CE, EF, FI, &c. reſidua EZ, FZ, IZ, &c. ſemper ſint continuè proportionalia, ut jam oſtendimus; venietur tandem ad reſiduum (f) dato minus; ac proinde ſumma proportionalium ſuperabit quantitatem omnem quæ minor ſit quàm AZ: unde ipſa non poteſt eſſe minor quàm AZ. Quoniam igitur nec major eſt, nec minor quàm AZ, eidem æqualis erit. Quod erat demonſtrandum.

(f) *Per lem. 2.*

Theorema.

PRimorum terminorum differentia, primus terminus, & tota infinitarum proportionalium ſumma, ſunt continuè proportionales.

Fig. 27.

In ſuperiori figurâ ducatur OX parallela AZ. Igitur LX erit differentia primi termini AL ſeu AB, & ſecundi BO, ſeu

ſeu BC. Quoniam XO eſt parallela ad AZ; erit LX ad XO, ut (*a*) LA ad AZ. Sed XO eſt AB, & LA etiam eſt AB. Ergo LX differentia, eſt ad AB primum terminum, ut AB primus terminus ad AZ totam ſummam. Quod erat demonſtrandum. (a) *Per cor.* 1. *p.* 4. *l.* 6.

Idem univerſaliter & breviſſimè demonſtrabitur in omni genere quantitatis hunc in modum. Sint continuè proportionales quæcunque, (etiam numeri,) AZ, BZ, CZ, &c. quæ transferantur omnes in primam AZ. Erunt igitur AB, BC, CE, EF, &c. proportionalium differentiæ, quæ unà cum poſtremâ quantitate IZ, æquantur primæ AZ. Quia verò, ſi proportionales in infinitum continuentur, poſtrema quantitas per lem. 2. evaneſcit, patet infinitarum proportionalium differentias æquari primæ AZ. Deinde, quia eſt AZ ad BZ, ut BZ ad CZ, & ſic deinceps; erit dividendo AB ad BZ, ut BC ad CZ, & (*b*) convertendo, ut AB prima differentia ad AZ primam quantitatem, ita BC ſecunda differentia ad BZ quantitatem ſecundam, & ſic deinceps; Ergo ut AB prima differentia ad AZ primam quantitatem, (*c*) ita omnes differentiæ (hoc eſt, ut jam oſtendi, prima quantitas AZ,) ad omnes quantitates, hoc eſt, ad totam ſummam infinitarum quantitatum. Quod erat demonſtrandum. *Fig.* 28. (b) *Per cor.* 1. *p.* 18. *l.* 5. (c) *Per* 12. *l.* 5.

PROPOSITIO XII.

Datis tribus rectis (*AB, BC, AF,*) *quartam proportionalem invenire.* *Fig.* 29.

Diſponantur datæ rectæ, ut figura monſtrat, & duc rectam BF, cui parallela fiat CZ infinita: Ipſi CZ occurrat AF producta in L.

Dico AB eſſe ad BC, ut AF ad FL, ut patet ex p. 2. hujus. Ergo FL eſt quarta proportionalis quæſita.

Scholium.

Pulchrè Bettinus noſter in ſuo Ærario Mathematicæ Philoſophiæ, ex 35. l. 3. & 14. hujus, quæ ab hac non dependet, datis tribus quartam, & datis duabus tertiam proportionalem exhibet, hunc in modum. *Fig.* 30.

Si tres dentur rectæ; ſecunda CB & tertia BD ponantur in directum, quas prima BA tangat in B ſub quovis angulo,

Per

(a) Per 5. l. 3. Per puncta C, A, D deſcribe (a) circulum, cui AB primæ occurrat in Z. BZ eſt quarta proportionalis.

(b) Per 35. l. 3. Cùm enim rectangula ABZ, CBD (b) æqualia ſint, erit AB ad BC, ut BD ad BZ per 14. hujus, quæ ab hac, ut dixi, non dependet.

Fig. 31. Si dentùr duæ rectæ AB, BC; ſecundæ BC apponatur in directum BD æqualis BC. Dein ipſam CD in B tangat primæ AB ſub quovis angulo. Tum reliqua ut ſupra. Erit BZ tertia proportionalis quæſita.

Demonſtratio ſimilis eſt: cùm enim rectangula ABZ, CBD ſint æqualia, erit AB ad BC, ut BD, hoc eſt, ut BC ad BZ.

PROPOSITIO XIII.

Fig. 32. *Datis duabus rectis (AC, CB,) mediam proportionalem invenire.*

Tota compoſita AB biſecetur in O, & centro O deſcribatur circulus per A & B: ex C erige perpendicularem CF, occurrentem peripheriæ in F.

Dico AC eſſe ad CF, ut CF ad CB.

(c) Per 31. l. 3. (d) Per cor. 1. p. 8. l. 6. Ducantur enim AF, BF. Triangulum (c) AFB rectangulum eſt, & a recto angulo ducta eſt perpendicularis FC in baſim. Ergo AC eſt ad CF, ut (d) CF ad CB.

Corollaria.

1. Hinc patet, ſi ex quovis peripheriæ puncto (F) ducta ſit ad diametrum perpendicularis (FC,) eam eſſe mediam proportionalem inter diametri ſegmenta (AC, CB.)

[Cor. 2. *Hinc quoque media proportionalis CE dimidiam extremarum ſummam AO ſuperare nequit; & ſi extremæ fuerint inæquales, media CF erit illarum dimidia minor. Quod etiam ex pr. 25. ſupra deductum erat.*

Scholium ad Cor. 2. Problema. *Datâ, e tribus proportionalibus, extremarum ſummâ AB, & mediâ DE, invenire ipſas extremas. Oportet autem mediam proportionalem DE aſſignari, dimidiâ AB non majorem, per cor. 2.*

Super diametro AB circulus deſcribatur, quam ad B (utrumlibet diametri extremum) tangat GB data DE æqualis, & per G ducatur GF ipſi AB parallela, quæ, quia DE ſive GB radio circuli non eſt major, circulo occurret in F. A puncto F ad diametrum AB demiſſa perpendicu-

dicularis FC, ipſam AB dividit in extremas quæſitas AC, CB. Nam FC (per cor. 1. hujus) eſt media proportionalis inter extremas AC, CB: eſt autem (per prop. 34. l. 1.) FC = GB, hoc eſt, per conſtr. = DE. Factum eſt igitur quod petebatur. Arithmetice autem invenientur AC, CB ex iiſdem datis, ſi, ductâ OF, ex ejus quadrato = ¼ ABq = Quadr. ½ AB, ſubducatur FCq = DEq, & relinquetur OCq, cujus radix quadratica OC addita dimidiæ AB, & ab eâdem dimidiâ ſubductâ, dabit AC, CB quantitates quæſitas.

Cor. 3. *Hinc etiam tres, vel ſeptem, quindecim &c. mediæ proportionales, facili negotio inveniuntur, talis ſcil. quivis mediarum numerus, qui ex continuâ proportionalium 1. 2. 4. 8. 16. &c. additione oritur; nempe vel unica = 1, vel tres = 1 + 2, vel ſeptem = 1 + 2 + 4, & ſic deinceps.*

Sint quantitates datæ A & E; inter quas media ſit M, per hanc pr. inventa: deinde inter A & M fac mediam L, atque inter M & E mediam N: erunt L, M, N, tres mediæ inter A & E. Et ſi porro mediæ proportionales conſtituantur inter A & L, L & M, M & N, N & E habebis ſeptem medias inter A & E. Mediæ verò inter harum ſingulas, unà cum ipſis ſeptem intermediis prioribus, conſtituent medias quindecim inter A & E. Atque ita porro.]

Scholium.

HIC locus omnino exigit, ut de duabus mediis proportionalibus inter duas datas inveniendis etiam breviter dicamus aliquid. In hujus problematis ſolutionem, Platonis hortatu, omnes Græciæ Geometræ ſummo ſtudio incubuerunt. Ab Eutocio in comment, in (a) Archim. varii recenſentur ſubtiliſſimi modi, Platonis, Architæ Tarentini, Menæchmi, Eratoſthenis, Philonis Byzantii, Heronis, Apollonii Pergæi, Nicomedis, Dioclis, Spori, Pappi: quibus alios deinde addiderunt Vernerus, P Gregorius a S. Vincentio, Renatus Carteſius. Ex omnibus viſum eſt tres adferre reliquis faciliores.

(a) *Comment in theor. 1. l. 2. de Sphærâ & Cylindro.*

Modus Platonis.

OPorteat inter datas AB, BC, duas medias invenire. *Fig. 33.*
Ponantur AB, BC ad rectum angulum, & producantur infinitè verſùs Z & X. Accipiantur deinde duæ normæ (ita Claudius Richardus noſter; Plato enim unicâ normâ utitur, ſed (b) cujus lateri DE inſerta ſit regula mobilis per DE, [*ipſi perpendicularis*;]) & unius normæ angulus D applicetur

(b) *Vide Fig. 34.*

plicetur rectæ BX, eâ lege ut, & latus unum tranſeat per A; & ad punctum E, in quo latus alterum ſecabit rectam BZ, applicatâ normâ ſecundâ, tranſeat per C. Dico BD, BE duas eſſe medias inter datas AB, BC; hoc eſt, ut AB eſt ad BD, ſic eſſe BD ad BE, & BE ad BC.

Demonſtratio patet ex coroll. 1. p. 8. l. 6. Nam ADE rectangulum triangulum eſt, & ab angulo recto in baſim perpendicularis cadit DB. Ergo per dictum coroll. ut AB ad BD, ſic BD ad BE: Et ob eandem cauſam, ut BD ad BE, ſic BE ad BC. Inter datas igitur AB, BC repertæ ſunt duæ mediæ BD, BE. Quod erat faciendum. Hic modus inter omnes intellectu facillimus eſt.

Modus Philonis Byzantii.

Fig. 35. DUæ datæ AB, BC jungantur ad rectum angulum: tum perficiatur rectangulum ABCD, & producantur DA, DC infinitè, ducanturque [*rectanguli ABCD*] diametri BD, AC, ſe ſecantes in E. Centro E per B ducatur circulus, qui, quòd ABCD rectangulum ſit, tranſibit (*a*) per A, D & C. [*Cùm enim circulus rectangulo* (b) *circumſcribi poterit; puncta A, B, C, D erunt in circuli circumſcripti circumferentiâ: & propter angulos rectos ABC, BCD, recta AC, BD erunt* (c) *ejuſdem circuli diametri, quarum interſectio E, circuli centrum erit. Circulus igitur, eodem centro E & radio BE deſcriptus, tranſibit per A, D & C.*] Tum regula ſic applicetur ad punctum B, interceptæ BG, OF ſint æquales. Dico AF, GC eſſe duas medias inter datas AB, BC hoc eſt, ut AB eſt ad AF, ſic AF eſſe ad GC, & GC ad CB.

(a) *Patet ex* 31. *l.* 3. (b) *Per cor. p.* 5. *l.* 4. (c) *Per* 31. *l.* 3.

Demonſt. Quia GB, OF (*d*) æquantur, etiam OG, BF æquales erunt. Ergo æqualia ſunt rectangula OGB, BFO, hoc eſt rectangula (*e*) DGC, DFA. Ergo eſt ut GD ad DF, (*f*) ſic reciprocè AF ad GC. Sed [*in triangulo FGD, propter BA parallelam baſi GD,*] GD eſt ad DF, (*g*) ut BA ad AF. Ergo (*h*) ut BA eſt ad AF, ſic AF eſt ad GC. Rurſum quia jam oſtendi AF eſſe ad GC, ut BA eſt ad AF; eſt verò BA ad AF, ut GD ad DF, hoc eſt [*propter CB parallelam baſi DF, in triangulo GDF,*] ut GC ad CB; erit (*i*) quoque AF ad GC, ut GC eſt ad CB. Omnes igitur quatuor BA, AF, GC, CB, ſunt continuè proportionales; ac proinde inter datas AB, BC inventæ ſunt duæ mediæ. Quod erat faciendum.

(d) *Per conſtr.* (e) *Per cor.* 1. *p.* 36. *l.* 3. (f) *Per* 14. *quæ ab hac non pendet.* (g) *Per cor.* 1. *p.* 4. *l.* 6. (h) *Per* 11. *l.* 5. (i) *Per eand.*

Hi duo modi quamvis ſint ingenioſi & faciles; tamen, quia debita normæ & regulæ applicatio non niſi tentando fit, Geometrici non ſunt.

Modus

Modus Carteſii.

PAretur inſtrumentum hujuſmodi. Duæ regulæ aperiri poſſint & claudi circa Y. His inſertæ ſint plures normæ inter ſe connexæ in B, C, D, E, F, G, eâ lege ut dum regulæ YX, YZ aperiuntur, norma BC impellat normam CD in regulâ YZ, & norma CD impellat normam DE in regulâ YX, & DE impellat EF, & EF impellat FG, & ſic deinceps. Dum verò regulæ YX & YZ clauduntur, omnia puncta B, C, D, E, F, G, incidant in unum idemque punctum A. Hoc inſtrumento inter duas datas non ſolum duæ, ſed etiam quatuor & ſex, imo quotvis mediæ reperiuntur. Quod neque per ſectiones conicas, neque per modos ullos ab auctoribus ſupradictis inventos obtineri poteſt. Fig. 36.

Pro duabus mediis opus eſt normis tribus, pro mediis 4. normis 5. & ſic deinceps.

Minor datarum transferatur in regulam YX, & ſit YB, major in regulam alteram YZ, & ſit YE. Applicetur norma prima ad punctum B, ibidemque firmetur, & aperiantur regulæ, donec normæ tertiæ latus tranſeat per E. Dico YC, YD eſſe duas medias inter datas YB, YE; hoc eſt, YB eſſe ad YC ut YC eſt ad YD, & YD ad YE.

Demonſtratio manifeſta eſt ex cor. 2. p. 8. l. 6. Nam ex naturâ inſtrumenti, in trigono YCD angulus ad C rectus eſt, ab eoque cadit CB perpendicularis in baſim YD. Ergo per dictum coroll. ut YB eſt ad YC, ſic YC ad YD. Rurſum, quia in trigono YDE angulus ad D rectus eſt, ab eoque cadit perpendicularis DC in baſim YE, erit ut YC ad YD, ſic YD ad YE. Sunt igitur YB, YC, YD, YE quatuor continuè proportionales. Inter datas igitur YB, YE inventæ ſunt duæ mediæ YC, YD. Quod erat faciendum.

Si inter datas YB, YG, petantur 4. mediæ, aperi regulas donec normæ quintæ latus FG tranſeat per G. Erunt YC, YD, YE, YF quatuor mediæ inter YB, YG. Demonſtratio patet ex eod. coroll.

Hic modus, quamvis organum ſit Platonico illo operoſius, planè eximius eſt, tum quia nihil perficit tentando, tum quia ad 4. & 6. imo quotcunque medias ſe extendit.

Per duas medias perficitur problema Deliacum, cubi nimirum duplicatio, & corpora quæcunque in datâ proportione (*a*) augentur vel minuuntur, quemadmodum id ipſum in figuris planis efficitur (*b*) per unam mediam. Hanc viam primus aperuit Hippocrates, quam ut ſingularem & unicam, omnis Geometrarum poſteritas amplexa eſt.

(a) *Vide ſch. poſt 18. l. 12.*
(b) *Vide cor. 4. p. 20. l. 6.*

Corol.

Fig. 37. [Corol. *Hinc habetur methodus rationem quamvis minoris inæqualitatis quouſque libuerit continuandi. Detur ratio minoris inæqualitatis AO ad AC, quam per plures terminos continuare oportet. Super diametro AC deſcribe ſemicirculum, cui a*

(a) Per 31. l. 3. & def. 14. l. 1. *puncto A, inſcribe AB = AO, & indefinite producantur AB, AC versùs P & Q. Junge BC, & erige perpendiculares CD,*

(b) Per cor. 2. p. 8. l. 6. *DE, EF, FG, &c. Propter angulos rectos* (a) *ABC, ACD, ADE, AEF, AFG, &c. erunt* (b) *AB, AC, AD, AE, AF, AG, &c. continuè proportionales.*

Fig. 38. *Idem etiam obtinebitur, quamvis angulus ABC non ſit rectus. Occurrant ſibi invicem in quovis angulo BAC, recta AB, AC; & producantur ut ſupra, versùs P, Q; jungaturque BC. Tum angulo ABC ſiant æquales anguli ACD, ADE, AEF, &c. Et triangula ABC, ACD, ADE, &c. propter illos an-*

(c) Per cor. 9. p. 32. l. 1. *gulos, & angulum A communem, erunt æquiangula* (c) *&*

(d) Per 4. l. 9. *ſimilia* (d). *Ergo AB : AC :: AC : AD :: AD : AE :: AE : AF, &c.*]

PROPOSITIO XIV.

Fig. 39. 40. *Parallelogramma æqualia (X, Z) quæ unum angulum (C) uni (O) habent æqualem, etiam latera circa æquales angulos habent reciproca: (hoc eſt, AC eſt ad CB, ut FO ad OL.)*

Et ſi latera ſic habent reciproca, parallelogramma ſunt æqualia.

[*Ponantur latera AC, OB ita in directum, ut æquales angu-*

(e) Per 13. l. 1. (f) Per 14. l. 1. *li C, O, jaceant ad partes contrarias rectæ AB: & propter angulos C, & LCB duobus rectis* (e) *æquales, erunt LCB & O duobus rectis æquales, & proinde FO, CL* (f) *ſunt in directum.*]

(g) Per 1. l. 6. (h) Per eand. (i) Per 7. l. 5. (k) Per 11. l. 5.

1. Pars. IL & SB productæ concurrant in Q. Parallelogrammum X eſt ad parall. R, ut AC (*g*) ad CB: & Z eſt ad (*h*) R, ut FO ad OL. Sed quia per hyp. X & Z æqualia ſunt, X eſt (*i*) ad R, ut Z eſt ad R. Ergo etiam AC eſt ad CB, ut (*k*) FO ad OL. Quod erat demonſtrandum.

(l) Per 1. l. 6. (m) Per eand. (n) Per 11. l. 5. (o) Per 9. l. 5.

Dem. 2. pars. Ut AC ad CB, ſic (*l*) X eſt ad R: & ut FO ad OL, ſic (*m*) Z ad R. Sed jam per hyp. AC eſt ad CB, ut FO ad OL. Ergo X eſt ad R, (*n*) ut Z eſt ad R. Ergo X & Z æqualia (*o*) ſunt.

[Corollarium. *Hinc pendet regula proportionum inverſa, ſive reciproca demonſtratio, qua ex datis tribus terminis, quartum*

tum invenit multiplicando in ſe invicem duos priores, & factum dividendo per tertium, ut indè habeatur terminus quartus. Sicut enim in regulâ directâ ſpectatur æqualitas rationum, ut ſi fuerit $A : B :: C : D$, *erit* $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ *(ubi quotus termini primi per ſecundum diviſi, quoto tertii per quartum diviſi æquatur,) ita in regulâ inversâ ſpectatur æqualitas rectangulorum, ſive factorum, ita ut rectangulum ſub primo & ſecundo, æquale ſit rectangulo ſub tertio & quarto. Ex. gr. ſi fuerint* A, B; C, D *reciproce proportionales, (hoc (a) eſt, ſi* $A : C :: D : B$,) *erit (per hanc prop.)* $A \times B = C \times D$; *& proinde ſi facta iſta æqualia per terminum tertium* C *dividantur, exorietur quotus* $\frac{A \times B}{C} = D$ *per terminum quartum.* (a) Per def. 2. l. 6.

Sint quantitates AB, BC; LI, IF *reciproce proportionales:* Fig. 44.
Erit $IF = \frac{AB \times BC}{LI}$. *Ex. gr. ſit AB linea perticarum* 40. *BC pertic.* 4. *Erit* $AB \times BC$, *ſive rectang. X pertic.* 160, *ſive jugerum Anglicum. Proponatur jam jugerum aliud Z, perticas* 16. *longum, ut LI, & quæratur ejus latitudo IF. Ob æqualitatem rectangulorum X & Z, cùm rectang. X majorem habeat longitudinem quàm ſibi æquale Z, minorem latitudinem habebit; ac proinde* minor *longitudo LI jugeri Z* majorem *latitudinem IF, pro regula inverſæ naturâ, poſtulat. Et æqualibus rectangulis,* $AB \times BC$, $LI \times IF$, *per LI diviſis, oritur quotus*

$$\frac{AB \times BC}{LI} \left(= \frac{40 \times 4}{16} = \frac{160}{16} \right) = IF = 10.$$

Ergo jugerum Z latum eſt 10 *perticas. Q. E. I.*]

PROPOSITIO XV.

ÆQualia triangula (ACL, FCB) quæ unum angulum (C) uni (O) æqualem habent, etiam latera circa æquales angulos habent reciproca: (hoc eſt, AC eſt ad CB, ut FO ad OL. Fig. 41. 42.

Et ſi latera ſic habent reciproca, triangula ſunt æqualia.

[*Ponantur AC, OB in directum, prout in prop. præced. Eaunt etiam LC, OF in directum; &*] ducatur recta LB: reliqua demonſtratio eadem eſt quæ præcedentis.

Corollarium.

TAM parallelogramma, quàm triangula, quæ reciprocant baſes & altitudines; ſunt æqualia: Et e converſo.

Patet ex duabus præcedentibus [*rectangula parallelogramma* (*Fig.* 39.) *vel triangula rectangula* (*Fig.* 42.) *quæ reciprocant baſes AC, CB, & altitudines OL, OF; æqualia eſſe. Et cùm parallelogramma vel triangula obliquangula quæcumque,* (a) *æqualia reſpectivè ſint parallelogrammis vel triangulis rectangulis ſuper eâdem baſi vel æquali, & ejuſdem altitudinis; æquabuntur etiam parallelogramma vel triangula quæcunque quæ reciprocant baſes & altitudines.*

(a) Per 35, 36, 37, 38, l. 1. & def. 3. l. 6.

Et e converſo, cùm rectangula parallelogramma æqualia, & rectangula triang, æqualia. (*Fig.* 39. 42.) *reciprocent* (b) *baſes & altitudines: Et cùm parallelogramma & triangula quæcunque, æqualia* (c) *ſint parallelogrammis & triangulis rectangulis ſuper eâdem baſi vel æquali, & ejuſdem altitudinis; Liquet æqualia quæcunque parallelogramma, & æqualia quæcunque triangula, baſes habere altitudinibus ſuis reſpectivè reciprocas.*

(b) Per præced. & hanc.
(c) Per 35, 36, 37, 38. l. 1. & def. 3. l. 6.

Fig. 43. Scholium. *Sint duo triangula ABC, DBE quorum anguli ad B ſimul ſumpti æquales ſint duobus rectis; ſintque latera circa angulos ABC, DBE reciproca; Erunt triangula iſta æqualia: Si verò triangula fuerint æqualia; latera circa angulos ABC, DBE erunt reciproca. Compleantur enim parallelogramma BF, BG; & propter angulos ad B duobus rectis æquales, recta CB, BE in directum* (d) *jacent; & propter parallelas CBE, DF, anguli* (e) *alterni ABC, BDF ſunt æquales: Et quoniam* (f) *eſt AB ad BD, ut EB ad BC; eſt autem EB ipſi DF* (g) *æqualis; erit etiam AB:BD :: DF:BC; hoc eſt, latera circa æquales angulos ABC, BDF* (h) *ſunt reciproca: ergo parallelogramma* (i) *BG, EF ſunt æqualia, & proinde* (k) *eorum dimidia ABC, DBE æqualia erunt.*

Eodem modo, ſi triangula ABC, DBE æqualia ſint, & habeant angulos ABC, DBE duobus rectis æquales; erit AB: BD :: EB: BC. Compleantur enim parallelogramma BF, BG, quæ erunt triangulorum (l) *æqualium dupla, & proinde æqualia; & propter parallelas* (m) *CBE, DF, etiam* (n) *æquiangula: ergo latera circa æquales angulos* (o) *ſunt reciproca; hoc eſt, AB:BD :: DF ſive BE:BC. Q. E. D.*]

(d) Per 14. l. 1.
(e) Per 27. l. 1.
(f) Per hyp.
(g) Per 34. l. 1.
(h) Per def. 2. l. 6.
(i) Per 14. l. 6.
(k) Per 34. l. 1.
(l) Per eand.
(m) Per 14. l. 1.
(n) Per 27. l. 1.
(o) Per 14. l. 6.

PRO-

PROPOSITIO XVI.

SI quatuor rectæ (AB, FI; IL, BC) fuerint proportionales; (hoc eſt, ſi AB ſit ad FI, ut IL ad BC;) Rectangulum (X) ſub extremis (AB, BC) æquale eſt rectangulo (Z) ſub mediis, (FI, IL.) Fig. 44.

Et ſi rectang. ſub extremis æquetur rectangulo ſub mediis, erunt illæ quatuor rectæ proportionales.

1. Pars. In rectangulis X & Z, circa rectos angulos, ac proinde æquales B, I, per hyp. eſt AB ad FI, ut reciproce IL ad BC. Ergo (a) X & Z æqualia ſunt. Quod erat demonſtrandum. (a) Per 14. l. 6.

2. Pars. Quoniam X & Z jam ponuntur æqualia; Ergo circa æquales angulos B & I, eſt AB ad FI, (b) ut reciproce IL ad BC. Quod erat demonſtrandum. (b) Per eand.

[Coroll. 1. *Hinc ad datam rectam lineam AB facile eſt datum rectangulum Z applicare: faciendo* (c) *nimirum AB : FI :: IL : BC, & rectangulum* X *ſub AB*, BC (d) *conſtruendo. Eſt enim X dato* Z (e) *æquale rectangulum ad datam rectam AB applicatum. Idem aliter efficies per cor. & ſchol. p. 44. l. 1.*

(c) Per 12. l. 6.
(d) Per ſch. p. 46. l. 1.
(e) Per hanc prop.

Cor. 2. *Hinc pendet regula proportionum directæ demonſtratio, quæ ex datis tribus terminis, quartum proportionalem invenit, multiplicando ſecundum & tertium in ſe invicem, & factum dividendo per terminum primum. Nam per hanc prop. ſi AB : FI :: IL : BC, erit* $AB \times BC = FI \times IL$, *& dividendo æqualia facta per AB, erit* $BC = \frac{FI \times IL}{AB}$. *Sic ſi proponatur numeris 5, 3, 10. quartum proportionalem invenire, jubet regula proportionum directa, numeros 3 ac 10. in ſe invicem ducere, ac productum 30 dividere per 5, ut inde oriatur numerus quæſitus 6.*

Coroll. 3. *Hinc etiam, demonſtratur regula practica, quâ feneſtrarii, aliique ejuſmodi artifices quibus opus eſt areas rectangulas minores dimetiri, rectanguli aream ex unius lineæ rectæ dimenſione, abſque ullâ operatione Arithmeticâ colligere ſolent. Si quæratur v. gr. quot pedes quadratos contineat rectangulum ABCD; ab angulo B, lateri BC applicetur menſura pedis unius BE, & ab angulo A, altero lateris AB termino, per menſuræ pedalis extremum punctum E tendatur filum, quod occurrat lateri DC (producto ſi opus) in F. Quot pedes longitudine, vel partes pedis quaſvis contineat recta DF, tot pedes* Fig. 45. & 46.

quadratos, vel pedis quadratis ſimiles partes continebit rectangulum ABCD. Nam propter angulos B & D rectos, & angulos BAE, DFA alternos inter parallelas AB, DF, itemque angulos BEA, DAF alternos inter parallelas BE, AD, triangula EBA, ADF (a) *erunt ſimilia, & proinde EB : BA :: AD : DF. Quare, per hanc prop. erit rectang. BA ✕ AD = rectang. EB ✕ DF. Sed BA ✕ AD eſt rectangulum cujus menſura proponebatur inveſtiganda. Cui æquale rectangulum EB ✕ DF, pro altitudine habens rectam EB menſuræ pedali æqualem, tot pedes quadratos, vel pedis quadrati partes quaſvis continebit, quot pedes longitudine, vel pedis partes ſimiles continet* (b) *baſis DF. Quot igitur pedes contineat recta DF longitudine, tot pedes quadratos continebit rectangulum ABCD. Q. E. D.*

(a) Per. 4. l. 6.

(b) Sequitur ex 1. l. 6.

Si BE fuerit menſura bipedalis, vel tripedalis, &c. area rectanguli in pedibus quadratis habebitur, multiplicando DF per 4. vel 9. &c. reſpectivè, hoc eſt, per quadratum iſtius numeri pedum ex quo menſura conſtat.

Fig. 44. Cor. 4. *Si quatuor rectæ AB, FI, IL, BC fuerint proportionales: Erit triangulum ABC ſub primâ pro baſi & ſub quartâ pro altitudine, æquale triangulo FIL ſub ſecundâ pro baſi & ſub tertiâ pro altitudine. Sunt enim rectangulorum X, Z, per hanc pr. æqualium,* (c) *dimidia.*

(c) Per 41. l. 1.

Fig. 41, 42. Cor. 5. *Si duo triangula ACL, FOB, angulos C & O æquales habeant; & ſit rectangulum AC ✕ CL ſub lateribus anguli C, æquale rectangulo FO ✕ OB ſub lateribus anguli O; triangula ACL, FOB erunt æqualia: & e converſo, ſi triangula ACL, FOB, quæ angulos ad C & O æquales habeant fuerint æqualia, rectangula AC ✕ CL, FO ✕ OB erunt æqualia. Idem etiam æquiangulis parallelogrammis accidit. Nam propter æqualia rectang. AC ✕ CL, FO ✕ OB; erit per hanc prop. AC : FO :: OB : CL; & proinde, cùm in triangulis ACL, FOB æquiangulis ad C & O, latera circa æquales angulos ſint reciproca; triangula ACL, FOB erunt* (d) *æqualia: quod erat primum.*

(d) Per 15. l. 6.

Deinde habeant triangula æqualia ACL, FOB angulos C & O æquales; (e) *erunt igitur latera circum æquales illos angulos reciprocè proportionalia hoc eſt, AC : FO :: OB : CL; & proinde per hanc prop. erit rect. AC ✕ CL = rect. FO ✕ OB; quod erat alterum.*

(e) Per eand.

Fig. 39, 40. *Denique eadem eodem modo de parallelogrammis æquiangulis ſimiliter ſe habentibus demonſtrabuntur, ſi loco prop. 15. citetur prop. 14.*

Cor. 6. *Si A fuerit ad B in majori ratione quàm C eſt ad D; erit rectangulum ſub extremis majus rectangulo ſub mediis. Et ſi in minori; minus.*

1. Quia

1. *Quia enim A majorem habet rationem ad B quàm C ad D; erit alia quædam quantitas E (quæ minor eſt quàm A) ad B, ut C ad D; ac proinde per hanc prop.* E ⨯ D = B ⨯ C. *Sed E minor eſt quàm A: ergo A ⨯ D majus eſt quàm B ⨯ C.*

2. *Si verò A fuerit ad B in minori ratione quàm C eſt ad D; erit alia quædam F, (quæ ipsâ A major eſt) ad B, ut C ad D. Ergo F ⨯ D = B ⨯ C; ac proinde A ⨯ D minus eſt quàm B ⨯ C.*

Cor. 7. *Hinc, ſi rectangulorum inæqualium latera ita diſponantur, ut rectanguli majoris latera in partibus extremis, & minoris latera in mediis conſtituantur; habebit primus terminus ad ſecundum majorem rationem quàm tertius ad quartum. Si verò rectanguli minoris latera ſtatuantur in partibus extremis, & majoris latera in mediis; erit primus terminus minor reſpectu ſecundi, quàm tertius eſt reſpectu quarti.*

Scholium. *Cùm celebre illud Ptolemæi theorema, ſcilicet,* In omni quadrilatero circulo inſcripto, Rectangulum ex diagoniis AC in BD, æquale eſſe duobus rectangulis ex lateribus oppoſitis, AB in CD, & AD in BC, *tum ex hac, tum ex propoſitionibus paſſim ante demonſtratis dependeat, illud jam demonſtrandum proponamus. Fiat enim angulus BAE æqualis angulo CAD. Ob angulos BAE, CAD æquales per conſtructionem, & angulos ABE, ACD eidem arcui AD inſiſtentes* (a) *æquales;* (b) *Erunt triangula ABE, ACD ſimilia, & AB : BE :: AC : CD; & proinde* (c) *rectangulum extremorum AB ⨯ CD æquabitur rectangulo mediorum AC ⨯ BE. Pariter, ob angulum BAE angulo CAD æqualem per conſtructionem, addito communi CAE, erit angulus BAC angulo EAD æqualis, & ob angulos ADE, ACB, eidem arcui AB inſiſtentes,* (d) *æquales;* (e) *erunt triangula ADE, ACB ſimilia, & AD : DE :: AC : CB, & proinde* (f) *rectangulum extremorum AD ⨯ CB, æquale erit rectangulo mediorum AC ⨯ DE. Sed rectangula AC ⨯ BE & AC ⨯ DE* (g) *æquantur rectangulo AC ⨯ BD. Ergo rectangulum AC ⨯ BD ſub diagoniis æquatur rectangulis AB ⨯ CD & AD ⨯ BC ſub lateribus oppoſitis. Q. E. D.*

Fig. 47.

(a) Per 21. *l.* 3.
(b) Per cor. 9. *p.* 32. *l.* 1. & *p.* 4. *l.* 6.
(c) Per hanc prop.
(d) Per 21. *l.* 3.
(e) Per cor. 9. *pr.* 32. *l.* 1. & *p.* 4. *l.* 6.
(f) Per hanc prop.
(g) Per 1. *l.* 2.

PROPOSITIO XVII.

Fig. 48. *SI tres rectæ (AB, FL, BC) fuerint proportionales, rectangulum ſub extremis (AB; BC) æquale erit quadrato mediæ (FL.)*

Et ſi rectangulum ſub extremis æquetur quadrato mediæ, erunt tres illæ rectæ proportionales.

1. Pars. Mediæ FL accipiatur par O. Quoniam igitur per hyp. AB eſt ad FL, ut FL ad BC; eſtque O par FL; Erit quoque AB ad FL, ut O ad BC. Ergo (a) rectang. ſub extremis AB, BC æquatur rectangulo ſub mediis FL & O, hoc eſt quadrato FL.

(a) Per præc.

2. Pars Demonſtratur ſimiliter ex ſecundâ parte præcedentis.

Corollaria.

Fig. 32. 1. EX hac & ex 13. patet, ſi in circulo ſit FC perpendicularis diametro, rectangulum ACB æquale eſſe quadrato FC.

Fig. 48. [Cor. 2. *Hinc ad datam rectam AB, data recta FL quadratum FQ facile eſt applicare, inveniendo rectis AB, FL* (b) *tertiam proportionalem BC, & rectang. ABC* (c) *conſtruendo. Eſt enim dato quadrato FO* (d) *æquale rectangulum ABC ad rectam AB applicatum.*

(b) Per 11. l. 6. (c) Per ſch. p. 46 l. 1. (d) Per hanc pr.

Cor. 3. *Hic etiam liquet methodus rationem quamvis AB ad FL continuandi, ſive duabus datis AB, FL tertiam proportionalem inveniendi; ſi nempe, conſequentis FL quadratum ad antecedentem AB applicetur, habebitur tertia proportionalis BC. Si verò in numeris detur ratio quævis, invenietur tertius proportionalis, multiplicando conſequentem per ſeipſum, & productum dividendo per antecedentem: quotus enim* (e) *erit tertius proportionalis quæſitus.*

(e) Patet ex 17. l. 6. cum cor. 2. p. 16. l. 6.

Fig. 17. Cor. 4. *Hinc lineam inacceſſam, cujus terminus alter eſt acceſſibilis, metiri diſcimus. Sit linea inacceſſa CF, & producatur FC indefinite versùs A. Erigatur a puncto C linea perpendicularis CB: & ad quodvis iſtius perpendicularis punctum B applicetur Norma, aut angulus quivis rectus ABF, ita ut per latus BF reſpiciendo, punctum F, per latus BA punctum A in rectâ ACF obſerventur. Menſuretur linea AC acceſſibilis, & ex analogiâ ſequenti innoteſcet* (f) *inacceſſa CF. AC:CB :: CB:CF. Quadratum itaque lineæ CB dividatur per lineam AC, & Quotiens* (g) *dabit lineam quæſitam CF. Q. E. I.*

(f) Per cor. 1. p. 8. l. 6. (g) Per cor. 3. hujus.

Cor.

Cor. 5. *Hinc ſi datur rectangulum ſub AC, CB ſegmentis rectæ datæ AB, æquale ſcil. quadrato datæ rectæ CF, dimidio ipſius AB non majoris, in proclivi erit invenire rectanguli latera AC, CB; ſive, datam rectam AB ita dividere licebit in C, ut rectangulum ſub ipſius ſegmentis AC, CB æquetur quadrato rectæ datæ CF, quæ dimidium ipſius AB non ſuperat. Cùm enim data CF ſit per hanc prop. media proportionalis inter AC & CB ſegmenta rectæ datæ AB, idem erit hoc problema cum illo, cujus ſolutio in Schol. ad cor. 2. pr. 13. hujus libri jam ſupra traditur.*

Fig. 32.

Scholium 1. Si (a) trianguli cujuſcunque ABC angulus verticalis BAC biſecetur rectâ DA, quæ baſem BC dividat in duo ſegmenta BD, DC; Erit differentia rectangulorum a lateribus AB, AC, & a ſegmentis baſis BD, DC, æqualis quadrato rectæ AD biſecantis angulum BAC. [*Hoc eſt*, rect. BAC — rect. BDC = ADq.] *Triangulo enim ABC circumſcribatur circulus, & producatur AD donec iterum occurrat circulo in E, & connexa EC, in triangulo AEC per punctum D ducatur baſi EC parallela DF; eruntque triangula ADF, AEC* (b) *ſimilia: ſed & propter angulos BAD, EAC* (c) *æquales, & angulos ABD, AEC in eodem ſegmento ABEC, & proinde* (d) *æquales, triangula ABD, AEC ſimilia* (e) *erunt: triangula igitur ABD, ADF ſimilia ſunt; & AB : AD :: AD : AF; unde per hanc prop. rectangulum BAF æquatur ADq. Sed AD : AF ::* (f) *DE : FC. Ergo AB : AD :: DE : FC; & rect. BA × FC* (g) = *rect. ADE* = (h) *rect. BDC. Et utrumque rectang. BAF, & BA × FC, hoc eſt,* (i) *BAC æquabitur ADq × rect. BDC, & utrinque auferendo rectang. BDC, erit BAC rect — BDC rect. = ADq.* Q. E. D.

Fig. 49. (a) Vide Arithmet. Univerſ. pag. 103 edit. primæ. (b) Per cor. 1. p. 4. l. 6. (c) Ex hyp. (d) Per 21. l. 3. (e) Per cor. 9. pr. 32. l. 1. & pr. 4. l. 6. (f) Per 2. l. 6. (g) Per 16. l. 6. (h) Per 35. l. 3. (i) Per 1. l. 2.

Cor. ad Schol. 1. *Si trianguli ABC circulo inſcripti angulus verticalis A biſecetur rectâ AE eidem circulo inſcriptâ, quæ ſecet baſim in D; erit BA : AD :: EA : AC. Triangula enim BAD, EAC ſimilia ſunt, uti e ſcholio præcedente conſtat.*

Fig. 49.

Scholium 2. *Sequentis etiam problematis, quod uſui erit in Sphæricis, ex ante demonſtratis, jam tradi poteſt inveniendi ratio.* Per duo puncta B, C in circulo dato FDM, circumferentiam circuli ducere, quæ dati circuli circumferentiam dividat bifariam. *Per centrum A & unum e punctis datis B, ducatur recta BAME infinita; ad quam e centro erigatur perpendicularis AD, & ducatur BD; & in triangulo ABD, propter angulum BAD rectum, erit* (k) *ABD acutus. Ad BD fiat normalis DE, quæ propter angulos ABD, BDE duobus rectis minores,* (l) *interſecabit lineam infinitam BAME, ut in puncto E. Denique circulus BRE ducatur per* (m) *tria puncta B, C, E. Dico factum. Ducatur enim circuli jam deſcripti BRE chordæ*

Fig. 50. (k) Per cor. 5. p. 32. l. 1. (l) Per ſch. p. 31. l. 1. (m) Per p. 5. l. 4.

chorda, per circuli dati centrum A, & alterutrum peripheriarum interſectionem G, *nimirum GAΦ. Ducatur etiam circuli dati FDM, diameter GAF, per eandem peripheriarum interſectionem* G.

Quoniam ab angulo recto trianguli BDE, demittitur DA
(a) Per cor. 1. p. 8. l. 6. *perpendicularis baſi BE,* (a) *erunt AB, AD, AE* ∺, *& pro-*
inde per hanc prop. rectang. BAE = *ADq; id eſt, ob circuli*
(b) Per p. 35. l. 3. *dati FDM æquales radios AD, AG, AF, erit rect. BAE* =
(c) Per 1 l. 6. *rect. GAF. Cùm verò in circulo BRE, recta BE, GΦ ſe mu-*
tuò ſecent in A, (b) *erit rect. BAE* = *rect. GAΦ. Unde GAF*
(d) Per def. 20. l. 1. *rect.* = *GAΦ rect. Ergo* (c) *AF* = *AΦ: & puncta F, Φ coin-*
cident: atque arcus FDG = (d) *arcui FMG. Q. E. I.*

Fig. 51. Schol. 3. *In circulo quovis cujus diameter eſt AB, & ar-*
cuum AC, AD ſinus recti ſunt CE, DF; ſinus verſi AE, AF;
(e) Per cor. 2. p. 8. l. 6. *ſubtenſæ AC, AD: Erit AE : AF :: ACq : ADq; hoc eſt, ſinus*
verſi erunt ut quadrata ſubtenſarum. Ductis enim BC, BD,
(f) Per idem. (e) *erunt BA, AC, AE* ∺; (f) *itemque BA, AD, AF* ∺.
(g) Per hanc prop. (g) *Ergo BA × AE* = *ACq, & BA × AF* = *ADq. Sed*
AE : AF :: (h) *BA × AE : BA × AF. Ergo AE : AF ::*
(h) Per 1. l. 6. *ACq : ADq.*]

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 52. *Super datâ rectâ (RS) dato polygono (BQ) ſimile ſimiliterque poſitum deſcribere.*

Polygonum datum BQ reſolve in triangula. Super datâ rectâ
(i) Per 23. l. 1. RS fac (*i*) angulos R, O æquales angulis B, A. Coibunt (*k*)
latera in X. Super XS fac angulos V, I æquales angulis T, C.
(k) Per cor. 17. p. 32. l. 1. & ſch. p. 31. l. 1. Coibunt latera in Z. Dico factum.
Nam quia anguli R, O æquantur angulis B, A, etiam E,
K, (*l*) æquales erunt: & quia etiam (*m*) V æquatur T, to-
(l) Per cor. 9. p. 32. l. 1. tus EV toti KT æqualis erit. Similiter quia ſinguli O,
I æquantur ſingulis A & C, toti OI, AC æquales erunt. Et
(m) Per conſtr. quia V & I æquantur T & C, etiam Z & Q æquales (*n*)
(n) Per cor. 9. p. 32. l. 1. ſunt. Polygona igitur RZ, BQ ſibi mutuò æquiangula ſunt.
Reliquum eſt ut oſtendatur etiam latera eſſe proportionalia.
(o) Per 4. l. 6. RS eſt ad SX, (*o*) ut BF ad FL: & rurſum SX eſt ad SZ,
(p) Per eand. (*p*) ut FL ad FQ. Ergo ex æquo (*q*) RS eſt ad SZ, ut BF
ad FQ, &c.
(q) Per 22. l. 5. Corollarium. *Hinc Mappas ſive Chartas Geographicas, Cho-*
rographicas, vel Geodæticas; aut agrorum, ædificiorum, regionumque delineationes Ichnographicas conſtruendi methodus derivatur. Nihil enim aliud ſibi volunt hujuſmodi delineatores, quàm figurarum ingentium ad ſimiles figuras exiguas reductionem, quam præſens propoſitio exhibet.

PRO-

PROPOSITIO XIX.

T*Riangulorum (X, Z) ſimilium proportio eſt duplicata proportionis laterum (AC, FI) æqualibus angulis ſubtenſorum.* Fig. 53. 54.

Hoc eſt ſi (*a*) fiat ut AC ad FI, ſic FI ad tertiam AQ; triang. X eſt ad triang. Z. ut AC prima ad tertiam proportionalem AQ. Vide defin 10. l. 5. (a) Per 11. l. 6.

Quoniam triangula X, Z ſunt ſimilia, erit BA ad LI, (*b*) ut AC ad IF. Sed per conſtr. ut AC ad IF, ſic IF ad AQ. Ergo etiam BA eſt ad LI, (*c*) ut IF ad AQ. Ergo [*junctâ BQ*,] in triangulis QBA & Z, latera circa angulos A, I, qui per defin. triangulorum ſimilium æquales exiſtunt, ſunt reciproca. Æquantur igitur (*d*) QAB & Z. Atqui triangulum X ad QBA eſt ut (*e*) baſis AC ad baſim AQ. Ergo etiam X eſt ad Z, ut AC ad AQ. Quod erat demonſtrandum. (b) Per 4. l. 6. (c) Per 11. l. 5. (d) Per 15. l. 6. (e) Per 1. l. 6.

PROPOSITIO XX.

S*Imilia polygona (ABCDE, FGHIK) dividuntur (1.) in ſimilia triangula (P, S; & Q, T, & R, V,) numero æqualia; (2.) & totis proportionalia: (3) & polygonorum proportio duplicata eſt proportionis laterum (AB, FG) inter æquales angulos (B, G & BAE, GFK) exiſtentium.* Fig. 55.

1. Pars. Quoniam polygona ſunt ſimilia, erunt (*f*) ſibi mutuò æquiangula, eruntque bini binis æquales anguli BAE, GFK, & B, G, & BCD, GHI, & CDE, HIK, & E, K. Quia igitur AB eſt ad BC, (*g*) ut FG ad GH, angulique B & G æquales ſunt, ſimilia (*h*) ſunt triangula P, S. Similiter demonſtrabitur ſimilia eſſe R & V. Deinde quia anguli toti BCD, GHI, & ablati BCA, GHF æquales ſunt, etiam reliqui ACD, FHI æquales erunt. Eodem modo oſtendam æquari angulos ADC, FIH. Ergo (*i*) tertius CAD tertio HFI æqualis eſt. Quare (*k*) etiam Q & T triangula ſimilia ſunt. Liquet ergo 1. pars. (f) Per def. 1. l. 6. (g) Per eand. (h) Per 6. l. 6. (i) Per cor. 9. p. 32. l. 1. (k) Per 4. l. 6.

2. Pars. Quoniam ſimilia ſunt P & S, ratio P ad S duplicata eſt (*l*) rationis CA ad HF. Sed ob eandem cauſum (l) Per præc.

 etiam

etiam ratio Q ad T duplicata eſt rationis C A ad HF. Ergo
(a) Per 34. l. 5. P eſt ad S ut (*a*) Q ad T. Eodem modo oſtendam ut Q eſt ad T, ita R eſſe ad V. Ergo ut (*b*) unum antecedens P eſt
(b) Per 12. l. 5. ad unum conſequens S, ita omnia antecedentia P, Q, R, ſimul ſumpta, ad omnia conſequentia S, T, V ſimul ſumpta, hoc eſt, ita polygonum ad polygonum. Quod erat alterum.

(c) Per præc. 3. Pars. Ratio P ad S eſt (*c*) duplicata rationis AB ad FG. Sed ratio polygoni ad polygonum eſt eadem cum ratione P ad S, ut jam oſtendi Ergo etiam ratio polygoni ad polygonum eſt duplicata rationis A B ad G F. Quod erat tertium.

Corollaria.

1. OMnes figuræ ordinatæ ſeu regulares, ut æquilatera triangula, quadrata, pentagona, &c. ſunt inter ſe in ratione duplicatâ laterum. Omnes enim ordinatæ ſunt ſimiles inter ſe, ut patet ex def. 1. l. 6.

[2. *Si tres rectæ fuerint proportionales; erit prima ad tertiam, ut figura quævis plana (ſive ſit triangulum, ſive quadrilaterum, ſeu polygonum quodcunque) ſuper primâ, ad figuram ſimilem, ſimiliterque deſcriptam ſuper ſecundâ, vel erit rectarum proportionalium prima ad tertiam, ut figura quævis plana ſuper ſecundâ, ad figuram ſimilem, ſimiliterque deſcriptam ſuper tertiâ. Nam per def.* 10. *l.* 5. *trium proportionalium prima eſt ad tertiam in duplicatâ ratione primæ ad ſecundam, vel ſecundæ ad tertiam. Unde per prop.* 19. *vel hanc* 20. *liquet propoſitum.*]

Fig. 55. 3. Si figurarum quarumvis ſimilium latera AB, FG inter æquales angulos poſita, ſint nota, etiam proportio figurarum innoteſcet. Sit, ex. gr. AB 2. ped. & FG 6. pedum. Fiat ut 2. ad 6. ita 6. ad alium numerum, nempe 18. Figura
(d) Per cor. 2. hujus minor eſt ad (*d*) majorem, ut 2. ad 18. ſeu ut 1. ad 9. Invenitur autem tertius proportionalis numerus, ſi (*e*) ſecundus
(e) Per cor. 3. p. 17. l. 6. datorum multiplicetur per ſeipſum, & productus per primum dividatur.

4. Ex eâdem propoſitione elicitur methodus præclara, figuram quamvis rectilineam augendi vel minuendi in ratione
Fig. 56. datâ. Ut ſi velis pentagoni, cujus latus eſt AB, aliud facere quintuplum [*quod ſit dato ſimile.*] Inter terminos rationis da-
(f) Per 13. l. 6. tæ AB, B C, inveni (*f*) mediam proportionalem B X. Su-
(g) Per 18. l. 6. per hac conſtrue (*g*) pentagonum ſimile dato. Hoc erit quintuplum dati.

Nam per cor. 2. hujus, pentagonum ſuper A B eſt ad ſibi ſimile ſuper BX, ut AB prima ad BC tertiam.

Porro,

Porro, cùm etiam circulorum proportio ſit duplicata proportionis diametrorum, ut oſtendetur p. 2. l. 12. Hæc praxis ad circulos quoque pertinebit.

[Cor. 5. *Si figurarum quarumvis ſimilium proportio ſit nota, innoteſcet etiam proportio laterum inter æquales angulos exiſtentium, utpote quæ ſubduplicata ſit proportionis figurarum. Sit, ex. gr. figura PQR ad figuram STV, ut 4 ad 9. Inter 4 & 9 inveniatur medius proportionalis 6, (nempe* (a) *extractione radicis quadraticæ numeri* 36 = 4 × 9.) *& cùm ſint* 4, 6, 9 ∺ *ſintque figuræ PQR, STV ad ſe invicem ut 4 ad 9, erunt illarum latera homologa ut* (b) *4 ad 6, ſive ut 2 ad 3.* Fig. 55. (a) Patet ex 17. l. 6. (b) Per cor. 2. hujus

Cor. 6. *Hinc corrigendus eſt eorum error, qui figurarum ſimilium eandem atque laterum rationem eſſe opinantur. Si enim duorum, non tantùm triangulorum ſimilium, ſed & quadratorum, pentagonorum, hexagonorum, &c. (aut etiam circulorum) latera (ſive diametri) ſint inter ſe ut 2 ad 1; Ipſæ figuræ ſive areæ erunt 4 ad 1: ſi latera ſint inter ſe ut 3 ad 1, erunt figuræ ipſæ ſive areæ ut 9 ad 1; in duplicatâ ſcilicet laterum (vel diametrorum) ratione. Sunt enim* 4, 2, 1 ∺; *Item* 9, 3, 1 ∺.

Schol. *Cùm quadratorum E, K proportio duplicata ſit proportionis laterum, OR, SV; inde ratio duplicata laterum OR, SV; per rationem ORq ad SVq ſæpiſſime deſignari ſolet: v. gr. ſi ſuper lateribus OR, SV ſiant aliæ quævis figuræ ſimiles & ſimiliter poſitæ; cùm ſint eæ in ratione duplicatâ laterum OR, SV, erunt ad ſe invicem ut quadratum E ad quadratum K, ſive ut ORq ad SVq.*] Fig. 57.

PROPOSITIO XXI.

F*Iguræ rectilineæ (A, B) quæ eidem (C) ſimiles ſunt, etiam ſibi mutuò ſimiles ſunt.* Fig. 57.

Patet ex defin. 1. l. 6. axiom. 1. l. 1. & propoſ. 11. l. 5.

[*Quia enim tam figura A quàm B, figuræ C ſimilis eſt; erit illarum utraque ipſi C æquiangula, & circa æquales angulos latera ipſius C lateribus habebit proportionalia. Ergo A ipſi B æquiangula erit, & latera circa ipſarum A & B æquales angulos erunt proportionalia; & proinde figuræ A & B ſimiles erunt.*]

PRO-

PROPOSITIO XXII.

Fig. 57. *SI quatuor aut plures rectæ (FI, LQ, & OR, SV) proportionales fuerint; figuræ rectilineæ ſimiles, ſimiliterque ab iis deſcriptæ (A, B, & E, K) proportionales erunt.*

Et e converſo, [Si proportionales fuerint figuræ rectilineæ (A, B, & E, K,) ſimiles, & ſimiliter deſcriptæ ſuper rectis (FI, LQ, & OR, SV;) erunt etiam ipſæ lineæ rectæ proportionales.]

Demonſtratio primæ partis patet ex 34. 5. Quoniam enim rationes A ad B, & E ad K ſunt (a) duplicatæ rationum FI ad LQ, & OR ad SV, ex hypotheſi æqualium; etiam ipſæ æquales erunt.

(a) Per 19. & 20. l. 6.

Pars 2. patet ex 35. l. 5. [*Quia enim rationes æquales A ad B, & E ad K, (b) duplicatæ ſunt rationum FI ad LQ, & OR ad SV; etiam hæ æquales erunt.*

(b) Per eaſd.

Cor. 1. *Hinc deducitur ratio multiplicandi & dividendi radices quadraticas. Si enim multiplicentur inter ſe quantitates ſignis radicalibus affixæ, & producto præfigatur ejuſdem radicis ſignum; habebitur radicum datarum productum. Ex. gr. ſit* $\surd 5$ *multiplicanda in* $\surd 3$*: dico provenire* $\surd 15$*. Nam ex multiplicationis definitione debet eſſe unitas ad multiplicantem (ſive* $\surd 3$*) ut multiplicandus (ſeu* $\surd 5$*) eſt ad productum. Ergo per hanc prop. erit quadratum unitatis ad quadratum multiplicantis, ut quadratum multiplicandi ad quadratum producti; hoc eſt, ſi pro numero producto ponatur P, erit* 1. 3 :: 5 *Pq. Sed* 1. 3 :: 5. 15. *Ergo* Pq = 15, *&* P = $\surd$ 15.

Rurſum, ſi proponatur $\surd$ 15 *dividenda per* $\surd$ 5; *quotiens erit* $\surd$ 3. *Nimirum dividendo* 15. *per* 5. *& quoto* 3, *ſignum radicale præfigendo. Cum enim, ex definitione diviſionis, ſit numerus dividens ad dividendum, ut unitas ad quotum; ergo per hanc prop. erit quadratum dividentis ad quadratum dividendi, ut quadratum unitatis ad quadratum quoti; hoc eſt, ſi pro quoto ponatur Q. erit* 5. 15 :: 1. *Qq. Sed* 5. 15 :: 1. 3. *Ergo* Qq = 3, *&* Q = $\surd$ 3.

Fig. 32. Cor. 2. *Si recta linea AB ſecta ſit utcunque in C; rectangulum ſub partibus AC, CB contentum, eſt medium proportionale inter earum quadrata. Item rectangulum contentum ſub tota AB & una parte AC vel CB, eſt medium proportionale inter quadratum totius AB, & quadratum dictæ partis AC vel CB. Nam ſuper diametro AB deſcripto ſemicirculo*

AFB,

AFB, & erectâ ad diametrum perpendiculari CF; ſi compleatur triangulum rectangulum AFB, liquet eſſe (a) *AC: CF :: CF: CB, Ergo per hanc prop. erit ACq: CFq :: CFq: CBq; hoc eſt,* (b) *ACq: ACB rectang :: ACB rectang: CBq.* (a) Per cor. 1. p. 8. l. 6. (b) Per cor. 1. p. 17. l. 6.

Porro (c) *BA: AF :: AF: AC. Ergo BAq: AFq :: AFq: ACq. Hoc eſt,* (d) *BAq: BAC rectang :: BAC rectang: ACq. Eodem modo ABq: ABG :: ABC: BCq.*] (c) Per cor. 2. p. 8. l. 6. (d) Per 17. l. 6.

PROPOSITIO XXIII.

Æ Quiangula parallelogramma (X, Z) inter ſe rationem habent compoſitam ex rationibus laterum (AC ad CB, & LC ad CF. Fig. 58. (quam quære ante fig. 47.)

Hoc eſt, ſi fiat CB ad O, ut LC ad CF; X eſt ad Z, (e) ut AC ad O. Vide quæ demonſtravimus l. 5. parte 3. num. 13. [*Vel reſpice ſis ad inſtantias, quibus definitionem quintam hujus libri (quam ex Euclide reſtituimus) jam ſupra illuſtravimus.* (e) Per def. 5. l. 6.

Ponantur AC, CB ita in directum, ut anguli æquales ACL, BCF ſint ad partes contrarias recta AB; (f) *eruntque LC, CF in directum.*] (f) Per 13. & 14. l. 1.

Concurrant IL, SB, in Q. Parallelogrammum X eſt (*g*) ad parallelogrammum R, ut AC ad CB: & R eſt ad Z, (*h*) ut LC ad CF, (hoc eſt, ut CB ad O.) Ergo (*i*) ex æquo X eſt ad Z, ut AC ad O. Quod erat demonſtrandum. (g) Per 1. l. 6. (h) Per eand. (i) Per 22. l. 5.

Corollaria.

Hinc & ex 34. l. 1. patet primò, Triangula quæ unum angulum (ad C) æqualem habent, rationem habere compoſitam ex rationibus rectarum AC ad CB, & LC ad CF æqualem angulum continentium. Fig. 58.

Patet 2. Rectangula, ac proinde (*k*) & parallelogramma quæcunque, rationem inter ſe habere compoſitam ex rationibus baſis ad baſim, & altitudinis ad altitudinem. Neque aliter de triangulis [*rectangulis, & inde* (l) *de triangulis quibuſcunque*] ratiocinaberis. (k) Per 35, 36. l. 1. & def. 3. l. 6. (l) Per def. 3. l. 6. & pr. 37, 38. l. 1.

Patet 3. Quo modo triangulorum ac parallelogrammorum proportio exhiberi poſſit. Sunto parallelogramma, X & Z, & eorum baſes AC, CB, altitudines CL, CF. Fiat (*m*) ut CL altitudo ad altitudinem CF, ita baſium altera CB ad O. Parallelogrammum X eſt ad parallelogram. Z, ut AC eſt ad O. Fig. 58. (m) Per 12. l. 6.

PRO-

PROPOSITIO XXIV.

Fig. 59.

IN omni parallelogrammo (SF,) quæ circa (AB) diametrum ſunt parallelogramma (CL, OI,) & toti & inter ſe ſimilia ſunt, [& ſimiliter poſita; hoc eſt, latera homologa vel in eâdem rectâ jacent, vel ſunt ſibi invicem parallela.]

Per 27. 1. æquales ſunt anguli BCE, BSA, & BLE, BFA. Per eandem CEL eſt par CIF, hoc eſt per eandem ipſi SAF; B verò & toti SF, & parti CL communis eſt. Igitur totum SF & pars CL æquiangula ſunt. Reliquum eſt, ut etiam latera æqualibus angulis oppoſita habeant proportionalia.

Quoniam in triangulis BCE, BSA, eſt CE parallela ad SA, erit (a) BC ad CE, ut BS ad SA; & CE eſt ad EB, ut (b) SA ad AB. Quia verò in triangulis quoque ELB, AFB, EL eſt parallela ad AF, erit EB ad EL, ut (c) AB ad AF. Ergo ex æquo (d) CE eſt ad EL, ut SA ad AF. Igitur (e) CL & totum SF ſimilia ſunt. Eodem modo oſtendam OI eſſe ſimile toti SF. Ergo (f) CL & OI ſunt etiam ſimilia inter ſe. [*Quoniam verò latera homologa vel in eâdem rectâ jacent, ut BC & BS; BL & BF; vel ſunt ſibi invicem parallela, ut CE & SA; EL & AF; liquet parallelogramma CL & SF eſſe ſimiliter poſita: & eodem modo conſtabit parallelogramma OI & SF, (ac proinde CL & OI) eſſe ſimiliter poſita*] Quæ erant demonſtranda.

(a) Per cor. 1. p. 4. l. 6
(b) Per idem cor.
(c) Per idem cor.
(d) Per 22. l. 5.
(e) Per def. 1. l. 6.
(f) Per 21. l. 6.

[Scholium. *Huic propoſitioni problemata duo, quæ in conicis uſui ſunt futura, liceat adjungere. Prius ad ellipſim ſpectat, poſterius ad hyperbolam.*

Fig. 60.

1. *Datis tribus rectis A, B, C, quarum tertia C minor ſit quàm prima A, & conſtituto rectangulo DEFK ſub primâ A vel DE, & ſecundâ B vel EF; ad ſecundam aliud rectangulum applicare, latitudinem habens tertiæ C æqualem, & deficiens rectangulo ſimili & ſimiliter poſito, ei quod ſub primâ & ſecundâ conſtituitur.*

Ductâ rectanguli EK diametro DF, e latere DE primæ A æquali, abſcindatur EG tertiæ C æqualis; & per G ducatur GH lateri EF parallela, diametro occurrens in H; & per H ducatur HI lateri DE parallela, ipſi EF occurrens in I. Dico factum: rectangulum enim GEIH eſt id quod petebatur. Productis enim GH, IH, perficiantur rectangula IL, GM. Et

cùm

cùm rectangula EK, IL circa eandem diametrum ſint, (a) erunt ſimilia & ſimiliter poſita. Conſtructo itaque rectangulo EK ſub datarum primâ A & ſecundâ B, ſive ſub DE & EF, ad ſecundam EF aliud rectangulum, nempe GI, applicatur, latitudinem habens GE tertiæ C æqualem, & deficiens rectangulo IL ſimili & ſimiliter poſito ipſi EK quod ſub primâ & ſecundâ conſtituitur. Q. E. F. (a) Per hanc prop.

2. *Datis tribus rectis A, B, C, & conſtituto rectangulo DEFK ſub primâ A vel DE, & ſecundâ B vel EF; ad ſecundam aliud rectangulum applicare, latitudinem habens tertiæ C æqualem, & excedens rectangulo ſimili & ſimiliter poſito ei quod ſub primâ & ſecundâ conſtituitur.* Fig. 61.

Ductâ rectanguli EK diametro DF, producatur DE ad G, ut ſit adjecta EG tertiæ datæ C æqualis, & per G ducatur GH lateri EF parallela, & occurrens diametro DF productæ in H; compleaturque rectangulum EGHI. Dico factum. Productis enim HI, DK, KF, perficiuntur rectangula GM, LI. Et cùm rectangula EK, LI circa eandem diametrum ſint, erunt (b) ſimilia & ſimiliter poſita. Conſtructo itaque rectangulo EK ſub datarum primâ & ſecundâ, DE, EF, ad ſecundam EF aliud rectangulum GI applicatur, latitudinem habens EG tertiæ C æqualem, & excedens rectangulo LI ſimili & ſimiliter poſito ipſi EK quod ſub primâ & ſecundâ conſtituitur. Q. E. F.] (b) Per eand.

PROPOSITIO XXV.

Polygonum datum A in aliud dato B ſimile tranſmutare. Fig. 62.

Sive polygonum conſtituere æquale dato A, & ſimile alteri dato B.

Super CF latere polygoni B, cui ſimile petitur, fac rectangulum Q (*c*) æquale B. Deinde ſuper FS fac (*d*) rectangulum R æquale A. Manifeſtum (*e*) eſt CF & FI eſſe in directum. Inter CF, FI inveni (*f*) mediam proportionalem FL. Super hac fac (*g*) polygonum ſimile dato B: erit hoc etiam æquale dato A. (c) Per 45. l. 1. (d) Per eand. (e) Per 14. l. 1. (f) Per 13. l. 6.

Nam cùm per conſtr. ſint tres proportionales CF, FL, FI, polygonum B eſt ad ſimile ſibi polygonum ſuper FL factum, (*h*) ut CF ad FI; hoc eſt (*i*) ut Q ad R. Igitur permutando, ut polygonum B eſt ad Q, ita polygonum ſuper FL ad R. Sed per conſtr. polygonum B æquatur Q. Ergo etiam polygonum ſuper FL, ſimile ipſi B, æquatur R, hoc eſt, per conſtruct. dato A. Factum eſt igitur quod petebatur. (g) Per 18. l. 6. (h) Per cor. 2. p. 20. l. 6. (i) Per 1. l. 6.

PRO-

PROPOSITIO XXVI.

Fig. 63. *Parallelogramma ſimilia & ſimiliter poſita (BD, FN,) habentia angulum communem (A,) circa eandem diametrum exiſtunt.*

Duc rectas AE, CE. Si negas AEC, eſſe diametrum communem parallelogrammorum BD & FN; ipſius BD diameter eſto recta alia AGC ſecans FE in G, & duc rectæ AF parallelam GH. Parallelogramma igitur FH, BD exiſtent circa communem diametrum AGC, ac proinde (a) erunt ſimilia [*& ſimiliter poſita.*] Ergo ut BA ad AD, (b) ſic FA ad AH. Sed etiam ut BA ad AD, ſic AF ad AN, cùm BD, FN ſimilia ſint per hyp. Ergo FA eſt ad AH, ut FA ad AN. Quod eſt abſurdum.

(a) Per 24. l. 6.
(b) Per def. 1. l. 6.

Fig. 59. [Cor. 1. *Hinc motuum compoſitionem æſtimare diſcimus. Impellatur eodem temporis momento, corpus ad A poſitum, vi AF ſecundùm directionem rectæ AF, & vi AS ſecundùm directionem rectæ AS, (ita nempe, ut corpus ſolâ vi AF rectam AF, & ſolâ vi AS rectam AS in dato tempore deſcriberet;) & compleatur parallelogrammum ASBF: ex conjunctione virium, corpus A diagonalem AB eodem dato tempore deſcribet. Idem enim erit motus corporis A, ac ſi, dum illud feratur in motu uniformi ab A ad S in rectâ AS, ipſa recta AS motu itidem uniformi, & ſitu ſibi ipſi ſemper parallelo, puncto ſuo A rectam AF eodem tempore deſcriberet; nam eo pacto conſervabuntur utraque motuum directiones verſus plagas SB atque FB reſpectivè. Unde fiet, ut dum corpus A aliquâ quavis temporis dati parte, (v. gr. tertiâ) perveniens ad O, eandem (tertiam) partem rectæ AS deſcribat; ipſa AS in ſitum IC transferetur, & ipſius punctum A eandem itidem (tertiam) partem rectæ AF eâdem (tertiâ) dati temporis parte deſcribet; ita ut ſit SA ad AF,* (c) *ut OA ad AD ac proinde ducta OL ipſi AF parallela, quæ ſecet rectam IC in E, parallelogramma SF, OI erunt* (d) *ſimilia, & ſimiliter poſita, & corpus A ex utroque motu, in fine ejuſdem (tertiæ) dati temporis partis, invenietur in puncto E. Et cùm parallelogramma iſta habeant etiam angulum communem A, per hanc prop. circa eandem diametrum AB exiſtunt, & corpus ad E erit in ipſâ diametro ſeu diagonali AB. Et eodem modo, corpus in quovis alio dati temporis momento reperietur alicubi in rectâ AB, & in fine temporis dati, in puncto B. Ergo deſcribet ipſam diagonalem AB viribus conjunctis, eodem tempore quo vi AS rectam AS, vel vi AF rectam AF ſeparatim deſcriberet.*

(c) Per 15. l. 5.
(d) Per def. 1. l. 6.

Cor. 2.

Cor. 2. *Deſcribat igitur corpus quodvis in dato quovis tempore rectam DA vi inſitâ ut DA: Idem corpus æquali tempore rectam AO rectæ DA æqualem, & ſecundùm eandem directionem deſcriberet, ſi nullâ vi aliâ impediretur. Si itaque corpus ad A, a motu ſecundùm AO deflectens, in eodem tempore rectam AE deſcribat; tum ductâ OE, compleatur parallelogrammum OI, & manifeſtum* (a) *eſt, corpus ſecundùm rectam AE ferri, vi compoſitâ ex vi priori inſitâ DA, vel AO, & ex novâ vi AI ad punctum A corpori impreſſâ ſecundùm directionem rectæ AI.* (a) Per cor. 1. hujus.

Cor. 3. *Hinc e converſo, ſi corpus vi AB deſcribat rectam AB, idem erit motus, ac ſi rectam eandem AB eodem tempore deſcriberet vi compoſitâ ex viribus, quæ lateribus AF, AS parallelogrammi cujuſcunque SF, cujus diameter ſit recta AB, proportionales fuerint, & quæ etiam ſecundùm latera iſta AF, AS dirigantur.*

Cor. 4. *Hinc inſuper cum Illuſtriſſ.* Newtono *colligimus areas quas corpora quæcunque in gyros acta circa immobile centrum virium deſcribunt, & in planis immobilibus conſiſtere, & eſſe temporibus proportionales. Dividatur tempus in partes æquales, & primâ temporis parte deſcribat corpus vi inſitâ rectam lineam AB. Idem corpus ſecundâ temporis parte, ſi nihil impediret, rectà ad x pergeret; deſcribens lineam Bx æqualem ipſi AB, ita ut radiis ad centrum ductis confecta forent* (b) *æquales areæ ASB, BSx. Verùm ubi corpus venit ad B; agat vis centripeta impulſu unico ſed magno, faciatque corpus a rectâ Bx deflectere, & in rectâ BC pergere: hoc eſt, ſi vis centripeta in eo loco ſit ad vim inſitam, ut By ad Bx, & perficiatur parallelogrammum ByCx; Corpus lineam* (c) *diagonalem BC deſcribet, & completâ ſecundâ temporis parte reperietur in C, in eodem plano cum triangulo primo SAB. Junge SC. Area radio ad centrum ducto deſcripta, hoc eſt triangulum SBC* (d) *æquale erit triangulo SBx; atque adeo* (e) *triangulo primo SAB. Simili argumento tertiâ temporis parte corpus a C ad d vi inſitâ pertingeret, ita ut linea Cd æqualis eſſet lineæ CB: ſed ſi vis centripeta, ſive major priore ſive minor, iterum agat ad punctum C, in fine tertii temporis reperietur corpus alicubi in lineâ Dd, lineæ SC parallelâ: ideoque ut priùs, diagonalem CD deſcribet: & radio DS ad centrum ducto, erit triangulum SDC in eodem plano cum quadrilatero SABC; & triangulo* (f) *SdC, atque adeo reliquis SCB, SAB inter ſe æqualibus, erit æquale. Pari modo ſi vis centripeta ſucceſſivè agat in D, E, F, faciens ut corpus ſingulis temporis partibus diagonales DE, EF, &c. deſcribat; Erunt hæ in eodem plano, & triangula triangulis pri-*

Fig. 64.

(b) Per 38. l. 1.

(c) Per cor. 1. huj. prop.

(d) Per 37. l. 1.

(e) Per axio. 1. l. 1.

(f) Per 37. l. 1.

oribus æqualia deſcribentur. Æqualibus itaque temporibus æquales areæ in plano immoto deſcribuntur : atque adeo arearum ſumma quævis S A D S , S A F S ſunt inter ſe ut deſcriptionum tempora. Augeatur jam numerus , & minuatur latitudo triangulorum in infinitum ; & eorum ultima perimeter ABCDEF, &c. erit linea curva , & area hoc in caſu in plano immobili deſcripta , erunt etiamnum temporibus proportionales. Q. E. D.

Fig. 64. Cor. 5. *Hinc etiam , cum CL. Newtono , colligimus corpora omnia quæ in curva aliqua moventur , & areas circa centrum aliquod S temporibus proportionales deſcribunt , à vi centripetâ ad centrum illud tendente perpetuò urgeri. Cùm enim corpus vi inſitâ æquales rectas A B , Bx æqualibus temporibus deſcriberet , ductis SA , SB , Sx* (a) *æquabuntur triangula BSA , SBx.*
(a) Per 38. l. 1. *Cùm verò corpus ex hypotheſi æquales areas SAB , SCB æqualibus temporibus deſcribat , æquabuntur etiam triangula S B A , SBC. Quare & triangula SBx , SBC æqualia erunt. Et quoniam ſuper eâdem baſi S B conſiſtunt , puncta C & x* (b) *erunt*
(b) Per 39. l. 1. *in lineâ Cx baſi parallelâ : atque adeo ductâ Cy rectæ x B parallelâ , erunt Bx , By parallelogrammi xy latera , & BC diagonalis. Corpus itaque a rectâ ABx deflectens ad punctum B ; & diagonalem B C deſcribens eodem tempore quo latus Bx abſque novâ vi ad B impreſſâ deſcriberet ,* (c) *urgetur etiam in*
(c) Per cor. 2. huj. prop. *puncto B , vi By tendente ad S centrum virium. Atque ita in punctis omnibus C , D , E , F , &c.* Q. E. D.

Cor. 6. *Cùm itaque in Planetarum primariorum Syſtemate , Areæ radiis ad Solem ductis ſint ſemper temporibus proportionales , uti Aſtronomis eſt notiſſimum ; Urgentur Planetæ vi perpetuâ ad Solem tendente. Neque aliter de ſecundariis circa primarios ſuos eſt ratiocinandum.*

Fig. 59. Cor. 7. *Sit parallelogrammi BCEL diameter BE, & productis CE, LE, fiat parallelogrammum AOEI parallelogrammo BLEC ſimile , ſimiliterque poſitum , diametrum habens AB : dico quòd parallelogrammorum CL, OI diametri BE , AE in directum jacent. Nam productis BC , AO , & BL , AI perficiatur parallelo-*
(d) Per hyp. *grammum SF, & propter CE: EI ::* (d) *LE: EO , erit CI: IE ::* (e)
(e) Per 18. l. 5. *LO: OE ; &* (f) *alternatim , CI: LO :: IE: OE , hoc* (g) *eſt , SA:*
(f) Per 16. l. 5. *AF :: OA: AI. Parallelogramma igitur SF , OI* (h) *ſimilia , ſimi-*
(g) Per 34. l. 1. *liter poſita , & communem angulum ad A habentia , per hanc prop. circa eandem diametrum exiſtunt. Atque eodem modo demonſtrabitur parallelogramma SF , CL circa eandem diametrum exiſtere. Liquet igitur diametros AE , EB partes eſſe*
(h) Per def. 1. l. 6. *diametri AB , & proinde in directum jacere.*

Cor. 8. *Si duo triangula AOE , ECB , quæ latera duo AO, OE duobus EC , CB proportionalia habent , (ut ſit AO: OE ::*

EC:

EC : CB;) ſecundùm unum angulum OEC ita componantur, ut latera homologa ſint parallela, nempe AO ipſi EC, & OE ipſi CB; erunt reliqua latera AE, EB in directum. Productis enim OE, CE, ductiſque ad illas parallelis AI, BL, perficiantur parallelogramma OI, CL; quæ propter parallelas OA, CI, BL, & AI, OL, CB, erunt (a) æquiangula, & ſimiliter poſita; & propter AO : OE :: EC : CB, erunt etiam ſimilia (b) ac proinde per cor. præcedens, eorum diagonales AE, EB in directum jacent. Q. E. D. (a) Per 27. l. 1. (b) Per def. 1. l. 6.

Hoc autem corollarium propoſitionem 32. hujus l. 6. nobis exhibet; quam quoniam omiſerat Tacquetus, ex hac. prop. 26. mediante corollario ſeptimo deducendam cenſuimus.

PROPOSITIO XXVII.

OMnium parallelogrammorum (AD, AF) ſecundùm eandem rectam (AB) applicatorum, & deficientium parallelogrammis (CE, IH) ſimilibus & ſimiliter poſitis, ei parallelogrammo (AD) quod ſuper dimidiâ AB deſcribitur; maximum eſt illud (AD) quod ad dimidiam applicatum eſt, ſimile exiſtens defectui (CE.) Fig. 65, 66.

Applicentur ad rectam AB biſectam in C, parallelogrammum ACDL, & quodvis aliud AIFG, deficientia parallelogrammis CBED, & IBHF, ſimilibus & ſimiliter poſitis ipſi AD parallelogrammo quod a dimidiâ recta AB deſcribitur: Dico parallelogrammum AD parallelogrammo AF majus eſſe.

Hujus autem propoſitionis caſus ſunt duo: vel enim parallelogrammi AF baſis AI eſt ipſâ AC major, vel minor.

1. Sit primò major, ut in Fig. 65. Et quoniam parallelogramma CE, IH communem angulum CBE vel IBH habentia, ſimilia & ſimiliter poſita ſunt (c); circa diametrum eandem DFB (d) erunt.; & producta IF ad K, erit CF ipſi FE (e) æquale. Commune apponatur IH, eritque CH = IE. Sed propter AB biſectam in C, (f) erit GC = CH: Ergo & GC = IE. Commune adjiciatur CF, & erit AF = CF + IE. Sed CE, (hoc eſt, (g) AD, propter æquales baſes AC, CB) majus eſt quàm CF + IE: AD igitur eſt ipſo AF majus. Fig. 65. (c) Per hyp. (d) Per præc. (e) Per 43. l. 1. (f) Per 36. l. 1. (g) Per eand.

2. Deinde ſit AI minor quàm AC, ut in Fig. 66. Et quoniam parallelogramma CE, IH communem angulum CBE vel IBH habentia, ſimilia ſunt & ſimiliter poſita (h); circa eandem dia- Fig. 66. (h) Per hyp.

(a) Per prac. *diametrum* (a) *BDF erunt. Ducatur diameter, & deſcribatur figura. Et propter æquales AC, CB,* (b) *æquabuntur LD,*
(b) Per 34. l. 1. *DE: unde & parallelogramma GD, DH æqualia* (c) *erunt.*
(c) Per 36. l. 1. *Parallelogrammum igitur DH eſt parallelogrammo GK majus.*
(d) Per 43. l. 1. *Sed DH*(d) = *DI: ergo DI majus eſt quàm GK. Commune apponatur AK, & parallelogrammum AD parallelogrammo AF majus erit.*

Omnium itaque parallelogrammorum ſecundùm eandem rectam applicatorum, & deficientium parallelogrammis ſimilibus & ſimiliter poſitis ei quod a dimidiâ deſcribitur, maximum illud eſt quod ad dimidiam applicatur. Q. E. D.

Fig. 67. Cor. 1. *Si ad eandem rectam AB applicentur parallelogramma AF, AΦ deficientia parallelogrammis IH, ιη ſimilibus & ſimiliter poſitis ipſi AD (vel CE) parallelogrammo quod a rectâ AB dimidiâ deſcribitur, ita tamen ut ſit ſumma rectarum IB+ιB = AB, (hoc eſt, Aι = IB, & CI = Cι;) Parallelogramma AF, AΦ erunt æqualia. Nam propter æquales AC, CB, & ιC, CI,* (e) *æquantur etiam GN, NH, & ON, NF: & in*
(e) Per 34. l. 1. *triangulo FOΦ, propter rectas ND, Dκ lateribus ΦO, OF reſpectivè parallelas, erit* (f) *etiam FD = DΦ, & Oκ = κΦ.*
(f) Per 2. l. 6. *Unde propter baſes æquales,* (g) *erit NL = NE, & Nκ =*
(g) Per 36. l. 1. *NK: ergo OL (= FE =* (h) *FC) =* (i) *OC, & 2OL ſive*
(h) Per 43. l. 1. *Oγ = 2OC ſive OI. Commune apponatur AO, eritque AΦ = AF.* Q. E. D.

(i) Per 36. l. 1. Cor. 2. *Si ad rectam AB applicentur parallelogramma æqualia AF, AΦ, deficientia parallelogrammis IH, ιη ſimilibus & ſimiliter poſitis parallelogrammo AD (vel CE) quod ſuper dimi-*
(k) Per hyp. *diâ ipſius AB deſcribitur, punctis I & ι in rectâ AB jacentibus;*
(l) Per 43. l. 1. *Erit IB + ιB = AB, hoc eſt, Aι = IB. Nam productâ rectâ IK ad M, propter* (k) *AΦ = AF, ablato communi AO,*
(m) Per 2. l. 6. *erit GΦ = ιF =* (l) *HM. Ergo & GO* (m) *= FH, ac*
(n) Per 34. l. 1. *proinde* (n) *Aι = IB.*

PROPOSITIO XXVIII.

Fig. 68. AD datam rectam (AB,) dato rectilineo (C.) æquale parallelogrammum (AI) applicare, deficiens parallelogrammo (ON) quod ſimile ſit alteri dato (D.) Oportet autem datum rectilineum (C) cui æquale applicandum eſt, non (o)
(o) Per prac. majus eſſe parallelogrammo (AG) quod ad dimidiam datæ (AB) applicatur; ſimilibus exiſtentibus,

bus, & eo (AG) quod ad dimidiam applicatur, & (EF) defectu ejus, illi parallelogrammo (D) cui ſimile (ON) deficere debet.

Biſecetur AB in E; & ſuper rectâ AE, (a) *deſcribatur, pa-* (a) Per
rallelogrammo dato D, ſimile parallelogrammum AG, & com- 18. l. 6.
pleatur parallelogrammum AF. Erit quoque EF ipſi AG, ac
proinde dato D ſimile. Erit etiam EF ipſi AG ſimiliter poſitum,
& æquale. Et cùm per determinationem, AG non ſit minus rec-
tilineo C, erit vel ei æquale, vel eo majus. Si ſit AG = C,
factum eſt quod petebatur: Ad datam enim rectam AB dato rec-
tilineo C æquale parallelogrammum AG applicatur, deficiens pa-
rallelogrammo EF, dato D ſimili.

Si verò parallelogrammum AG ſit rectilineo C majus; (b) *in-* (b) Per cor.
veniatur exceſſus ipſius AG vel EF, ſupra rectilineum C; & illi p. 45. l. 1.
exceſſui æquale, ipſi verò EF ſimile & ſimiliter poſitum fiat (c)
parallelogrammum KL, cum ipſo EF communem angulum ha- (c) Per
bens G. Parallelogramma igitur EF, KL, circa eandem diametrum 25. l. 6.
GIB (d) *exiſtunt. Producatur KI ad M, N; & LI ad O;* (d) Per 26. l. 6.
& erunt parallelogramma ON, EF, circa eandem diametrum
GB, & (e) *proinde ſimilia. Ergo* (f) *etiam ON ſimile eſt da-* (e) Per
to D. Et quoniam KL eſt exceſſus parallelogrammi EF ſupra 24. l. 6.
datum rectilineum C; ſi itaque e parallelogrammo EF auferatur (f) Per
KL, quod reliquum eſt æquale erit ipſi C; adeoque erit rectili- 21. l. 6.
neum C æquale parallelogrammis EN, IF ſimul ſumptis, hoc eſt,
(propter EN (g) *= AK, &* (h) *IF = EI) æquale parallelogram-* (g) Per
mo AI. Ergo ad datam rectam AB, dato rectilineo C æquale 36. l. 1.
parallelogrammum AI applicatur, deficiens parallelogrammo ON, (h) Per
quod ſimile eſt dato D. Q. E. F. 43. l. 1.

Scholium. *Ex caſu 2. & cor. 1. prop. præced. emergit alia* Fig. 69.
methodus hoc problema conſtruendi, ſi nempe, ſuper datâ AB
conſtitutis ut priùs AG, EF dato D ſimilibus, producantur ip-
ſius EF latus EG & diameter BG, & circa hanc, in angulo ipſi
EGF ad verticem oppoſito, fiat (i) *parallelogrammum SGTQ,* (i) Per
æquale exceſſui ipſius AG vel EF ſupra rectilineum C, ipſique 25. l. 6.
EGFB ſimile, ſimiliterque poſitum. Unde ST erit ſimile, ſimi-
liter poſitum & (k) *æquale ipſi KL in conſtructione priori. Pro-* (k) Per
ductis AH, BF, QS, QT, compleantur parallelogramma AQ, axio. 1. l. 1.
PR: Erit (l) *PR ſimile ipſi EF, ac proinde dato D. Et propter* (l) Per 24. l. 6.
ST, KL ſimilia, ſimiliter poſita & æqualia, erit SG = GL, (m) Per 34.
hoc eſt, (m) *PE = EO. Unde* (n) *AP = OB, &* (o) *AQ =* l. 1.
AI = C. Ad datam igitur rectam AB, dato rectilineo C æqua- (n) Per
le parallelogrammum AQ applicatur, deficiens parallelogram- axio. 3. l. 1.
mo PR, quod ſimile eſt dato D. (o) Per cor. 1. præc.

Fig. 70. Cor. 1. *Si parallelogrammum datum D quadratum ſit ; problema ſic efferetur :* Ad datam rectam AB, dato rectilineo C æquale rectangulum applicare, deficiens quadrato. *Et data recta applicabitur rectangulum AI deficiens quadrato* ON, *vel rectangulum AQ deficiens quadrato* PR. *Unde, cùm per hujus prop. (vel ſcholii) conſtructionem , rectangulum AI unà cum quadrato* KL, *(vel rectangulum AQ unà cum quadrato ST) æquale ſit quadrato AG vel EF; patet prop. 5. lib. 2. ex hac prop. 28. l. 6. immediate deduci. Sic enim exprimitur prop. illa 5. l. 2.* Si recta AB ſecta fuerit in partes æquales , AE. EB, & in partes inæquales AO, OB (vel AP, PB;) Erit rectangulum AI (vel AQ) ſub partibus inæqualibus , unà cum KL (vel ST) quadrato partis intermediæ EO (vel EP,) æquale quadrato dimidiæ AE vel EB. *Quæ nihil aliud eſt, quàm prop. hujus 28. caſus ille particularis, qui in hoc corollario deſcribitur.*

Fig. 70. Cor. 2. *Datâ rectâ AB & rectilineo C, per hanc pr. 28. ejuſque ſcholium, habebitur OB vel PB, latus quadrati quo deficit rectangulum AI vel AQ, rectilineo C æquale, & ad datam rectam AB applicatum. Pro quantitate incognitâ OB ponatur Y; unde* $AN = AB \times Y$, *&* $ON = Yq$; *ergo* AI $(= AN - ON)$ $= AB \times Y - Yq = C$. *Atque idem omnino colligitur ſi ponatur* $Y = PB$: *erit enim* $AQ = AR - PR = AB \times Y - Yq = C$. *Atque hæc eſt prima* (a) *æquationum affectarum quadraticarum ſpecies ſive forma , quam ex hac prop. 28. ſolverunt Geometræ veteres, inveniendo quantitatem incognitam OB vel PB, per applicationem rectanguli dato C æqualis, ad datam rectam AB, & deficientis quadrato. Manifeſtum autem eſt, primam hanc formam, duplicem ſolutionem admittere: Y enim vel per OB vel per PB explicari poteſt; quarum illa (OB) per propoſitionis, hac (PB) per ſcholii conſtructionem invenietur. Patet etiam ex cor. 2. pr. 27. duas illas quantitates ſimul ſumptas* (OP + PB) *datæ rectæ AB æquales eſſe; unde ut utraque inveniatur, duplici conſtructione opus non eſt: inventâ enim unâ quavis OB, altera AO vel PB ſimul innoteſcit.*

(a) *Vide Oughtredi Clav. Mathematica, cap. 16. n. 9.*

Fig. 70. Cor. 3. *Ipſa etiam regula quâ ad hujus formæ æquationes ſolvendum utuntur recentiores , ex hujus prop. 28. conſtructione deducitur. Cùm enim Y ſit vel* (PB =) AO, *vel* OB, *ſitque* $AO = \frac{1}{2} AB + EO$, *&* $OB = \frac{1}{2} AB - EO$: *Et cùm ſit* $EO = KI$; *& per conſtr. pr. 28.* $KIq = EBq - C =$ (b) $\frac{1}{4} ABq - C$, *erit KI vel EO* $= \sqrt{\frac{1}{4} ABq - C}$. *Ergo Y erit*

vel $AO = \frac{1}{2} AB + \sqrt{\frac{1}{4} ABq - C}$,

vel $OB = \frac{1}{2} AB - \sqrt{\frac{1}{4} ABq - C}$.

(b) *Per cor. 3. p. 4. l. 2.*

Atqui,

Atqui, pro æquatione $AB \times Y - Yq = C$, *regula eſt* $\frac{1}{2} AB \pm \sqrt{\frac{1}{4} ABq - C} = Y$. *Vide Oughtredum loco ſupra citato.*

Cor. 4. *Hinc in æquatione* $AB \times Y - Yq = C$, *datâ rectâ AB & rectilineo C, expeditiùs invenietur Y, ſi rectilineo C æquale* (a) *quadratum conſtruatur, cujus latus ex illâ conſtructione inventum ſit V, cui ex E medio puncto datæ rectæ AB, perpendiculum æquale EX erigatur: tum centro X, radio XO* $= \frac{1}{2}$ *AB arcum circuli deſcribe, ſecantem AB in O: rectæ AO, OB erunt valores ipſius Y: Nam* $Y =$ (b) $\frac{1}{2} AB \pm \sqrt{\frac{1}{4} ABq - C}$. *Sed per conſtr. eſt* $XOq = \frac{1}{4} ABq$, & $XEq = C$. *Ergo EOq ſive* (c) $XOq - XEq = \frac{1}{4} ABq - C$. *Ergo* $EO = \sqrt{\frac{1}{4} ABq - C}$, & $AO = \frac{1}{2} AB + EO = \frac{1}{2} AB + \sqrt{\frac{1}{4} ABq - C}$, *ſicut* & $OB = \frac{1}{2} AB - EO = \frac{1}{2} AB - \sqrt{\frac{1}{4} ABq - C}$.

Fig. 71.
(a) Per 14. l. 2.
(b) Per cor. 3. hujus.
(c) Per 47. l. 1.

PROPOSITIO XXIX.

AD datam rectam (AB) dato rectilineo (C) æquale parallelogrammum (AI) applicare, excedens parallelogrammo (ML) quod ſimile ſit alteri dato (D.)

Fig. 72.

Biſecetur AB in E, & ſuper rectâ EB (d) *deſcribatur parallelogrammo dato D ſimile parallelogrammum BEFG; atque ipſis C, EG ſimul ſumptis æquale, ipſi verò FEBG ſimile, ſimiliterque poſitum fiat* (e) *parallelogrammum FKIH commune cum illo habens angulum ad F. Erunt* (f) *igitur parallelogramma EG, HK circa eandem diametrum FBI. Producantur AB, GB, ad L, M; Et cùm ſimile ſit EG ipſi D per conſtructionem, atque* (g) *ipſi ML quia circa eandem diametrum ſunt EG, ML; inde colligitur* (h) *ML ipſi D ſimile eſſe. Productâ MK, compleatur parallelogrammum AM; eritque AK =* (i) *KB =* (k) *BH. Quare ſi æqualibus AK, BH commune adjiciatur KL; erit AI parallelogrammum æquale parallelogrammis KL, BH ſimul ſumptis. Parallelogrammum autem KH (hoc eſt, EG + KL + BH) æquale eſt ipſis EG + C per conſtructionem: adeoque ſublato communi EG, erit C = KL + BH = AI. Ad datam igitur rectam AB, dato rectilineo C æquale parallelogrammum AI applicatur, excedens parallelogrammo ML, quod dato D ſimile eſt.* Q. E. F.

(d) Per 18. l. 6.
(e) Per 25. l. 6.
(f) Per 26. l. 6.
(g) Per 24. l. 6.
(h) Per 21. l. 6.
(i) Per 36. l. 1.
(k) Per 43. l. 1.

Fig. 73. Cor. 1. *Si parallelogrammum D ſit quadratum, problema poſtulat ut* Ad datam rectam AB, dato rectilineo C æquale rectangulum applicetur, excedens quadrato. *Et cùm per conſtructionem, rectangulum AI unà cum quadrato EG æquale ſit quadrato KH; patet prop. 6. lib. 2. ex hac pr. 29. l. 6. immediatè deduci poſſe: nempe,* Si recta AB biſecta fuerit in E, eique recta quædam BL adjiciatur; Erit (AI) rectangulum ſub totâ compoſitâ AL & adjectâ BL ſive LI, unà cum (EG) quadrato dimidiæ, æquale quadrato (KH) rectæ KI vel EL compoſitæ ex dimidiâ & adjectâ. *Nihil enim aliud eſt hac prop. 6. l. 2. quàm propoſitionis 29. l. 6. caſus ille particularis, qui in hoc corollario deſcribitur.*

Fig. 73. Cor. 2. *Datâ rectâ AB & rectilineo C, per hanc prop. invenerunt veteres Geometræ latera AL, LI rectanguli AI rectilineo C æqualis, quod ad datam AB ita applicari debet, ut excedat quadrato: quæ latera apud recentiores Analyſtas,* (a) *per æquationum quadraticarum affectarum ſecundæ ac tertiæ ſpeciei reſolutionem inveniuntur. Etenim ſi pro latere LI ponatur E, erit* $ML = Eq$. & $AM = E \times AB$: *ergo AI ſive* $= Eq + E \times AB$: *quæ eſt tertia æquationum quadraticarum ſpecies, in quâ per hanc prop. invenitur E ſive BL vel LI, per applicationem rectanguli dato C æqualis, ad datam rectam AB, & excedentis quadrato. Invento autem latere LI ſive E, ſimul habetur latus alterum* $AL = AB + E$, *quod inveniunt recentiores, per reſolutionem æquationis quadraticæ, ſecundæ ſpeciei.*

(a) *Vide Oughtredi Clav. cap. 16. n. 9.*

Fig. 73. Cor. 3. *Hæc etiam ſecundæ æquationum affectarum quadraticarum ſpecies, inventis per corollarium præcedens rectanguli AI (rectilineo C æqualis, ad datam rectam AB applicati, & excedentis quadrato) lateribus AL, LI, ſic conſtrui poteſt. Deſcribatur* (b) *rectæ AL ſive IP quadratum IPQR, cujus pars ſit rectangulum AI. Et quoniam* $AL = IR$, & $BL = LI$, *erit* (c) $LR = AB$. *Jam ſi pro AL ponatur A; erit* $PR = Aq$. & $AR = A \times AB$; *unde AI ſive* $C = (PR - AR =)\ Aq - A \times AB$; *quæ eſt æquationum quadraticarum ſecunda ſpecies, per hoc corollarium conſtruenda.*

(b) *Per 46. l. 1.*
(c) *Per axio. 3. l. 1.*

Cor. 4. *Recentiorum* (d) *etiam regulæ, (ſc.* $\sqrt{\frac{1}{4}ABq + C} + \frac{1}{2}AB = A$, & $\sqrt{\frac{1}{4}ABq + C} - \frac{1}{2}AB = E$,) *quarum ope, ex æquatione* $Aq - A \times AB = C$, *invenitur A, & ex æquatione* $Eq + E \times AB = C$, *invenitur E, Ex hujus prop. conſtructione deduci poſſunt. Cùm enim ſit* $EB = \frac{1}{2}AB$, *erit* $EG =$ (e) $\frac{1}{4}ABq$. *Et per conſtr. hujus,* $KH = EG + C = \frac{1}{4}ABq + C$, *cujus itaque latus KI ſive* $EL = \sqrt{\frac{1}{4}ABq + C}$, *cui ſi AE vel* $\frac{1}{2}AB$ *adjiciatur, erit AL ſive*

(d) *Vide Oughtredum loco citato.*
(e) *Per cor. 3. p. 4. l. 2.*

$A =$

Atqui, pro æquatione $AB \times Y - Yq = C$, *regula eſt* $\frac{1}{2} AB + \sqrt{\frac{1}{4} ABq - C} = Y$. *Vide Oughtredum loco ſupra citato.*

Cor. 4. *Hinc in æquatione* $AB \times Y - Yq = C$, *datâ rectâ AB & rectilineo C, expeditius invenietur Y, ſi rectilineo C æquale (z) quadratum conſtruatur, cujus latus ex* [illegible] *tunc inventum ſit V, cui ex E medio puncto datæ rectæ AB,* [illegible] *per*[illegible] *æquale EX erigatur; tum centro X, radio* [illegible] $= \frac{1}{2}$ *AB arcum circuli deſcribe, ſecantem AB in O: rectæ AO, OB erunt valores ipſius Y. Nam* $Y = (AO) \frac{1}{2} AB + \sqrt{\frac{1}{4} ABq}$ [illegible] *Sed per conſtr. eſt* $XOq = \frac{1}{4} ABq$, *&* $XEq = C$. *Ergo* [illegible] *ſive (c)* $XOq - XEq = \frac{1}{4} ABq - C$. *Ergo* $EO = \sqrt{\frac{1}{4} ABq - C}$, *&* $AO = \frac{1}{2} AB + EO = \frac{1}{2} AB + \sqrt{\frac{1}{4} ABq}$ [illegible] *ſicut &* $OB = \frac{1}{2} AB - EO = \frac{1}{2} AB - \sqrt{\frac{1}{4} ABq}$ [illegible]

PROPOSITIO XXIX.

AD datam rectam (AB), dato rectilineo [illegible] æquale parallelogrammum (AI) applicare, excedens parallelogrammo (BI) quod ſimile [illegible] dato (D).

[illegible]

Fig. 73. Cor. 1. *Si parallelogrammum D ſit quadratum, problema poſtulat ut* Ad datam rectam AB, dato rectilineo C æquale rectangulum applicetur, excedens quadrato. *Et cùm per conſtructionem, rectangulum AI unà cum quadrato EG æquale ſit quadrato KH; patet prop. 6. lib. 2. ex hac pr. 29. l. 6. immediatè deduci poſſe: nempe,* Si recta AB biſecta fuerit in E, eique recta quædam BL adjiciatur; Erit (AI) rectangulum ſub totâ compoſitâ AL & adjectâ BL ſive LI, unà cum (EG) quadrato dimidiæ, æquale quadrato (KH) rectæ KI vel EL compoſitæ ex dimidiâ & adjectâ. *Nihil enim aliud eſt hæc prop. 6. l. 2. quàm propoſitionis 29. l. 6. caſus ille particularis, qui in hoc corollario deſcribitur.*

Fig. 73. Cor. 2. *Datâ rectâ AB & rectilineo C, per hanc prop. invenerunt veteres Geometræ latera AL, LI rectanguli AI rectilineo C æqualis, quod ad datam AB ita applicari debet, ut excedat quadrato: quæ latera apud recentiores Analyſtas,* (a) *per æquationum quadraticarum affectarum ſecundæ ac tertiæ ſpeciei reſolutionem inveniuntur. Etenim ſi pro latere LI ponatur E, erit* $ML = Eq.$ *&* $AM = E \times AB$*: ergo AI ſive* $= Eq + E \times AB$*: quæ eſt tertia æquationum quadraticarum ſpecies, in quâ per hanc prop. invenitur E ſive BL vel LI, per applicationem rectanguli dato C æqualis, ad datam rectam AB, & excedentis quadrato. Invento autem latere LI ſive E, ſimul habetur latus alterum* $AL = AB + E$*, quod inveniunt recentiores, per reſolutionem æquationis quadraticæ, ſecundæ ſpeciei.*

(a) Vide Oughtredi Clav. cap. 16. n. 9.

Fig. 73. Cor. 3. *Hæc etiam ſecunda æquationum affectarum quadraticarum ſpecies, inventis per corollarium præcedens rectanguli AI (rectilineo C æqualis, ad datam rectam AB applicati, & excedentis quadrato) lateribus AL, LI, ſic conſtrui poteſt. Deſcribatur* (b) *rectâ AL ſive IP quadratum IPQR, cujus pars ſit rectangulum AI. Et quoniam* $AL = IR$*, &* $BL = LI$*, erit* (c) $LR = AB$*. Jam ſi pro AL ponatur A, erit* $PR = Aq$*, &* $AR = A \times AB$*; unde AI ſive* $C = (PR - AR =)\ Aq - A \times AB$*; quæ eſt æquationum quadraticarum ſecunda ſpecies, per hoc corollarium conſtruenda.*

(b) Per 46. l. 1.
(c) Per axio. 3. l. 1.

Cor. 4. *Recentiorum* (d) *etiam regulæ, (ſc.* $\sqrt{\frac{1}{4} ABq + C} + \frac{1}{2} AB = A$*, &* $\sqrt{\frac{1}{4} ABq + C} - \frac{1}{2} AB = E$*,) quarum ope, ex æquatione* $Aq - A \times AB = C$*, invenitur A, & ex æquatione* $Eq + E \times AB = C$*, invenitur E, Ex hujus prop. conſtructione deduci poſſunt. Cùm enim ſit* $EB = \frac{1}{2} AB$*, erit* $EG =$ (e) $\frac{1}{4} ABq$*: Et per conſtr. hujus,* $KH = EG + C = \frac{1}{4} ABq + C$*, cujus itaque latus KI ſive* $EL = \sqrt{\frac{1}{4} ABq + C}$*, cui ſi AE vel* $\frac{1}{2}$ *AB adjiciatur, erit AL ſive*

(d) Vide Oughtredum loco citato.
(e) Per cor. 3. 5. 4. l. 2.

A =

$A = \sqrt{\tfrac{1}{4} ABq + C} + \tfrac{1}{2} AB$. *Porro, ſi ab EL* $=$
$\sqrt{\tfrac{1}{4} ABq + C}$ *auferatur EB, ſive* $\tfrac{1}{2} AB$*, relinquetur BL ſive E*
$= \sqrt{\tfrac{1}{4} ABq + C} - \tfrac{1}{2} AB$.

Cor. 5. *Ex his autem regulis, in utralibet æquatione, ſive* $Aq - A \times AB = C$*, ſeu* $Eq + E \times AB = C$*, datâ rectâ AB, & rectilineo C, expeditius invenientur A & E, ſi rectilineo C æquale quadratum* (a) *conſtruatur, cujus latus inde inventum ſit N, cui ex medio puncto rectæ datæ AB, æquale perpendiculum EO erigatur, & jungatur OB, cui æqualis in EB producta, capiatur EL, eritque* $AL = A$, *&* $BL = E$. *Cùm enim ſit* $EOq =$ (b) C, *erit* $EBq + EOq = \tfrac{1}{4} ABq + C =$ (c) $OBq = ELq$. *Ergo EL* (d) $\sqrt{\tfrac{1}{4} ABq + C}$, *& AL* $=$ (e) $\tfrac{1}{2} AB + \sqrt{\tfrac{1}{4} ABq + C} = A$; *atque BL* $=$ (f) $\sqrt{\tfrac{1}{4} ABq + C} - \tfrac{1}{2} AB = E$.]

Fig. 74. (a) *Per 14. l. 2.* (b) *Per conſtruct.* (c) *Per 47. l. 1.* (d) *Per axio. 15.* (e) *Per axio. 2.* (f) *Per axio. 3.*

PROPOSITIO XXX.

Datam rectam (AB) ita ſecare, ut tota (AB) ſit ad unum ſegmentum (AC) ſicut idem ſegmentum eſt ad reliquum (CB.) *Fig. 75.*

Hoc eſt, (ut loquuntur Geometræ,) lineam extremâ ac mediâ ratione ſecare.

[*Super datâ rectâ AB fiat quadratum AFSB, & ad rectam FA, quadrato FB æquale* (g) *applicetur rectangulum FOLI, excedens figurâ AL ipſi FB ſimili. AL itaque quadratum eſt. Et quoniam FL æquale eſt ipſi FB; ablato communi FC, erit AL = OB. Et propter angulos rectos, ac proinde æquales, OCB, ACL,* (h) *erit OC : CL :: AC : CB. Sed OC =* (i) *AF = AB, & CL = AC: Ergo AB : AC :: AC : CB. Factum eſt igitur quod petebatur.*

Fig. 21. l. 2. (g) *Per 29. l. 6.* (h) *Per 14. l. 6.* (i) *Per 34. l. 1.*

Aliter.] Per 11. 2. ita ſeca AB in C, ut rectangulum ſub AB, CB, ſit æquale quadrato AC. Dico factum. *Fig. 75. l. 6.*

Erit enim per 17. ut AB ad AC, ſic AC ad CB.

Hujus ſectionis vis admirabilis eſt in corporum regularium inſcriptione & comparatione.

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 76.

SI a lateribus trianguli rectanguli (ACB) figuræ ſimiles quæcunque deſcribantur, erit (F) ea quæ opponitur recto angulo, duabus ſimul reliquis (R, L) æqualis.

Propoſitio igitur 47. l. 1. hic redditur univerſalis.

(a) *Per cor.* 2. *p.* 8. *l.* 6. (b) *Per cor.* 2. *p.* 20. *l.* 6. (c) *Per cor.* 2. *p.* 8. *l.* 6. (d) *Per cor.* 2. *p.* 20. *l.* 6. (e) *Per* 24. *l.* 5.

Ab angulo recto C dimittatur perpendicularis CO. Quoniam AB, BC, BO ſunt (*a*) tres proportionales, erit F ad ſibi ſimilem R, (*b*) ut AB prima ad BO tertiam. Rurſum quoniam (*c*) BA, AC, AO ſunt proportionales, erit F ad ſibi ſimilem L, ut (*d*) BA prima ad AO tertiam. Quia igitur eſt F ad R, ut AB ad BO, & F ad L, ut AB ad AO, erit quoque F ad R & L ſimul ſumptas, ut (*e*) AB ad BO, AO ſimul ſumptas. Sed AB duabus BO, AO æqualis eſt. Ergo etiam F duabus R & L æqualis erit. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

EX hac propoſitione facile dabitur quotcunque figuris ſimilibus rectilineis quibuſcunque una omnibus æqualis & ſimilis, eâdem prorſus methodo, quâ probl. 1. ſcholii poſt 47. l. 1. exhibetur datis quotlibet quadratis unum æquale. In demonſtratione tantùm pro 47. l. 1. citetur 31. l. 6. [*Et pari ratione, per prob. 2, ſcholii ejuſdem, dabitur figurarum ſimilium differentia ſimilis: hoc eſt, non tantùm addi poſſunt, verùm etiam ſubtrahi figuræ quævis ſimiles, minor à majore, eâdem methodo quâ quadrata adduntur vel ſubtrahuntur in ſcholio citato.*]

PROPOSITIO XXXII.

VIX habet uſum, nec quidquam habet notabile. [Eſt autem cor. 8. p. 26. priùs, ne quis eam deſideret.]

PRO-

PROPOSITIO XXXIII.

IN æqualibus circulis vel eodem, anguli ſive ad centra (ut ABC, FOD) ſive ad peripheriam (ut ARC, FSD) eam inter ſe rationem habent, quam arcus (AKC, FGD) quibus inſiſtunt. Idem intellige de ſectoribus. Fig. 77.

Quod attinet ad angulos centri & ſectores, demonſtrabitur eodem prorſus modo, quo propoſitione 1. hujus libri demonſtratum eſt triangula æque alta eſſe ut baſes. Tantùm ubi iſtic citatur prop. 38. l. 1. hîc citetur 29. lib. 3. [*Item pro E iſthic, vertice trianguli DEF, hîc ponitur O vertex anguli & ſectoris DOF; pro triangulis verò iſthic, ſubſtitue hîc angulos ad centra B, O, itemque ſectores; & pro baſibus arcus.*

Quoties enim pars quævis aliquota ex. gr. pars tertia DG, arcûs DF, continetur in arcu AC; toties eadem pars aliquota DOG, anguli DOF, continebitur in angulo ABC. Et manifeſtum eſt quamlibet aliam partem aliquotam arcûs DF & anguli DOF, in arcu AC & angulo ABC, æquali ſemper numero reſpectivè contineri. Ergo, per rationem æqualium indicium illud Tacquetianum, pag. 122. 123. erit angulus ABC ad angulum DOF, ut arcus AC ad arcum DF: Et eodem prorſus modo probabitur ſectorem ABC eſſe ſectorem DOF, ut arcus AC eſt ad arcum DF.]

Quoniam verò ad peripheriam anguli R & S dimidii (*a*) ſunt angulorum ad centrum ABC, FOD, quod de his oſtenſum eſt, liquebit etiam de illis. (a) Per 20. *l.* 3.

Corollaria.

1. ANgulus centri (BAC) eſt ad quatuor rectos, ut arcus BC cui inſiſtit, ad totam circumferentiam. Fig. 78.

Nam [*cùm quatuor rectos, hoc eſt,* (b) *omnes angulos circa centrum A conſtitutos, metiatur tota circuli circumferentia, unum igitur angulum rectum BAF metietur totius circumferentiæ quadrans BF. Sed*] ut [*angulus*] BAC eſt ad rectum BAF, ita per hanc 33. arcus BC eſt ad quadrantem BF. Ergo (*c*) angulus BAC eſt ad 4. rectos, ut arcus BC eſt ad 4. quadrantes, hoc eſt ad totam peripheriam. (b) Per cor. 3. pr 13. *l.* 1. cum ſch. p. 23. *l.* 1. (c) Per 24. *l.* 5.

2. Inæqualium circulorum arcus IL, BC, qui æquales ſubtendunt angulos, ſive ad centra ut IAL, & BAC, ſive ad peripheriam, ſunt ſimiles. [*Et converſim.*]

Nam

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ

LIBER UNDECIMUS.

NOBIS SEPTIMUS.

SEX libris primis ſubjungit Euclides elementa numerorum tribus ſequentibus ſeptimo, octavo & nono comprehenſa, quibus etiam decimum de quantitatibus incommenſurabilibus adjungit. Nos a planis immediate tranſimus ad ſolida; de numeris ſeorſim tractaturi. Id opinor, diſcentibus commodius erit, ſi elementa Geometriæ nullâ aliâ tractatione interruptâ, ſimul omnia habeantur. Nihilominus cùm citabimus propoſitiones hujus & ſequentis libri, eos non ſeptimum & octavum, ſed undecimum & duodecimum appellabimus, ne, ſi ab ordine Euclideo ubique recepto diſcedamus, propoſitionum citatio implicatior reddatur.

Hic liber duas quodammodo partes complectitur. In primâ jaciuntur fundamenta, quibus ſolidorum, hoc eſt, corporum doctrina univerſa nititur. Alterâ parallelepipedorum affectiones proponuntur.

PRima ſolidorum Principia Undecimus *hicce Elementorum Liber proponit. Neque ſane Corporum proprietates ſine eo cognoſci queunt: & ſi Mathematum partes pleraſque omnes ſine ſolidorum ſcientiâ aggrediamur, fruſtra erimus. Doctrina enim Theodoſii Sphærica, Trigonometria etiam Sphærica, pars magna Geometriæ Practicæ, Statica, atque Geographia eidem innituntur; & quæ occurrent paulo difficiliora in Gnomonicâ, Sectionibus Conicis, Aſtronomiâ, Perſpectivâ, atque Opticâ univerſâ, intellectis ritè Solidorum principiis, faciliora redduntur. Adeo ut qui Geometriæ Elementa, omiſſis fere & poſthabitis hoc & ſequenti libro, tradiderunt, eadem manca admodum, atque plane imperfecta tradidiſſe ſint cenſendi.*

DEFI-

Scholium. *Poſtulat hic locus, ut fidem libro quarto præſtitam jam liberem, Elementi* 13. *propoſitionem* 10. *demonſtrando, quæ ita ſe habet*: Quadratum lateris AB pentagoni ordinati ABCDE circulo inſcripti, æquatur quadratis e latere hexagoni & è latere decagoni eidem circulo inſcriptorum, ſimul ſumptis. *Ductâ enim diametro AG, & ratio FB; a centro F lateri AB perpendicularis demittatur FH, quæ producta circulo occurrat in K: Illa arcum AKB, (hoc eſt* (a) *quintam partem totius circumferentiæ) biſariam dividet* (b) *in K. Junge BK, KA; & cùm ſit arcus AK pars decima totius circumferentiæ, erit AK recta,* (c) *latus decagoni ordinati huic circulo inſcripti. A centro F, ipſi AK perpendicularis demittatur FN, quæ producta circulo occurrat in M; hæc arcum AMK biſariam dividet in M, & latus pentagoni BA ſecabit in L. Junge KL. Ob ſemiperipherias ABG, AEG æquales, & arcus ABC, AED æquales; erit arcus CG ipſius CGD, vel AKB dimidius: unde arc. CG = arc. AK = 2 arc. KM. Item, arc. CB = arc. AB = 2 arc. BK. Ergo arc. CG + arc. CB = 2 arc. MK + 2 arc. KB, hoc eſt, arc. BCG = 2 arc. BKM, & ang. BFG =* (d) *2 ang. BFM. Sed in triangulo ABF, ang. externus BFG =* (e) *ABF + BAF, hoc eſt, (ob æquales AF, BF)* (f) *= 2 ang. ABF = 2 ang. BAF = (priùs) 2 ang. BFM vel LFB. In triangulis igitur LFB, FAB, ob angulos BFL, BAF æquales, & angulum ad B communem,* (g) *etiam ang. BLF = ang. BFA, &* (h) *AB : BF :: FB : BL. Unde* (i) *rect. ABL = BFq. Porro, in triangulis ALN, KLN, ob angulos ad N rectos, & latera AN, NK* (k) *æqualia, & LN commune,* (l) *erit AL = LK, & ang. LAK = ang. AKL. Sed & ang. KBA =* (m) *ang. KAB vel LAK ſive AKL: ergo in triangulis BAK, KAL, propter angulum ad A communem, & angulos ABK, AKL æquales, erit ang. AKB =* (n) *ang. ALK, & triangula BAK, KAL erunt ſimilia: unde BA : AK :: KA : AL, & rect. BAL = AKq. Sed rect. ABL + rect. BAL =* (o) *ABq. Ergo ABq = BFq + AKq. Sed BF eſt circuli radius, & proinde* (p) *latus hexagoni ordinati circuli inſcripti; & AK eſt latus decagoni ordinati eidem circulo inſcripti. Ergo quadratum ex latere pentagoni ordinati æquatur quadratis e latere hexagoni ordinati & e latere decagoni ordinati, eidem circulo inſcriptorum, ſimul ſumptis. Q. E. D.*]

Fig. 79.

(a) Per 26. *l.* 3.
(b) Per 30. *l.* 3.
(c) Per 27. *l.* 3.
(d) Per 33. *l.* 6.
(e) Per 32. *l.* 1.
(f) Per 5. *l.* 1.
(g) Per cor. 9. *p.* 32. *l.* 1.
(h) Per 4. *l.* 6.
(i) Per 17. *l.* 6.
(k) Per 3. *l.* 3.
(l) Per 4. *l.* 1.
(m) Per 29. *l.* 3.
(n) Per cor. 9. *p.* 32. *l.* 1.
(o) Per 2. *l.* 2.
(p) Per cor. 1. *p.* 15. *l.* 4.

ELE-

Nam [*primò, ponentur anguli æquales ad centra*; &] arcus IL eſt ad ſuam peripheriam, ut (*a*) angulus IAL, hoc eſt ut BAC, ad 4. rectos; & arcus BC eſt ad ſuam peripheriam (*b*) ut idem angulus BAC ad 4. rectos. Ergo IL (*c*) eſt ad ſuam peripheriam, ut BC ad ſuam. Ergo (*d*) ſunt ſimiles arcus IL & BC.

(a) Per cor. 1.
(b) Per idem cor.
(c) Per 11. l. 5.
(d) Per def. 4. l. 6.

[*Si verò anguli æquales O, K fuerint ad circumferentias; fiant ſuper iiſdem arcubus anguli ad centra IAL, BAC,* (e) *eruntque hi etiam æquales: unde per primam partem arcus IL, BC ſimiles erunt.*

(e) Per 20. l. 3. & axio. 6. l. 1.

Et e converſo, inæqualium circulorum ſimiles arcus BC, IL ſubtendunt angulos æquales, ſive anguli iſti ſint ad centrum ſeu ad circumferentiam, uti ex ipſâ figurâ & prop. 20. *l.* 3. *ſatis patet,*].

3. Duæ ſemidiametri (AB, AC) a concentricis peripheriis arcus auferunt ſimiles IL, BC. Patet ex coroll. 2.

4. [*Ductis rectis BC, IL,*] Segmenta (BKC, IOL) quæ angulos capiunt æquales (K, O,) ſimilia ſunt. [*Et converſim.*]

Nam per coroll. 2. arcus BC, IL, ac proinde etiam arcus BKC, IOL ſimiles ſunt. [*Ergo* (f) & *ſegmenta BKC, IOL ſimilia ſunt.*

(f) Per def. 4. l. 6.

Item ſegmenta oppoſita ſimilia ſunt, propter arcus BC, IL ſimiles.

Et e converſo, ſegmenta ſimilia BKC, IOL capiunt angulos æquales K, O. Nam (g) *propter ſimiles arcus BKC, IOL, arcus oppoſiti BC, IL ſimiles erunt, & anguli K, O, ſuper ipſis* (h) *æquales.*

(g) Per def. 4. l. 6.
(h) Per cor. 2. hujus.

Item, anguli in ſegmentis BC, IL ſunt æqualium angulorum K, O (i) *complementa ad duos rectos, atque inde æquales erunt.*

(i) Per 22. l. 3.

5. *Similia ſegmenta ſuper eâdem rectâ, vel æquali, ſunt æqualia. Patet ex cor. præced. & ſchol. p. 21. l. 3. & axio. 7. l. 1. Continet autem hoc corollarium propoſitiones 23. & 24. l. 3. a Tacqueto omiſſas. Prop. enim 23. ita effertur:* Super eâdem rectâ lineâ, duo circulorum ſegmenta ſimilia & inæqualia, ex eâdem parte non conſtituentur. *Et prop. 24. ita:* Super æqualibus rectis lineis, ſimilia circulorum ſegmenta ſunt inter ſe æqualia.

6. *Ex hac etiam prop. ejuſque corollariis deducitur angulorum conficiendorum & menſurandorum praxis facillima, prout in ſcholio poſt prop. 23. lib. 1. latiùs explicatur.*

Scholium.

Scholium. *Poſtulat hic locus, ut ſidem libro quarto præſtitam jam liberem, Elementi* 13. *propoſitionem* 10. *demonſtrando, quæ ita ſe habet*: Quadratum lateris AB pentagoni ordinati ABCDE circulo inſcripti, æquatur quadratis e latere hexagoni & è latere decagoni eidem circulo inſcriptorum, ſimul ſumptis. *Ductâ enim diametro AG, & ratio FB; a centro F lateri AB perpendicularis demittatur FH, quæ producta circulo occurrat in K: Illa arcum AKB, (hoc eſt* (a) *quintam partem totius circumferentiæ) biſariam dividet* (b) *in K. Junge BK, KA; & cùm ſit arcus AK pars decima totius circumferentiæ, erit AK recta,* (c) *latus decagoni ordinati huic circulo inſcripti. A centro F, ipſi AK perpendicularis demittatur FN, quæ producta circulo occurrat in M; hæc arcum AMK biſariam dividet in M, & latus pentagoni BA ſecabit in L. Junge KL. Ob ſemiperipherias ABG, AEG æquales, & arcus ABC, AED æquales; erit arcus CG ipſius CGD, vel AKB dimidius: unde arc. CG = arc. AK = 2 arc. KM. Item, arc. CB = arc. AB = 2 arc. BK. Ergo arc. CG + arc. CB = 2 arc. MK + 2 arc. KB, hoc eſt, arc. BCG = 2 arc. BKM, & ang. BFG =* (d) *2 ang. BFM. Sed in triangulo ABF, ang. externus BFG =* (e) *ABF + BAF, hoc eſt, (ob æquales AF, BF)* (f) *= 2 ang. ABF = 2 ang. BAF = (priùs) 2 ang. BFM vel LFB. In triangulis igitur LFB, FAB, ob angulos BFL, BAF æquales, & angulum ad B communem,* (g) *etiam ang. BLF = ang. BFA, &* (h) *AB : BF :: FB : BL. Unde* (i) *rect. ABL = BFq. Porro, in triangulis ALN, KLN, ob angulos ad N rectos, & latera AN, NK* (k) *æqualia, & LN commune,* (l) *erit AL = LK, & ang. LAK = ang. AKL. Sed & ang. KBA =* (m) *ang. KAB vel LAK ſive AKL: ergo in triangulis BAK, KAL, propter angulum ad A communem, & angulos ABK, AKL æquales, erit ang. AKB =* (n) *ang. ALK, & triangula BAK, KAL erunt ſimilia: unde BA : AK :: KA : AL, & rect. BAL = AKq. Sed rect. ABL + rect. BAL =* (o) *ABq. Ergo ABq = BFq + AKq. Sed BF eſt circuli radius, & proinde* (p) *latus hexagoni ordinati circuli inſcripti; & AK eſt latus decagoni ordinati eidem circulo inſcripti. Ergo quadratum ex latere pentagoni ordinati æquatur quadratis e latere hexagoni ordinati & e latere decagoni ordinati, eidem circulo inſcriptorum, ſimul ſumptis. Q. E. D.*]

Fig. 79.

(a) *Per* 26. *l.* 3.
(b) *Per* 30. *l.* 3.
(c) *Per* 27. *l.* 3.
(d) *Per* 33. *l.* 6.
(e) *Per* 32. *l.* 1.
(f) *Per* 5. *l.* 1.
(g) *Per cor.* 9. *p.* 32. *l.* 1.
(h) *Per* 4. *l.* 6.
(i) *Per* 17. *l.* 6.
(k) *Per* 3. *l.* 3.
(l) *Per* 4. *l.* 1.
(m) *Per* 29. *l.* 3.
(n) *Per cor.* 9. *p.* 32. *l.* 1.
(o) *Per* 2. *l.* 2.
(p) *Per cor.* 1. *p.* 15. *l.* 4.

ELE-

Fig. 70. Cor. 1. *Si parallelogrammum datum D quadratum ſit; problema ſic efferetur:* Ad datam rectam AB, dato rectilineo C æquale rectangulum applicare, deficiens quadrato. *Et data recta applicabitur rectangulum AI deficiens quadrato* ON, *vel rectangulum AQ deficiens quadrato* PR. *Unde, cùm per hujus prop.* (*vel ſcholii*) *constructionem*, *rectangulum AI unà cum quadrato* KL, (*vel rectangulum AQ unà cum quadrato ST*) *æquale ſit quadrato AG vel EF; patet prop. 5. lib. 2. ex hac prop. 28, l. 6. immediate deduci. Sic enim exprimitur prop. illa 5. l. 2.* Si recta AB ſecta fuerit in partes æquales, AE. EB, & in partes inæquales AO, OB (vel AP, PB;) Erit rectangulum AI (vel AQ) ſub partibus inæqualibus, unà cum KL (vel ST) quadrato partis intermediæ EO (vel EP,) æquale quadrato dimidiæ AE vel EB. *Quæ nihil aliud eſt, quàm prop. hujus 28. caſus ille particularis, qui in hoc corollario deſcribitur.*

Fig. 70. Cor. 2. *Datâ rectâ AB & rectilineo C, per hanc pr. 28. ejuſque ſcholium, habebitur OB vel PB, latus quadrati quo deficit rectangulum AI vel AQ, rectilineo C æquale, & ad datam rectam AB applicatum. Pro quantitate incognitâ OB ponatur Y; unde* $AN = AB \times Y$, & $ON = Yq$; *ergo* $AI\ (= AN - ON) = AB \times Y - Yq = C$. *Atque idem omnino colligitur ſi ponatur* $Y = PB$: *erit enim* $AQ = AR - PR = AB \times Y - Yq = C$. *Atque hæc eſt prima* (a) *æquationum affectarum quadraticarum ſpecies ſive forma, quam ex hac prop. 28. ſolverunt Geometræ veteres, inveniendo quantitatem incognitam OB vel PB, per applicationem rectanguli dato C æqualis, ad datam rectam AB, & deficientis quadrato. Manifeſtum autem eſt, primam hanc formam, duplicem ſolutionem admittere: Y enim vel per OB vel per PB explicari poteſt; quarum illa (OB) per propoſitionis, hæc (PB) per ſcholii conſtructionem invenietur. Patet etiam ex cor. 2. pr. 27. duas illas quantitates ſimul ſumptas* (OP + PB) *datæ rectæ AB æquales eſſe; unde ut utraque inveniatur, duplici conſtructione opus non eſt: inventâ enim unâ quavis OB, altera AO vel PB ſimul innoteſcit.*

(a) *Vide Oughtredi Clav. Mathematica, cap. 16. n. 9.*

Fig. 70. Cor. 3. *Ipſa etiam regula quâ ad hujus formæ æquationes ſolvendum utuntur recentiores, ex hujus prop. 28. conſtructione deducitur. Cùm enim Y ſit vel* (PB =) AO, *vel* OB, *ſitque* $AO = \frac{1}{2} AB + EO$, & $OB = \frac{1}{2} AB - EO$: *Et cùm ſit* $EO = KI$; & *per conſtr. pr. 28.* $KIq = EBq - C =$ (b) $\frac{1}{4} ABq - C$, *erit KI vel EO* $= \sqrt{\frac{1}{4} ABq - C}$. *Ergo Y erit*

vel $AO = \frac{1}{2} AB + \sqrt{\frac{1}{4} ABq - C}$,

vel $OB = \frac{1}{2} AB - \sqrt{\frac{1}{4} ABq - C}$.

(b) *Per cor. 3. p. 4. l. 2.*

Atqui,

Atqui, pro æquatione AB $\times$ Y — Yq = C, regula eſt $\frac{1}{2}$ *AB* + $\sqrt{\frac{1}{4}\ AB q - C}$ = Y. *Vide Oughtredum loco ſupra citato.*

Cor. 4. *Hinc in æquatione AB $\times$ Y — Yq = C, datâ rectâ AB & rectilineo C, expeditiùs invenietur Y, ſi rectilineo C æquale* (a) *quadratum conſtruatur, cujus latus ex illâ conſtructione inventum ſit V, cui ex E medio puncto datæ rectæ AB, per endiculum æquale EX erigatur: tum centro X, radio XO* = $\frac{1}{2}$ *AB arcum circuli deſcribe, ſecantem AB in O: rectæ AO, OB erunt valores ipſius Y: Nam Y* = (b) $\frac{1}{2}$ *AB* + $\sqrt{\frac{1}{4} ABq - C}$. *Sed per conſtr. eſt XOq* = $\frac{1}{4}$ *ABq, & XEq* = C. *Ergo EOq ſive* (c) *XOq — XEq* = $\frac{1}{4}$ *ABq* — C. *Ergo EO* = $\sqrt{\frac{1}{4} ABq - C}$, *& AO* = $\frac{1}{2}$ *AB* + *EO* = $\frac{1}{2}$ *AB* + $\sqrt{\frac{1}{4} ABq - C}$, *ſicut & OB* = $\frac{1}{2}$ *AB — EO* = $\frac{1}{2}$ *AB* — $\sqrt{\frac{1}{4}\ ABq - C}$. Fig. 71. (a) Per 14. l. 2. (b) Per cor. 3. hujus. (c) Per 47. l. 1.

PROPOSITIO XXIX.

AD datam rectam (AB) dato rectilineo (C) æquale parallelogrammum (AI) applicare, excedens parallelogrammo (ML) quod ſimile ſit alteri dato (D.) Fig. 72.

Biſecetur AB in E, & ſuper rectâ EB (d) *deſcribatur parallelogrammo dato D ſimile parallelogrammum BEFG; atque ipſis C, EG ſimul ſumptis æquale, ipſi verò FEBG ſimile, ſimiliterque poſitum fiat* (e) *parallelogrammum FKIH commune cum illo habens angulum ad F. Erunt* (f) *igitur parallelogramma EG, HK circa eandem diametrum FBI. Producantur AB, GB, ad L, M; Et cùm ſimile ſit EG ipſi D per conſtructionem, atque* (g) *ipſi ML quæ circa eandem diametrum ſunt EG, ML; inde colligitur* (h) *ML ipſi D ſimile eſſe. Productâ MK, compleatur parallelogrammum AM; eritque AK* = (i) *KB* = (k) *BH. Quare ſi æqualibus AK, BH commune adjiciatur KL; erit AI parallelogrammum æquale parallelogrammis KL, BH ſimul ſumptis. Parallelogrammum autem KH* (*hoc eſt, EG* + *KL* + *BH*) *æquale eſt ipſis EG* + *C per conſtructionem: adeoque ſublato communi EG, erit C* = *KL* + *BH* = *AI. Ad datam igitur rectam AB, dato rectilineo C æquale parallelogrammum AI applicatur, excedens parallelogrammo ML, quod dato D ſimile eſt. Q. E. F.*

(d) Per 18. l. 6. (e) Per 25. l. 6. (f) Per 26. l. 6. (g) Per 24. l. 6. (h) Per 21. l. 6. (i) Per 36. l. 1. (k) Per 43. l. 1.

Fig. 73. Cor. 1. *Si parallelogrammum D ſit quadratum, problema poſtulat ut* Ad datam rectam AB, dato rectilineo C æquale rectangulum applicetur, excedens quadrato. *Et cùm per conſtructionem, rectangulum AI unà cum quadrato EG æquale ſit quadrato KH; patet prop. 6. lib. 2. ex hac pr. 29. l. 6. immediatè deduci poſſe: nempe,* Si recta AB biſecta fuerit in E, eique recta quædam BL adjiciatur; Erit (AI) rectangulum ſub totâ compoſitâ AL & adjectâ BL ſive LI, unà cum (EG) quadrato dimidiæ, æquale quadrato (KH) rectæ KI vel EL compoſitæ ex dimidiâ & adjectâ. *Nihil enim aliud eſt hac prop. 6. l. 2. quàm propoſitionis 29. l. 6. caſus ille particularis, qui in hoc corollario deſcribitur.*

Fig. 74. Cor. 2. *Datâ rectâ AB & rectilineo C, per hanc prop. invenerunt veteres Geometræ latera AL, LI rectanguli AI rectilineo C æqualis, quod ad datam AB ita applicari debet, ut excedat quadrato: quæ latera apud recentiores Analyſtas, (a) per æquationum quadraticarum affectarum ſecundæ ac tertiæ ſpeciei reſolutionem inveniuntur. Etenim ſi pro latere LI ponatur E, erit* $ML = Eq$. & $AM = E \times AB$: *ergo AI ſive* $= Eq + E \times AB$: *quæ eſt tertia æquationum quadraticarum ſpecies, in quâ per hanc prop. invenitur E ſive BL vel LI, per applicationem rectanguli dato C æqualis, ad datam rectam AB, & excedentis quadrato. Invento autem latere LI ſive E, ſimul habetur latus alterum* $AL = AB + E$, *quod inveniunt recentiores, per reſolutionem æquationis quadraticæ, ſecundæ ſpeciei.*

(a) *Vide Oughtredi Clav. cap. 16. n. 9.*

Fig. 73. Cor. 3. *Hæc etiam ſecunda æquationum affectarum quadraticarum ſpecies, inventis per corollarium præcedens rectanguli AI (rectilineo C æqualis, ad datam rectam AB applicati, & excedentis quadrato) lateribus AL, LI, ſic conſtrui poteſt. Deſcribatur (b) rectâ AL ſive IP quadratum IPQR, cujus pars ſit rectangulum AI. Et quoniam* $AL = IR$, & $BL = LI$, *erit* (c) $LR = AB$. *Jam ſi pro AL ponatur A; erit* $PR = Aq$, & $AR = A \times AB$; *unde AI ſive* $C = (PR - AR =)\ Aq - A \times AB$; *quæ eſt æquationum quadraticarum ſecunda ſpecies, per hoc corollarium conſtruenda.*

(b) *Per 46. l. 1.*
(c) *Per axio. 3. l. 1.*

Cor. 4. Recentiorum (d) *etiam regulæ, (ſc.* $\sqrt{\frac{1}{4}ABq + C} + \frac{1}{2}AB = A$, & $\sqrt{\frac{1}{4}ABq + C} - \frac{1}{2}AB = E$,) *quarum ope, ex æquatione* $Aq - A \times AB = C$, *invenitur A, & ex æquatione* $Eq + E \times AB = C$, *invenitur E, Ex hujus prop. conſtructione deduci poſſunt. Cùm enim ſit EB* $= \frac{1}{2}AB$, *erit* $EG =$ (e) $\frac{1}{4}ABq$: *Et per conſtr. hujus,* $KH = EG + C = \frac{1}{4}ABq + C$, *cujus itaque latus KI ſive* $EL = \sqrt{\frac{1}{4}ABq + C}$, *cui ſi AE vel* $\frac{1}{2}AB$ *adjiciatur, erit AL ſive*

$A =$

(d) *Vide Oughtredum loco citato.*
(e) *Per cor. 3. p. 4. l. 2.*

$A = \sqrt{\frac{1}{4}ABq + C} + \frac{1}{2}AB$. *Porro, ſi ab EL =* $\sqrt{\frac{1}{4}ABq + C}$ *auferatur EB, ſive* $\frac{1}{2}AB$, *relinquetur BL ſive E* $= \sqrt{\frac{1}{4}ABq + C} - \frac{1}{2}AB$.

Cor. 5. *Ex his autem regulis, in utralibet æquatione, ſive* $Aq - A \times AB = C$, *ſeu* $Eq + E \times AB = C$, *datâ rectâ AB, & rectilineo C, expeditiùs invenientur A & E, ſi rectilineo C æquale quadratum* (a) *conſtruatur, cujus latus inde inventum ſit N, cui ex medio puncto recta data AB, æquale perpendiculum EO erigatur, & jungatur OB, cui æqualis in EB producta, capiatur EL, eritque AL = A, & BL = E. Cùm enim ſit* $EOq =$ (b) C, *erit* $EBq + EOq = \frac{1}{4}ABq + C =$ (c) $OBq = ELq$. *Ergo EL* (d) $\sqrt{\frac{1}{4}ABq + C}$, *& AL* = (e) $\frac{1}{2}AB + \sqrt{\frac{1}{4}ABq + C} = A$; *atque BL* = (f) $\sqrt{\frac{1}{4}ABq + C} - \frac{1}{2}AB = E$.] Fig. 74.

(a) Per 14. l. 2.
(b) Per conſtruct.
(c) Per 47 l. 1.
(d) Per axio. 15.
(e) Per axio. 2.
(f) Per axio. 3.

PROPOSITIO XXX.

Datam rectam (AB) ita ſecare, ut tota (AB) ſit ad unum ſegmentum (AC) ſicut idem ſegmentum eſt ad reliquum (CB.) Fig. 75.

Hoc eſt, (ut loquuntur Geometræ,) lineam extremâ ac mediâ ratione ſecare.

[*Super datâ rectâ AB fiat quadratum AFSB, & ad rectam FA, quadrato FB æquale* (g) *applicetur rectangulum FOLI, excedens figurâ AL ipſi FB ſimili. AL itaque quadratum eſt. Et quoniam FL æquale eſt ipſi FB; ablato communi FC, erit AL = OB. Et propter angulos rectos, ac proinde æquales, OCB, ACL,* (h) *erit OC : CL :: AC : CB. Sed OC =* (i) *AF = AB, & CL = AC: Ergo AB : AC :: AC : CB. Factum eſt igitur quod petebatur.* Fig. 21. l. 2.

(g) Per 29. l. 6.
(h) Per 14. l. 6.
(i) Per 34. l. 1.

Aliter.] Per 11. 2. ita ſeca AB in C, ut rectangulum ſub AB, CB, ſit æquale quadrato AC. Dico factum. Fig. 75. l. 6.

Erit enim per 17. ut AB ad AC, ſic AC ad CB.

Hujus ſectionis vis admirabilis eſt in corporum regularium inſcriptione & comparatione.

(a) *Per* 8. *l.* 11. (b) *Per def.* 3. *l.* 11. (c) *Per* 29 *l.* 1. (d) *Per* 34. *l.* 1. (e) *Per def.* 8. *l.* 11.

Sumatur in planorum alterutro FG quodvis punctum C, ex quo ducatur CE parallela ad AB, occurrens plano LQ in E. Erit CE etiam (*a*) recta plano utrique FG, LQ. Quare ſi jungantur rectæ AC, BE, erunt anguli A, B (*b*) recti. Ergo AC, BE ſunt (*c*) parallelæ. Ergo ACEB parallelogrammum eſt, ac proinde CE, quam jam oſtendi utrique plano eſſe perpendicularem, æquatur (*d*) AB. Eodem modo oſtendam omnes utrique plano perpendiculares eſſe æquales. Ergo plana (*e*) ſunt parallela. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XV.

Fig. 12.

SI rectæ duæ ſe mutuò tangentes (BA, CA) ad duas alias ſe mutuò tangentes (ED, FD) ſint parallelæ; etiam plana per ipſas ducta erunt parallela.

(f) *Per* 9. *l.* 11. (g) *Per def.* 3. *l.* 11. (h) *Per* 27. *l.* 1. (i) *Per* 4. *l.* 11. (k) *Per prœc.*

Ex A ducatur AG recta ad planum EF, ponanturque GH, GI, parallelæ ad DE, DF. Erunt hæ (*f*) parallelæ etiam ad AB, AC. Cùm igitur anguli IGA, HGA, ſint (*g*) recti, erunt etiam (*h*) CAG, BAG recti. Ergo GA, quæ ad planum EF eſt recta, etiam recta (*i*) eſt plano BC. Ergo plana (*k*) BC, EF ſunt parallela. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XVI.

Fig. 13.

PLanum (EHFG) ſecans parallela plana (AB, CD,) in iis facit ſectiones (EH, GF) parallelas.

(l) *Per cor.* 1. *poſt* 31. *l.* 1. (m) *Per* 1. *l.* 11. *Fig.* 17. (n) *Per hanc prop.* (o) *Per* 10. *l.* 1. (p) *Per* 34. *l.* 1. (q) *Per* 26. *l.* 1.

Si non, cùm ſint in eodem plano ſecante, convenient (*l*) alicubi in I. Quare cùm totæ HEI, FGI ſint (*m*) in planis AB, CD productis, etiam hæc convenient in I. Quod eſt abſurdum, contra definitionem 8. hujus.

[Schol. *Si duorum planorum AF, BF cum plano tertio AE interſectiones AD, BE ſint parallelæ; erit etiam mutua ipſorum AF, BF interſectio CF, ipſis AD, BE parallela. Secentur enim hæc tria plana planis parallelis ABC, DEF; eruntque* (n) *AB, BC, CA ipſis DE, EF, FD reſpectivè parallela. Ergo* (o) *ang: ABC = DEF, & ang. BAC = ang. EDF. Sed & (propter parallelogrammum AE) erunt* (p) *AB, DE æquales, Ergo* (q) *& BC = EF, & CA = FD. Parallelas*

lelas autem eſſe BC ipſi EF, & CA ipſi FD, oſtenſum prius. Ergo (a) *CF ipſis AD, BE parallela eſt.*] (a) Per 33. l. 1.

PROPOSITIO XVII.

Parallela plana rectas lineas (BD & GH) proportionaliter ſecant. Fig. 24.

Ducantur in planis PQ, TV rectæ BH, GD: [*ducatur*] item BG occurrens plano RS in F, junganturque FC, FI. Planum trianguli BGD ſecans parallela plana, facit ſectiones CF, DG (*b*) parallelas. Ergo eſt BC ad CD, ut (*c*) BF ad FG. Rurſum, triangulum BHG ſecans parallela plana, facit ſectiones (*d*) BH, FI parallelas. Ergo eſt HI ad IG, ut (*e*) BF ad FG; hoc eſt, (quod jam oſtendi,) ut BC ad CD. Quod erat demonſtrandum. (b) Per pr. (c) Per 2. l. 6. (d) Per prac. (e) Per 2. l. 6.

PROPOSITIO XVIII.

Si recta linea (FE) ſit ad planum (AB) recta, omnia, quæ per ipſam ducuntur plana, ſunt eidem plano (AB) recta. Fig. 25.

Ductum ſit per FE planum aliquod GC faciens cum AB ſectionem CD. In hoc ducantur HK normales ad CD ſectionem communem. Cùm igitur etiam (*f*) FE recta ſit ad CD; erunt KH (*g*) parallelæ ad FE. Sed FE ponitur recta plano AB. Ergo & HK rectæ (*h*) ſunt plano AB. Ergo GC planum (*i*) plano AB rectum eſt. (f) Per hyp. & def. n. 3. l. 11. (g) Per 29. l. 1. (h) Per 8. l. 11. (i) Per def. 4. l. 11.

PROPOSITIO XIX.

Si duo plana (MF, GD) ſe ſecantia, ſint ambo recta eidem plano (AB;) erit etiam communis illorum ſectio (KL) recta plano (AB.) Fig. 26.

Quoniam planum MF ponitur rectum plano AB; ex def. 4. patet ex puncto L poſſe in plano MF duci rectam perpendicularem plano AB, eam nempe quæ ex L eſſet in plano MF perpendicularis ad communem ſectionem EF. Similiter, quia planum GD ponitur perpendiculare ad AB, ex def. 4. patet in plano GD poſſe duci ex puncto L per-

(a) Per 13. l. 12. pendicularem plano. Sed ex puncto L tantùm (a) una poteſt duci perpendicularis plano AB. Ergo neceſſe eſt ut recta quæ ex L perpendicularis eſt plano AB, exiſtat in utroque plano MF & GD., ac proinde ſit ipſa planorum MF & GD communis ſectio LK. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XX.

Fig. 27. *SI angulus ſolidus (A) tribus planis angulis (BAC, CAD, DAB) continetur; horum duo quilibet reliquo ſunt majores.*

Si tres plani ſunt æquales; patet aſſertio: Si inæquales, maximus eſto BAD. Hic nihilominus minor eſt duobus reliquis. Ex maximo enim BAD abſcinde BAE parem BAC, fiantque æquales AC, AE. Per E ducatur recta occurrens ipſis AB, AD in B & D; junganturque BC, DC. Quoniam anguli (b) BAE, BAC æquales ſunt, & latera BA, AE æqualia lateribus BA, AC, etiam baſes BE, BC æquales (c) erunt. Quoniam verò BC, CD (d) majores ſunt quàm BD, ablatis æqualibus BE, BC, remanet CD major quàm ED. Sed latera EA, AD æquantur lateribus (e) CA, AD. Ergo angulus (f) CAD major eſt quàm EAD Cùm igitur BAC par ſit oſtenſus BAE. Erunt duo ſimul BAC, CAD majores toto BAD, Quod erat demonſtrandum.

(b) Per conſtr. (c) Per 4. l. 1. (d) Per 20. l. 1. (e) Per conſtr. (f) Per 25. l. 1.

PROPOSITIO XXI.

Fig. 28. *PLani anguli, ſolidum angulum quemcunque componentes, quatuor rectis ſunt minores.*

Eſto ſolidus angulus A. Planis angulis illum componentibus ſubtendantur rectæ BC, CD, DE, EF, FB in uno plano exiſtentes. Quo facto conſtituitur (g) pyramis, cujus baſis eſt polygonum BCDEF, vertex A, totque cincta triangulis G, H, I, K, L, quot plani anguli componunt ſolidum A. Jam verò quia duo anguli ABF, ABC (h) majores ſunt uno FBC, & duo ACB, ACD majores uno BCD, & ſic deinceps; erunt triangulorum G, H, I, K, L circa baſim anguli ſimul ſumpti, omnibus ſimul angulis baſeos B, C, D, E, F majores. Sed anguli baſeos unà cum quatuor rectis, faciunt bis tòt rectos (i) quot ſunt latera, ſive quot triangula.

(g) Vide def. 1. l. 12. (h) Per præc. (i) Per theor. 1. ſch. 1. & 32. l. 1.

gula. Ergo omnes triangulorum circa baſim anguli, unà cum quatuor rectis, conficiunt amplius quàm bis tot rectos quot ſunt triangula. Sed iidem anguli circa baſim, unà cum angulis qui componunt ſolidum, conficiunt bis (a) tot rectos quot ſunt triangula. Liquet ergo angulos ſolidum angulum A componentes, quatuor rectis eſſe minores. Quod erat demonſtrandum.

(a) *Patet ex* 32. *l.* 1.

Corollarium.

EX hac & præcedenti ſatis colligitur, ex tribus angulis planis, rectis quatuor minoribus, quorum duo quilibet reliquo ſint majores, ſolidum angulum conſtitui poſſe.

Scholium.

EX hac eàdem propoſitione demonſtratur celebre theorema, tres tantùm figuras planas ordinatas, & æquales, corpus ordinatum continere poſſe, nimirum æquilatera triangula vel 4. vel 8. vel 20. Quadrata 6. Pentagona 12. Ac proinde quinque tantùm ſunt ordinata, ſeu regularia corpora: Pyramis, quæ 4. Octaedrum quod 8. Icoſaedrum quod 20. æquilateris triangulis continetur; Cubus, qui 6. quadratis, Dodecaedrum quod 12. æqualibus pentagonis ordinatis comprehenditur. Porro corpus ordinatum dicitur, quod planis ordinatis & æqualibus continetur.

Demonſtr. Ex duobus æquilateris triangulis non poteſt conſtitui angulus ſolidus: ad hoc enim ſaltem (b) requiruntur tres.

(b) *Per def.* 10. *l.* 11.

A tribus triangulis æquilateris in unum punctum coeuntibus, poteſt conſtitui angulus ſolidus pyramidis; ex quatuor, angulus ſolidus octaedri; ex quinque, angulus ſolidus Icoſaedri; cùm æquilateri trianguli anguli tum 3 tum 4. tum 5. ſint 4 rectis minores, ut colligitur ex coroll. 12. p. 32. l. 1.

Quoniam verò tres anguli pentagonici (c) ſunt 4. rectis minores, poterunt tria pentagona in unùm punctum coeuntia conſtituere ſolidum angulum, nempe Dodecaedri.

(c) *Colligitur ex dem.* 1. *p.* 11. *l.* 4.

A tribus quadratis in unum punctum coeuntibus effici ſolidum angulum cubi, per ſe patet. Atque ita quinque exſurgunt regularia corpora.

Præter hæc nulla eſſe alia ſic oſtenditur.

Sex anguli trianguli æquilateri conficiunt 4. rectos. Unus

 enim

enim facit duas (*a*) tertias recti, ac proinde ſex tales efficient
(a) *Per cor.* 12. *p.* 32. *l.* 1. 12. tertias recti, hoc eſt rectos 4. Ergo, a ſex æquilateris triangulis non poterit effici ſolidus angulus, multò minùs a pluribus.

A quatuor quadratis, non poſſe conſtitui ſolidum angulum, ac multò minùs a pluribus, per ſe patet.

Anguli pentagonici 4. ſunt 4. rectis majores: Singuli enim
(b) *Per cor.* 1. *pr.* 11. *l.* 4. efficiunt 6. quintas (*b*) recti. Ergo a quatuor pentagonis nequit fieri angulus ſolidus, multò minùs a pluribus.

Nec ſane ex aliis figuris quibuſlibet ordinatis conſtitui poterit ſolidus angulus. Tres anguli hexagonici ſunt 4. rec-
(c) *Per cor.* 2. *p.* 15. *l.* 4. tis æquales. Unus enim (*c*) facit 4. tertias recti, ac proinde tres faciunt 12. tertias recti, hoc eſt 4. rectos. Ergo ex tribus hexagonis nequit conſtitui ſolidus angulus, multò minùs a pluribus.

Cùm verò tres anguli hexagonici ſint 4. rectis æquales; tres anguli figurarum quarumlibet hexagono majorum, ut heptagoni, octogoni, &c. 4. rectis majores erunt. Quare manifeſtum eſt reliquas figuras ordinatas omnes, eſſe ineptas ut ſolidum angulum conſtituant; adeoque præter jam dicta 5. nulla ordinata corpora dari poſſe.

PROPOSITIO XXII.

Fig. 29. SI fuerint tres anguli (A, B, C,) quorum duo quilibet reliquo ſint majores; comprehendant autem ipſos rectæ lineæ æquales (AD = AE = BF = BG = CH = CI;) fieri poteſt ut ex rectis DE, FG, HI) æquales illas jungentibus; triangulum conſtituatur.

Si rectæ jungentes fuerint æquales, patet ex iis triangulum conſtitui poſſe. Sint autem inæquales, & maxima ſit DE: ſi tamen DE minor fuerit duabus reliquis FG + HI; trian-
(d) *Per* 22. *l.* 1. *gulum ex illis conſtrui* (d) *poteſt. Eſt autem minor. Nam*
ſuper rectâ CH fiat angulus HCK ipſi B æqualis, ſitque CK =
(e) *Per* 4. *l.* 1. *CH, & jungantur KH, KI. Et propter rectas KC, CH rectis*
(f) *Per conſtr. FB, BG reſpectivè æquales, & ang. KCH = ang. B, erit* (e) *KH = FG. Et cùm ang. B + ang. HCI, hoc eſt,* (f) *ang.*
(g) *Per hyp. KCI major* (g) *ſit angulo A, latera autem KC, CI lateribus*
(h) *Per* 24. *l.* 1. *DA, AE æquentur reſpectivè; ergo baſis KI baſi DE major*
(i) *Per* 20. *l.* 1. (h) *eſt. Sed ſumma laterum KH + HI (hoc eſt, FG + HI) major eſt* (i) *quàm KI; & proinde multò major quàm DE. Ergo, &c.*

Scholium.

Scholium. *Sint tria triangula iſoſcelia ADE, BFG, CHI, quorum crura AD, AE, BF, BG, CH, CI ſint inter ſe æqualia, & anguli verticales A, B, C ſimul ſumpti ſint quatuor rectis minores, ita tamen ut duo quilibet reliquo ſint majores: a baſibus autem DE, FG, HI conſtituatur* (a) *triangulum LMN, ita ut ſit LM = DE, MN = FG, NL = HI; ſuper quibus concipiantur triangulorum iſoſcelium latera bina quævis contigua in unam rectam coaleſcere. nempe CI & AD in PL, AE & BF in PM, BG & CH in PN; & ab angulis planis A, B, C, formabitur angulus ſolidus P; & æquabuntur rectæ PL, PM, PN. His præmiſſis, ſi triangulo LMN* (b) *circumſcribatur circulus; perpendicularis PO ab angulo ſolido ad planum circuli demiſſa, in centrum cadet.* Fig. 29. 30. (a) Per hanc prop. & 22. l. 1. (b) Per 5. l. 1.

Ductis enim OL, OM, ON; in triangulis rectangulis OPL, OPM, OPN, erit (c) *PLq = POq + OLq, PMq = POq + OMq, PNq = POq + ONq. Si igitur a quadratorum* (d) *æqualium ſingulis PLq, PMq, PNq, auferatur POq, reſtabunt æqualia OLq, OMq, ONq; atque inde æquales erunt OL, OM, ON. Ergo circulus tranſiens per L, M, N, centrum* (e) *habet in O.* (c) Per 47. l. 1. (d) Per ax. 15. l. 1. (e) Per 9. l. 3.

Porro, manifeſta eſt propoſitionis veritas, ſive triangulum LMN fuerit acutangulum, ſeu rectangulum, ſeu denique obtuſangulum. Vide ſchol. p. 5. l. 4. & confer fig. 5, 6, 7. ejuſdem libri cum fig. 30. hujus.

Corol. ad Schol. præced. *Poſitis hujuſmodi triangulis iſoſcelis ADE, BFG, CHI; ſi ex eorum baſibus conſtituatur triangulum LMN; erit crurum æqualium quodvis AD (vel AE, vel BF, &c.) majus radio circuli circa triangulum LMN conſcripti. Nam AD =* (f) *PL; & in triangulo rectangulo OPL, latus PL angulo recto oppoſitum, majus* (g) *eſt quàm OL quod opponitur* (h) *acuto.* (f) Per conſtr. (g) Per 19. l. 1. (h) Per cor. 5. p. 32. l. 1.

PROPOSITIO XXIII

EX tribus angulis planis (A, B, C,) quorum duo quilibet reliquo ſunt (*i*) majores, angulum ſolidum (P) conſtituere. Oportet autem (*k*) tres illos angulos quatuor rectis minores eſſe. Fig. 29. 30. (i) Ex p. 20. l. 11. (k) Per 21. l. 11.

Fac omnia angulorum latera (nempe AD, AE, BF, BG, CH, CI) æqualia inter ſe. Junctis DE, FG, HI, conſtitue (l) *triangulum LMN (cujus latera LM, MN, NL, ipſis DE, FG, HI æquentur reſpectivè,) circa quod circulum* (m) *deſcribe, cujus radius ſit OL. Et cùm angulorum A, B, C latera ſingula radio OL* (n) *ſint majora; erit etiam ADq majus* (l) Per 22. l. 11. & 22. l. 1. (m) Per 5. l. 4. (n) Per cor. ad ſchol. præced.

quàm

(a) Per prob. 2. ſchol. p. 4. l. 1. *quàm OLq. Inveniatur* (a) *OP latus quadrati quo ADq excedit OLq, & a centro O erigatur* (b) *OP circuli plano recta, jungantúrque PL, PM, PN. Dico factum. Cùm enim angulus O in triangulo OPL rectus ſit; erit PLq* = (c) *POq* + *OLq* = (d) *ADq. & PL* = *AD. Eodem modo demonſtrabitur rectam PM ipſi AE æqualem eſſe: Et cùm ſit LM* = *DE, erit* (e) *ang. LPM* = *ang. A. Et ſimiliter oſtendetur eſſe ang. MPN* = *ang. B, & ang. NPL* = *ang. C. Factum eſt igitur quod petebatur.*]

(b) Per 12. l. 11.
(c) Per 47. l. 1.
(d) Per conſtr.
(e) Per 8. l. 1.

PROPOSITIO XXIV.

Fig. 31.

P*Lana parallelepidum continentia (1.) ſunt parallelogramma, (2.) quæ ex adverſo ſunt ſimilia, & (3.) æqualia.*

1. Pars. Planum AF ſecans plana BD, FH ex defin. 13. parallela, facit (*f*) ſectiones BA, FE parallelas. Rurſum planum AF ſecans plana AH, BG per defin. 13. parallela, facit (*g*) ſectiones AE, BF parallelas. Ergo BAEF parallelogrammum eſt. Simili argumento reliqua parallelepipedi plana ſunt parallelogramma.

(f) Per 16. l. 11.
(g) Per eand.

2. Pars. Quoniam ex primâ parte patet AB, BC parallelas eſſe EF, FG, erunt (*h*) anguli ABC, EFG pares. [*Ergo parallelogramma BD, FH ſunt* (i) *æquiangula.*] Quare cùm &, latera alternis ſunt (*k*) paria, [*hoc eſt, AB* = *EF, BC* = *FG, CD* = *GH, & DA* = *HE*;] ſimilia (*l*) ſunt parallelogramma adverſa BD, FH. Eodem modo probatur de cæteris oppoſitis.

(h) Per 10. l. 11.
(i) Per 27. & 34. l. 1.
(k) Per 34. l. 1.
(l) Per ſch. p. 7. l. 5. & def. 1. l. 6.

3. Pars patet ex primâ parte, & 4. vel 8. 1.

[*Junge AC, EG; & cùm in triangulis ABC, EFG, latera AB, BC lateribus EF, FG reſpectivè* (m) *æqualia ſint, & angulus ABC ſit angulo EFG* (n) *æqualis;* (o) *erit baſis AC baſi EG æqualis, & triangulum ABC triangulo EFG æquale. Cùm verò parallelogramma oppoſita BD, FH* (p) *ſint triangulorum illorum æqualium dupla, erunt etiam iſta æqualia. Et eodem modo probabitur duo quævis alia oppoſita parallelogramma æqualia eſſe.*]

(m) Per 34. l. 1.
(n) Per 10. l. 11.
(o) Per 4. l. 1.
(p) Per 34. l. 1.

Fig. 32.

Cor. [1. *Parallelepipedum (AB,) aut quodvis*] priſma ſectum plano (CD) adverſis planis (AS, RB) parallelo, ſectionem habet ſimilem & æqualem planis adverſis. [*Demonſtrabitur eodem modo quo pars ſecunda ac tertia hujus prop.*

Cor. 2. *Eâdem ſectione parallelogramma lateralia (AE, SF, &c.) dividentur in partes* (q) *parallelogrammas (AN & CF, SN & DE, &c.)* (r) *ſimiles partibus (SD, DB) in quas recta quævis lateralis (SB) eâdem ſectione dividitur.*

(q) Patet ex parte 1. hujus prop.
(r) Per 1. l. 6. & def. 7. l. 5.

Cor.

Cor. 3. *Et præterea, ſi ſolidum plano adverſis planis parallelo ſectum, fuerit parallelepipedum; partes parallelogramma ſibi invicem oppoſita, in quas dividuntur adverſa plana lateralia, erunt* (a) *ſimiles & æquales.*] (a) *Patet ex pat. 2. & 3. hujus prop.*

PROPOSITIO XXV.

SI *parallelepipedum* (*AB*,) *aut quodvis priſma, plano* (*CD*) *ſecetur adverſis planis parallelo; erit ut baſis* (*ED*) *ad baſim* (*DF*,) *ita ſolidum* (*AD*) *ad ſolidum* (*CB*.) *Fig. 32.*

Demonſtrabitur eodem modo quo 1. 6.

[*Dividatur recta DB in æquales quotcunque partes, v. gr. quatuor, DG, GH, HI, IB; & in baſi DF, per diviſionum puncta G, H, I, ducantur rectæ GK, HL, IM, baſeos DF lateribus oppoſitis DN, BF parallelæ, & baſis in quatuor* (b) *ſimilia &* (c) *æqualia parallelogramma dividetur, nempe DK, GL, HM, IF; per quorum latera GK, HL, IM, tranſeant plana GO, HP, IQ, ſolidi CB adverſis planis CD, RB parallela, & dividetur illud in quatuor ſolida DO, GP, HQ, IR, ſingula* (d) *ſimilibus & æqualibus numero & magnitudine planis comprehenſa, ac proinde* (e) *æqualia. Quare planum DK & ſolidum DO ſunt conſequentium DF & CB ſimiles* (f) *partes aliquotæ. Auferatur jam recta DG ex DS quoties poterit, puta bis, & relinquetur ST, ipſâ DG minor; & a diviſionum punctis V, T ducantur rectæ, baſeos ED lateribus oppoſitis ES, ND parallelæ, & per illas ducantur plana, adverſis ſolidi AD planis AS, CD parallela. Quoniam ſingula DV, VT ipſi DG æquales ſunt; erunt* (g) *etiam parallelogramma ſingula NV, VX parallelogrammo DK ſimilia & æqualia, & ſingula ſolida CV, VY ſolido DO* (*utpote quæ* (h) *ſimilibus & æqualibus multitudine & magnitudine planis cum illo continentur*) *etiam* (i) *æqualia. Sed propter rectam ST ipſâ DG minorem, erit baſis ET baſi DK minor* (k), *& ſolidum AT ſolido DO minus;* (*ſi enim utraque illorum ſolidorum ſuper æqualibus planis AS, CD, intra invicem collocari ſupponantur, propter ST minorem quàm DG, ſolidum AT parti ſolummodo ſolidi DO exæquabitur.*) *Quoties igitur planum DK continetur in antecedente DE, toties etiam ſolidum DO in antecedente DA continebitur. Et eodem modo oſtendi poteſt, quaſcunque conſequentium* (*baſeos DF, & ſolidi CB*) *ſimiles partes aliquotas, in antecedentibus* (*baſi ED, & ſolido AD*) *æquali numero contineri.* (l) *Ergo baſis ED erit ad baſem DF, ut ſolidum AD eſt ad ſolidum CB. Q. E. D.*

(b) *Per 27. l. 1. & ſch. p. 7. l. 5. cum def. 1. l. 6.*
(c) *Per 36. l. 1.*
(d) *Per 24. l. 11. cum corollariis.*
(e) *Per def. 15. l. 11.*
(f) *Per def. 7. l. 5.*
(g) *V. demonſtratas* (b, c.) *ſuprà.*
(h) *Per præc. cum corollariis.*
(i) *Per def. 15. l. 11.*
(k) *Per 1. l. 6.*
(l) *Per rationum æqualium inſcriptionem apud deff. l. 5.*

PRO-

PROPOSITIO XXVI.

Fig. 33. AD datam rectam lineam (AB,) & ad datum in ipſo punctum (A,) conſtituere angulum ſolidum (AHIL,) æqualem ſolido angulo dato (CDEF.)

Nota, literarum quæ deſignant angulum ſolidum, primam eſſe ad punctum in quo eſt angulus. Sic angulus ſolidus AHIL eſt ad punctum A, & CDEF ad punctum C.

(a) Per 11. l. 11. *A puncto quovis F in rectâ CF, demitte* (a) *FC plano DCE rectam, ducanturque recta DF, FE, EG, GD, GC. Fac AH* = *CD, & ang. HAI* = *ang. DCE, & AI* = *CE; atque in plano HAI, fac ang. HAK* = *ang. DCG, & AK* = *CG. Tum*
(b) Per 12. l. 11. *erige* (b) *KL rectam plano HAI, & ſit KL* = *GF, ducaturque AL. Erit angulus ſolidus AHIL par dato CDEF. Nam junctis HK, IK, HL, IL, propter HA, AK ipſis DC, CG reſpectivè*
(c) Per 4. l. 1. *æquales, & ang. HAK* = *ang. DCG, erit* (c) *HK* = *DG. Et eodem modo, conferendo triangula IAK, ECG, oſtendetur* (d) *KI*
(d) Per ax. 3. & p. 4. l. 1. = *GE; & in triang. HKL, DGF,* (e) *HL* = *DF; & in triang. IKL, EGF, IL* = *EF; & in triang. AKL, CGF, AL* = *CF.*
(e) Per def. 3. l. 11. & p. 4. l. 1. *Triangula igitur AHL, CDF ſunt ſibi mutuò æquilatera, & proinde* (f) *æquiangula. Unde ang. HAL* = *ang. DCF. Et ob eandem cauſam in triangulis ſibi mutuò æquilateris AIL, CEF,*
(f) Per 8. l. 1. *eſt ang. LAI* = *ang. FCE. Sed & ang. HAI* = *ang. DCE per conſtr. Factum eſt igitur quod petebatur.*

PROPOSITIO XXVII.

Fig. 34. A Datâ rectâ lineâ (AB,) dato ſolido parallelepipedo (CD) ſimile & ſimiliter poſitum parallelepipedum (AK) deſcribere.

Ex angulis planis BAH, HAI, BAI, qui æquales ſint ipſis
(g) Per præc. *FCE, ECG, FCG, fac* (g) *angulum ſolidum A angulo ſolido C parem. Item, ſit* (h) *FC : CE :: BA : AH, & CE : CG :: AH :*
(h) Per 12. l. 6. *AI, (& erit ex æquo* (i) *FC : CG :: BA : AI;) & perficiatur pa-*
(i) Per 22. l. 5. *rallelepipedum AK. Erit hoc ſimile dato.*
Nam per conſtr. parallelogramma BH, FE; & HI, EG; &
(k) Per 24. l. 11. *BI, FG ſimilia ſunt; & horum ideo oppoſita* (k) *illorum oppo-ſitis. Ergo ſex plana ſolidi AK ſimilia ſunt ſex planis ſolidi CD;*
(l) Per def. 9. l. 11. *ac proinde* (l) *AK, CD ſunt ſolida ſimilia.*

PRO-

PROPOSITIO XXVIII.

PLanum per adverſorum planorum diametros (AC, EG) tranſiens, parallelepipedum ſecat in duo æqualia priſmata. Fig. 32.

Quoniam (*a*) BG, BE ſunt parallelogramma; CG, AE æquidiſtant [*hoc eſt parallela ſunt*] eidem BF. Ergo & (*b*) inter ſe ſunt parallelæ, ac proinde in uno ſunt plano. Ergo rectæ AC, EG (*c*) in uno ſunt plano. Jam verò planum per illas ductum ſecare parallelepipedum in duo priſmata æqualia ſic oſtendo. (a) Per 24. l. 11. (b) Per 9. l. 11. (c) Per 7. l. 11.

Intelligatur priſma AEGCDH ſupra planum ſuum EACG ita conſtitui, ut anguli D, H vergant ad angulos B, F. Manifeſtum eſt tum adhuc fore inter parallela plana BADC, FEHG. Tum verò neceſſe eſt ut D cadat in B, H in F. Cadat enim D extra B ſi fieri poteſt, in N. Angulus BAC æquatur (*d*) angulo DCA. Sed DCA æquatur NAC, (eſt enim unus idemque angulus.) Ergo BAC & NAC æquales ſunt: quod eſt abſurdum. Ergo D incidit in B; & pari de causâ H in F. Ergo priſma AEGCDH congruit priſmati ACGEFB, ac proinde (*e*) æqualia ſunt. (d) Per 27. l. 1. (e) Per axio. 7.

[*Tacqueti demonſtratio parallelepipedis quidem rectis convenit, quorum ſcil. plana lateralia ſunt baſibus recta; & forte etiam ad unius aut alterius ſpeciei obliqua accommodari poteſt. Cùm verò in propp. ſeqq. hujus & proximi libri, ſupponatur hac demonſtratio parallelepipeda quomodocunque obliqua extendere: ad accuratius Euclidis ipſius ratiocinium hic neceſſariò recurrendum eſt, quo oſtenditur omnia omnino parallelepipeda quæ ſecantur a plano AG, per adverſorum planorum diametros parallelas AC, EG tranſeunte, in duo æqualia (addo, & ſimilia) priſmata ſecari.*

Eſt enim triangulum ABC triangulo ADC (f) *æquale, & (ob angulos æquales B* (g) *& D, BAC* (h) *& DCA, BCA & DAC) etiam* (i) *ſimile; & ob eandem cauſam triangula EFG, EHG ſunt æqualia & ſimilia. Æqualia etiam & ſimilia ſunt* (k) *parallelogramma ſibi invicem oppoſita AF & CH, itemque BG & AH; atque eſt AG utrique priſmati commune. Priſmata igitur ABCGEF, ADCGEH, continentur a ſimilibus & æqualibus multitudine & magnitudine planis, & proinde ſunt* (l) *ſimilia & æqualia. Q. E. D.*] (f) Per 34. l. 1. (g) Per eand. (h) Per 27. l. 1. (i) Per 4. l. 6. (k) Per 24. l. 11. (l) Per def. 15. l. 11.

PRO-

PROPOSITIO XXIX. & XXX.

Fig. 35. & 36. *Parallelepipeda (FEAGKIMC & FEBHLOMI) quæ eandem habent baſim (EFIM) & altitudinem eandem, ac proinde exiſtunt inter parallela plana (EFIM, GAOL,) æqualia ſunt.*

Vel enim exiſtunt inter lateralia parallela plana EAOM & FGLI, vel non. Eſto primum. Ex. 24. hujus, & 8. l. 1. patet triangula AEB, CMO, item GFH, KIL ſibi mutuò æquilatera & æquiangula eſſe. Quare ut in præcedenti, oſtendam priſmata CMOLIK, AEBHFG ſibi mutuò impoſita congruere, ac proinde (a) æqualia eſſe. Quare addito communi ſolido FEBHKCMI, tota parallelepipeda FEAGKIMC, FEBHLOMI æqualia erunt. Quod erat demonſtrandum.

Fig. 35. (a) Per axio. 7.

[Aliter. *In parallelogrammis AEMC, BEMO, latera oppoſita ſunt* (b) *æqualia, hoc eſt, AE = CM, BE = OM, AC = EM = BO; & ablatâ communi rectâ BC, AB = CO. Ergo triangula ABE, COM ſunt ſibi mutuò æquilatera, & proinde* (c) *æqualia, & eodem modo oſtendetur triangula FGH, IKL æqualia eſſe: Oppoſita autem parallelepipedorum plana ſunt* (d) *æqualia, nempe AF = CI, & BF = OI; & AK = EI = BL: unde ablato communi BK, erit AH = CL. Quare priſmata AEBHFG, CMOLIK a ſimilibus planis numero & magnitudine æqualibus continentur, & proinde* (e) *æqualia ſunt. Commune apponatur ſolidum cujus baſis eſt FM & planum oppoſitum BK, & tota parallelepipeda FEAGKIMC, FEBHLOMI æqualia erunt. Q. E. D.*]

(b) Per 34. l. 1. (c) Per 8. l. 1. (d) Per 24. l. 11. (e) Per def. 15. l. 11.

Fig. 36. Sit deinde parallelepipedum FXQEMIPR non inter eadem lateralia plana parallela exiſtens cum parallelepipedo FEAGKCMI. Quoniam ex hypotheſi GK, AC, RP, QX ſunt in uno plano ad baſim EFIM parallelo; RP, QX ſecent GK in L & H, AC verò in O & B; junganturque EB, MO, FH, IL. Facile oſtenſu eſt plana ſolidum FEBHLOMI continentia, parallelogramma eſſe ex adverſo æquidiſtantia. [*Nam adverſa plana quadrilatera ſolidi iſtius ſunt in iiſdem planis cum oppoſitis parallelepipedorum AFIC, QFIR planis, & proinde* (f) *parallela ſunt. Solidi enim BFIO quadrilatera oppoſita BEMO, HFIL ſunt reſpectivè in iiſdem planis cum oppoſitis ACME, GKIF planis parallelepipedi AFIC; & ejuſdem ſolidi BFIO quadrilatera oppoſita BEFH, MOLI ſunt in iiſdem planis reſpectivè cum oppoſitis*

(f) Per 24. l. 11.

oppoſitis planis QEFX, MIPR parallelepipedi QFIR: eſt verò parallelogrammum EI, ſolido cum parallelepipedis commune, & quadrilaterum BOLH eſt in plano ipſi EI parallelo per hypotheſim. Patet igitur ſolidum BFIO comprehendi a planis quadrilateris ex adverſo parallelis,] adeoque ſolidum illud (a) eſſe parallelepipedum. Sed huic per primam partem parallelepipeda FXQEMIPR, & FEAGKCMI, ſunt æqualia. Ergo etiam ſunt æqualia inter ſe. Quod erat dem. (a) *Per def.* 13. *l.* 11.

Scholium.

HÆC propoſitio ſimilis eſt propoſitioni 35. lib. 1. affirmat enim de ſolidis, quod illa de planis. Quare ſimilis etiam erit reliquorum caſuum demonſtratio.

PROPOSITIO XXXI.

Parallelepipeda ſuper æqualibus baſibus (AO & EG) & in eâdem altitudine (S) ſunt æqualia. *Fig.* 37.

Habeant parallelepipeda primo latera ad baſes normalia. Ad latus FG productum, fiat parallelogrammum GMKH æquale ac ſimile parallelogrammo AO: perfectoque parallelogrammo GMPR, rectæ PM, RG occurrant ipſi KH in Q & L. Jam verò intelligantur ſuper GK, GQ, GP conſtitui parallelepipeda, quorum latera ſint ad baſes recta, altitudo autem omnium communis ſit S. Solidum EGS eſt ad ſolidum GPS, ut EG (b) ad GP; hoc eſt, (quia EG, AO per hyp. æquantur,) ut AO ad GP; hoc eſt, per conſtr. ut GK ad GP; hoc eſt, ut (c) GQ ad GP; hoc eſt, (d) ut ſolidum GQS eſt ad idem ſolidum GPS. Quoniam igitur ſolida EGS & GQS eandem habent rationem ad ſolidum GPS, erit ſolidum EGS (e) æquale GQS; hoc eſt, ſolido (f) GKS; hoc eſt, (quia baſes GK, AO ſunt (g) æquales & ſimiles,) ſolido (h) AOS. Quod erat propoſitum. Per totum diſcurſum ſolida accipiuntur recta.

(b) *Per* 25. *l.* 11. (c) *Per* 35. *l.* 1. (d) *Per* 25. *l.* 11. (e) *Per* 9. *l.* 5. (f) *Per* 29. *l.* 11. (g) *Per conſtr.* (h) *Per def.* 15. *l.* 11.

Habeant deinde parallelepipeda data EGS, AOS latera ad baſes EG & AO obliqua. Fiant ſuper EG, AO parallelepipeda, quorum latera ſint ad baſes recta in altitudine S. Hæc æqualia erunt obliquis per 29. aut 30. Quare cùm parallelepipeda recta per primam partem ſint paria inter ſe, erunt & obliqua æqualia. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXII.

Fig. 38. *Parallelepipeda quævis æque alta, ſunt inter ſe ut baſes.*

Baſes ſint GO & A, [*& altitudo communis ſit K.*] Super CO fac (*a*) parallelogrammum OE par ipſi A, [*in angulo OCE æquali dato G.*]

(a) Per 44. *l.* 1.

Super BC, OE intelligantur erigi parallelepipeda in altitudine K: hæc igitur partes erunt unius parallelepipedi BEK. Ergo (*b*) parallelepipedum OEK eſt ad parallelepipedum BCK, ut baſis OE ad baſim BC; hoc (*c*) eſt, ut baſis A ad baſim BC. Sed quia baſes OE & A ſunt æquales, parallelepipeda OEK & AK (*d*) æqualia ſunt. Ergo etiam parallelepipedum AK eſt ad parallelepipedum BCK, ut baſis A ad baſim BC. Quod erat demonſtrandum.

(b) Per 25. *l.* 11. (c) Per *conſtruct.* (d) Per *præc.*

Scholium.

Quod hîc de parallelepipedis oſtenſum eſt, demonſtrabitur in libro 12. de pyramidibus prop. 6. de quibuſlibet priſmatibus in corollario 1. poſt prop. 9. de conis & cylindris prop. 11.

PROPOSITIO XXXIII.

Fig. 39. *Similia parallelepipeda (HA & CM) ſunt in triplicatâ ratione laterum homologorum (AB, BC.)*

Sint parallelepipeda AH, CM ſimilia. Ergo omnia ipſorum plana ſimilia (*e*) ſunt; adeoque AB ad BC (*f*) eſt ut EB ad BO; & ut FB ad BG, ſic EB ad BO. Inſuper & anguli (*g*) planorum æquales ſunt. Collocentur ſic igitur ſolida AH, CM, ut æquales anguli CBO, ABE ſint oppoſiti [*in eodem plano*] & latera AB, CB in directum; tum verò etiam (*h*) EB, OB [*itemque FB, BG.*] in directum erunt. Cogitentur jam ſuper planis EC & CO facta ſolida, ſic ut ſolida KB, HA ſint unum parallelepipedum, & KB, PO faciant unum ſimiliter parallelepipedum, & PO, CM unum quoque parallelepipedum conficiant. Solidum HA eſt ad ſolidum KB (*i*) ut AE ad EC; hoc eſt, ut (*k*) AB ad BC; hoc eſt, (ut per hyp. oſtendi ſupra,) ut EB ad BO; hoc (*l*) eſt, ut EC

(e) Per def. 9. *l.* 11. (f) Per def. 1. *l.* 6. (g) Per *eand.* (h) Patet ex 13. & 14. *l.* 1. (i) Per 25. *l.* 11. (k) Per 1. *l.* 6. (l) Per *eand.*

E C ad CO; hoc eſt, ut ſolidum (*a*) idem KB ad ſolidum PO. Continuant ergo eandem rationem tria ſolida HA, KB, PO. Jam verò ſolidum KB eſt ad ſolidum PO, ut baſis EC ad baſim CO; hoc eſt, ut EB ad BO; hoc eſt, ut (*b*) FB ad BG; hoc eſt, ut planum FC ad planum CG; hoc eſt, ut idem rurſus ſolidum PO ad CM ſolidum. Quatuor ergo ſolida HA, KB, PO, CM, ſunt continuè proportionalia. Ergo ratio primi HA ad quartum CM eſt (*c*) triplicata rationis primi HA ad KB ſecundum; hoc eſt, rationis (*d*) AE ad EC; hoc eſt, (*e*) rationis homologorum laterum AB ad BC. Quod erat demonſtrandum.

[Aliter. *Similium parallelepipedorum HA, QS, ſint latera homologa AB & RS, EB & TS, FB & VS. Dico ſolidum HA eſſe ad ſolidum QS in triplicatâ ratione AB ad RS.*

Producantur AB, EB, FB ad C, O, G, ut ſint BC, BO, BG rectis RS, TS, VS reſpectivè æquales; & compleatur parallelogrammum CO, & parallelepipedum CM. Et propter ang. OBC = (f) *ang. ABE* = (g) *ang. RST, & latera BC, OB lateribus RS, TS reſpectivè* (h) *æqualia, parallelogramma OC, RT erunt ſimilia &* (i) *æqualia. Eodem modo ſimilia & æqualia erunt parallelogramma CG, RV; atque etiam OG, TV: unde & his oppoſita parallelogramma, (nempe bina qualibet, planis ſimilibus & æqualibus oppoſita in utroque ſolido)* (k) *ſimilia & æqualia erunt. Sunt* (l) *igitur ſolida QS, CM ſimilia & æqualia; ac proinde* (m) *ſolida HA, CM ſimilia erunt, & AB:BC :: EB:BO :: FB:BG. Super baſibus EC, CO perficiantur parallelepipeda BK, PO ejuſdem altitudinis cum AH. Erit itaque AB: BC vel* (n) *RS :: EB: BO vel ST :: FB: BG vel SV; hoc eſt,* (o) *AE: EC :: EC: CO :: FC: CG; hoc eſt,* (p) *AH: BK :: BK: PO :: PO: CM vel QS. Ergo* (q) *AH eſt ad QS in triplicatâ ratione AH ad BK. Sed AH: BK ::* (r) *AE: EC ::* (ſ) *AB: BC vel RS. Ergo* (t) *ſolidum AH eſt ad ſimile ſolidum QS in triplicatâ ratione lateris AB ad ſibi homologum latus RS. Q. E. D.*

Cor. 1. *Hinc ſi fuerint quatuor lineæ rectæ continuè proportionales; ut eſt prima ad quartam, ita eſt parallelepipedum ſuper primâ deſcriptum, ad parallelepipedum ſimile ſimiliterque deſcriptum ſuper ſecundâ; & proinde datis parallelepipedorum ſimilium HA, CM, lateribus homologis AB, BC, invenietur illorum ad invicem proportio, faciendo AB, BC, X, Y ∺. Erit enim HA: CM :: AB: Y. Quare etiam, datis ſolidis HA, CM, & ipſius HA latere quovis AB; alterius ſolidi latus homologum BC erit duorum mediorum* (u) *proportionalium prius inter AB & Y.*]

Cor. 2. *Hinc corrigendus eſt eorum error, qui ſolido-*

(a) *Per* 25. *l.* 11.
(b) *Oſtendi ſupra ex hyp.*
(c) *Per def.* 10. *l.* 5.
(d) *Per* 25. *l.* 11.
(e) *Per* 1. *l.* 6.
Fig. 39. & 40.
(f) *Per* 15. *l.* 1.
(g) *Per hyp. & def.* 1. *l.* 6.
(h) *Per conſtr.*
(i) *Per axio.* 7.
(k) *Per* 24. *l.* 11.
(l) *Per def.* 15. *l.* 11.
(m) *Per hyp. & def.* 9. *l.* 11.
(n) *Per conſtr.*
(o) *Per* 1. *l.* 6.
(p) *Per* 25. *l.* 11.
(q) *Per def.* 10. *l.* 5.
(r) *Per* 25. *l.* 11.
(ſ) *Per* 1. *l.* 6.
(t) *Per* 11. *l.* 5.
(u) *Vide p.* 13. *l.* 6.

rum ſimilium eandem ac laterum eſſe rationem opinantur. Linea enim dupla cubus non eſt tantùm duplus, ſed octuplus cubi alterius. Et linea tripla cubus non eſt tantùm triplus, ſed vigecuplus ſeptuplus cubi alterius. Nam 1, 2, 4, 8 $\div\!\!\div$ *&* 1, 3, 9, 27 $\div\!\!\div$. *Et ita de corporibus quibuſcunque ſimilibus eſt cenſendum; uti deinceps patebit.*

Cor. 3. *Hinc quoque pendet celeberrimum illud de cubo duplicando Problema: de quo infra, ad calcem lib.* 12. *Ubi etiam oſtendetur, quâ methodo cubi, vel corpora quævis ſimilia, in datâ ratione augeri vel diminui poſſunt.*

[Scholium. 1. *Cùm cubi ſint ſimilia ſolida parallelepipeda, & proinde ſint in triplicatâ ratione laterum ſuorum; inde fit ut ratio triplicata quantitatum quarumvis, per rationem cuborum earundem quantitatum ſæpiſſimè deſignari ſolet. Sic ex. gr. ratio triplicata rationis A ad B, ſæpe denominatur ratio A*cub. *ad B*cub. *vel A*c *ad B*c.]

Scholium. 2.

QUod hîc de parallelepipedis oſtenſum eſt, in libro 12. demonſtrabitur de pyramidibus propoſ. 8. de quibuſlibet priſmatibus coroll. 2. poſt p. 9. de conis & cylindris p. 12. de ſphæris p. 18.

PROPOSITIO XXXIV.

Fig. 40.

SI parallelepipeda (QS, CK) æqualia ſunt; reciprocant baſes & altitudines, (hoc eſt, baſis RT eſt ad baſim FK, ut reciprocè altitudo FC ad altitudinem SV.)

Et ſi reciprocant baſes & altitudines, æqualia ſunt.

1. Pars. Sint primò latera ad baſes recta. Si jam ſolidorum QS, CK altitudines ſint pares, res patet. [*Nam propter æquales altitudines,* (a) *erunt parallelepipeda ut baſes: atqui iſta* (b) *ſunt æqualia; ergo & baſes erunt æquales, & proinde eadem eſt ratio æqualitatis inter altitudinem parallelepipedi prioris & altitudinem poſterioris, ac inter baſem poſterioris & baſem prioris.*

(a) *Per* 32. *l.* 11. (b) *Per hyp.*

Si altitudines ſint inæquales, a majori FC, abſcinde FE parem SV: & per E duc planum EL ad FK parallelum. Baſis RT eſt ad baſim FK, ut ſolidum (*c*) QS ad ſolidum EK; hoc eſt, (quod ex hyp. paria ſint ſolida QS, CK,) ut ſolidum CK ad EK ſolidum; hoc eſt, ut (*d*) CG ad EG; hoc eſt, ut (*e*) CF ad EF; hoc eſt, ex conſtr. ut CF reciprocè ad VS. Quod erat demonſt.

(c) *Per* 32 *l.* 11. (d) *Per* 25. *l.* 11. (e) *Per* 1. *l.* 6.

Sint

Sint deinde latera ad baſes obliqua. Erigantur ſuper iiſdem baſibus in altitudine eâdem parallelepipeda recta. Erunt his obliqua (*a*) parallelepipeda æqualia. Quare cùm hæc per 1. partem reciprocent baſes & altitudines, etiam illa reciprocabunt. Quod erat demonſtrandum. (a) *Per* 30. *l.* 11.

2. Pars. [*Sint latera ad baſes recta, & altitudines æquales. Cùm igitur baſes & altitudines jam ponantur reciprocæ; ob harum æqualitatem, æquabuntur & illæ; ac* (b) *proinde ipſa etiam parallelepipeda.* (b) *Per* 31. *l.* 11.

Deinde,] ſint altitudines inæquales, lateraque ad baſes recta; & ex majori CF, ipſi VS ſume parem EF. Solidum QS eſt ad ſolidum EK, ut (*c*) RT ad FK; hoc eſt, ex hyp. ut CF ad VS; hoc eſt, ex conſtr. ut CF ad EF; hoc eſt, ut (*d*) CG ad EG; hoc eſt, ut ſolidum (*e*) GK ad ſolidum idem EK. Ergo ſolida QS & CK eandem habent rationem ad EK. Ergo ſunt paria. Quod erat demonſtrandum. (c) *Per* 32. *l.* 11. (d) *Per* 1. *l.* 6. (e) *Per* 25. *l.* 11.

[*Et cùm parallelepipeda obliqua ſint rectis æque altis & ſuper iiſdem baſibus* (f) *æqualia; illa etiam, ſi reciprocant baſes & altitudines, æqualia ſunt.*] (f) *Per* 30. *l.* 11.

Corollaria.

QUÆ de parallelepipedis demonſtrata ſunt Prop. 29, 30, 31, 32, 33, 34. etiam conveniunt priſmatis triangularibus, quæ ſunt dimidia parallelepipeda, ut patet ex p. 28. Igitur,

1. Priſmata triangularia æquè alta ſunt ut baſes A, B. [*Et proinde, ſi eandem vel æquales habeant baſes, & eandem altitudinem, æqualia ſunt.*] *Fig.* 41.

2. Si ſimilia fuerint, eorum proportio triplicata eſt proportionis laterum æqualibus angulis oppoſitorum. [*Et proinde corollaria prop.* 33. *ad illa applicari poſſunt.*]

3. Si æqualia ſunt, reciprocant baſes & altitudines: & ſi reciprocant baſes & altitudines, æqualia ſunt.

Scholium.

QUod hîc propoſ. 34. oſtenſum eſt de parallelepipedis, demonſtrabitur in libro 12. de pyramidibus p. 9. de priſmatis quibuſcunque coroll. 3. poſt p. 9. de conis & cylindris p. 15.

PROPOSITIO XXXV.

V*Alde prolixa, ſervit ſequenti, quam ſine illâ demonſtrabimus.*

PROPOSITIO XXXVI.

Fig. 42. *Parallelepipedum (DH) ex tribus rectis proportionalibus (A, B, C) factum, æquatur parallelepipedo (IN) facto a mediâ (B) & æquiangulo priori.*

Parallelepipedi DH baſis FD habeat latus EF æquale A, & latus alterum ED æquale C: latus verò EG baſi inſiſtens, æquale mediæ B. Erit parallelepipedum DH factum ex tribus rectis A, B, C. Parallelepipedi deinde IN tria latera LX, IX, XM (ac proinde omnia reliqua) ſint æqualia mediæ B; & angulus ſolidus X ſit æqualis angulo ſolido E. Erit parallelepipedum IN factum ex mediâ B, & priori æquiangulum. Dico etiam eſſe æquale.

Cùm enim per hyp. & conſtr. ſit ut FE ad LX: ita reciprocè IX ad DE, erunt (*a*) baſes DF, IL æquales. Jam quia anguli ſolidi ad E & X ſunt æquales; ſi ponantur intra invicem, (*b*) congruent; & ob æqualitatem rectarum EG, XM, puncta M, G coincident. Quare una erit utriuſque ſolidi altitudo perpendicularis, nempe a punctis M, G jam congruentibus, in planum baſeos demiſſa. Solida (*c*) igitur DH, IN æqualia ſunt. Quod erat demonſtrandum.

(a) *Per* 14. *l.* 6.
(b) *Per def.* 11. *l.* 11.
(c) *Per* 31. *l.* 11.

Scholium.

HIC porro obſervabimus, id quod magnum habet uſum, ex tribus lineis quomodocunque inter ſe (*d*) ductis, ejuſdem magnitudinis ſolidum [*parallelepipedum rectum, ſeu planis rectangulis comprehenſum*] gigni.

(d) *Vide ſch.* 1. *p.* 40. *l.* 11.

ABC. CAB. BCA.
1 2 3

In ſchemate hic appoſito, duæ primæ literæ deſignant baſim; tertia altitudinem. Comparemus primum cum ſecundo.

Baſis AB eſt ad baſim CA per 1. 6. ut B latus ad C latus: hoc eſt, reciprocè ut B altitudo ad C altitudinem. Ergo per p. 34.

ABC æ. CAB.

Eodem modo oſtendes primum tertio, & tertium ſecundo eſſe æqualia.

PROPOSITIO XXXVII.

Parallelepipeda ſimilia, ſimiliterque a lineis proportionalibus deſcripta, etiam ipſa ſunt proportionalia: & e converſo.

Patet

Patet ex 34. l. 5. Rationes enim parallelepipedorum, per 33. hujus, erunt triplicatæ rationum ex hyp. æqualium, quas habent lineæ.

Converſa patet ex. 35. l. 5. [*Rationes enim parallelepipedorum ex hypotheſi æquales, (a) triplicatæ ſunt rationum homologorum laterum, à quibus parallelepipeda ſimilia ſimiliter deſcribuntur: & proinde horum laterum rationes (b) erunt æquales.*] (a) Per 33. l. 11. (b) Per 35. l. 5.

Propoſitio vera eſt de quibuſcunque ſimilibus corporibus, quæ patebit l. 12. triplicatam habere laterum rationem.

[Corol. *Hinc deducitur ratio multiplicandi & dividendi radices cubicas. Si nempe multiplicentur inter ſe quantitates quæ ſub radicis cubicæ ſignis ſunt, & producto præfigatur ejuſdem radicis cubicæ ſignum; habebitur datarum radicum cubicarum productum. Exempli gr. ſit* √ c5 *multiplicanda in* √ c4: *producetur* √ c20. *Nam ex multiplicationis definitione, debet eſſe unitas ad multiplicantem (ſive* √ c4.) *ut eſt multiplicandus (ſeu* √ c5) *ad productum. Ergo per hanc prop. erit cubus unitatis ad cubum multiplicantis, ut cubus multiplicandi eſt ad cubum producti: hoc eſt, ſi pro numero producto ponatur P, erit* 1.4 :: 5. Pc. *Sed* 1.4 :: 5.20. *Ergo* Pc = 20, *&* P = √ c20.

Et ſimiliter, ex diviſionis definitione oſtendetur, quòd √ c20 *diviſa* √ c5 *exhibebit quotum* = √ c4. *Vide cor. 1. p. 22. l. 6.*

Et univerſaliter, quantitatum radicalium ejuſdem cujuſvis ordinis ſive ſpeciei, facta (vel quoti) habentur, multiplicando (vel dividendo) quantitates quæ ſub ſignis radicalibus ſunt, & producto (vel quoto) idem ſignum radicale præfigendo.

Propoſitionem 38. jam ſupra demonſtravimus, in ſchol. p. 13. hujus l. 11. Sequitur

PROPOSITIO XXXIX.

SI ſolidi parallelepipedi (AB,) eorum quæ ex adverſo planorum (AC, DB) latera, (nempe AE, FC, AF, EC; & DH, GB, DG, HB) bifariam ſecta ſint: per ſectiones autem plana (ILQO, PKMR) ſint extenſa; planorum communis ſectio (ST,) & ſolidi parallelepipedi diameter (AB,) bifariam ſe mutuò ſecabunt. Fig. 43.

Ducantur rectæ SA, SC, TD, TB. Et propter biſectas DG, HB, DH, GB, ac rectam RP ipſis DG, HB, rectamque OQ

ipſis DH, GB (a) *parallelam; dividetur parallelogrammum GH in quatuor æqualia parallelogramma, toti & ſibi invicem* (b) *ſimilia & ſimiliter poſita. Quare OR, PQ ſibi mutuò impoſita congruent, & DT* = (c) *TB. Parallelogramma etiam OR, PQ, angulos ODR, PBQ cum ſimili ſibi ipſis parallelogrammo GH communes habentia, circa eandem diametrum* (d) *exiſtunt, & proinde DTB eſt* (e) *linea recta. Eodem modo ASC recta linea eſt, & AS* = *SC. Porro, AD parallela & æqualis eſt* (f) *ipſi FG, atque FG parallela & æqualis eſt ipſi CB: ergo* (g) *AD, CB ſunt parallelæ & æquales; unde & AC, DB, quæ eas jungunt, ſunt* (h) *parallelæ & æquales, ac proinde earum dimidia AS, BT æquales erunt; & præterea AB, ST ſunt in* (i) *eodem plano ACBD. In triangulis itaque ASV, BTV, propter angulos AVS, BVT ad verticem oppoſitos, & proinde* (k) *æquales, & angulos alternos ASV, BTV; & proinde* (l) *æquales; & latera AS, BT æqualia; omnia reliqua erunt* (m) *æqualia, & SV* = *VT, & AV* = *VB. Ergo communis ſectio ST & diameter AB ſe mutuò bifariam ſecant. Q. E. D.*

Corol. *Hinc in omni parallelepipedo, diametri omnes ſe mutuò bifariam ſecabunt in uno eodemque puncto V.*]

(a) Per 33. l. 1. (b) Per 27. & 34. l. 1. cum def. 1. l. 6. (c) Per axio. 7. l. 1. (d) Per 26. l. 6. (e) Per def. 37. l. 1. (f) Per 24. l. 11. & 34. l. 1. (g) Per 9. l. 11. & axio 1. (h) Per 33. l. 1. (i) Per cor. p. 7. l. 11. (k) Per 15. l. 1. (l) Per 27. l. 1. (m) Per 26. l. 1.

PROPOSITIO XL.

Fig. 44. & 45.

SI fuerint duo priſmata triangularia æqualis altitudinis (ABFGOC & IKLPXQ,) quorum unum baſim habeat parallelogrammam (OB) duplam baſeos alterius (IKL) quæ triangula ſit; priſmata erunt æqualia.

Nam ſi perficiantur parallelepipeda KR & CH, erunt hæc (*n*) æqualia, ob baſium CA, MK, & altitudinum æqualitatem. Ergo etiam priſmata ipſorum (*o*) dimidia æqualia erunt. Quod erat demonſtrandum.

(n) Per 31. l. 11. (o) Per 28. l. 11.

[*Sunt nempe hæc duo priſmata triangularia, æqualium parallelepipedorum per diagonales ſectorum dimidia. Hoc tantùm intereſt, quòd in poſteriore ſectio fit per baſeos diagonalem, in priore non item.*]

Scholium 1.

EX hactenus demonſtratis habetur dimenſio priſmatum triangularium, & [*ejuſmodi*] quadrangularium [*quarum adverſa plana quadrangularia quacunque ſunt parallela,*] ſeu parallelepipedorum, ſi nimirum altitudo ducatur in baſim. Ut ſi altitudo ſit 10. pedum, baſis verò pedum

qua-

quadratorum 100. (menſurabitur autem baſis per ſchol. p. 36. vel 41. l. 1.) multiplica 10. per 100. proveniunt 1000. pedes cubici pro ſoliditate priſmatis dati.

Demonſtratio facilis eſt. Nam quemadmodum rectangulum, ita & parallelepipedum rectum producitur ex altitudine ductâ in baſim. Ergo etiam quodvis parallelepipedum producitur ex altitudine in baſim ductâ, cùm per 31. æquale ſit parallelepipedo recto ſuper eâdem baſi ad eandem altitudinem conſtituto.

Deinde cùm totum parallelepipedum producitur ex altitudine in totam baſim; ſemiſſis parallelepipedi, (hoc eſt, priſma triangulare, per 28.) producètur ex altitudine ductâ in dimidiam baſim, triangulum nempe ILK. *Fig.* 45.

[Scholium 2. *Cùm priſmata polygona in triangularia reſolvi poſſint, vel etiam ad triangularia æqualis baſeos & altitudinis* (a) *reduci; quæ igitur de priſmatis triangularibus traduntur in corollariis p.* 34. *& in ſchol.* 1. *pr. hujus* 40. *de quibuſcunque priſmatis polygonis vera ſunt. At cùm Tacqueto viſum fuerit illa omnia ex iis quæ in lib.* 12. *de pyramidibus demonſtrantur, derivare; non opus eſt ut eadem hic aliunde deducendo, tyronibus moram injiceremus.*]

(a) Per 25. *l.* 6.

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ

LIBER DUODECIMUS,

NOBIS OCTAVUS.

QUOD in libris præcedentibus hactenus præſtare conati ſumus, ut Mathematum elementa ad faciliorem ac breviorem methodum revocaremus; id imprimis præſtandum erit in hoc libro duodecimo, cujus doctrina cùm maximè ſit neceſſaria, demonſtrationes adeo ſunt prolixæ, ut tyrones in deſperationem plerumque conjiciant. Huic incommodo ita mederi propoſitum nobis eſt; ut tamen a rigore Geometricæ demonſtrationis non recedamus. Quod utrùm ſimus aſſecuti, lector intelliget, ſi hæc noſtra cum Euclideâ prolixitate contulerit.

Poſtquam verò Euclides libro priore ſolidorum elementa expoſuiſſet, & corporum facillimorum, utpote ſuperficiebus planis terminatorum, menſuras definiviſſet; in Duodecimo *hoc libro corpora ſuperficiebus curvis terminata, Cylindros nimirum, Conos atque Sphæras conſiderat: ea inter ſe comparat: & eorum menſuras definit. Utiliſſimus ſane eſt hic liber; eo quòd principia illa contineat quibus tot celeberrimas demonſtrationes de Cylindro, Cono atque Sphærâ Geometrarum Principes, præſertim verò Archimedes, inædificarunt.*

DEFINITIONES.

Fig. 1. Tab. 12. 1. PYramis eſt ſolidum (ZL) triangulis (ALC, CLF, FLB, BLA) comprehenſum, ab uno plano (Z) ad unum punctum (L) conſtitutis.

Planum Z baſis dicitur, & eſſe poteſt vel triangulum, vel quadrangulum, vel quævis alia figura [*rectilinea;*] ex cujus lateribus ſingulis triangula ſurgunt, in unum punctum L, quod vertex dicitur, coeuntia.

Ut

Ut triangulum inter rectilineas figuras planas, ita pyramis [*triangularis, quæ pro baſi triangulum habet,*] inter ſolidas prima & ſimpliciſſima eſt.

2. Si extra planum alicujus circuli (CL) acceptum fuerit punctum (A,) ab eoque ducatur recta infinita (AF) tangens circulum in C; quæ puncto (A) manente fixo, circa peripheriam circuli convertatur, donec in eum locum (ACF) redeat, unde moveri cœperat; ſuperficies, a rectâ lineâ (ACF) deſcripta, dicitur conica ſuperficies: corpus verò quod hac ſuperficie & circulo (CL) continetur, conus vocatur. *Fig. 2. & 3.*

Vertex coni eſt A.

Baſis coni eſt circulus CL.

Axis coni eſt recta (AB) ex vertice ad baſeos centrum ducta.

Latus coni eſt recta (AC) a vertice ad baſeos circumferentiam ducta, quam eſſe totam in coni ſuperficie, ex ejus geneſi eſt manifeſtum.

Conus rectus eſt, cùm axis (AB) eſt baſi rectus. *Fig. 2.*

Conus ſcalenus, ſeu obliquus eſt, cùm axis (AB) non eſt ad baſim rectus. *Fig. 3.*

Fit etiam conus rectus a triangulo rectangulo (CBA) circa unum latus perpendiculare (AB) in orbem ducto. *Fig. 2.*

3. Si circa duos circulos æquales & parallelos (CL, OQ,) recta linea infinita (COF) convertatur, donec in locum redeat, unde moveri cœpit, ſic ut mota ſibi ipſi [*& rectæ BA circulorum centra jungenti*] ſemper parallela maneat; ſuperficies a rectâ (COF) deſcripta, dicitur cylindrica ſuperficies: corpus verò quod hac ſuperficie & binis circulis continetur, cylindrus vocatur. *Fig. 4. & 5.*

Baſes cylindri ſunt circuli (CL, OQ.)

Axis cylindri eſt recta (AB) baſium centra connectens.

Latus cylindri eſt recta (OC) in cylindri ſuperficie utramque baſim tangens.

Rectus cylindrus eſt, cùm axis ad baſes rectus eſt. *Fig. 4.*

Scalenus cylindrus dicitur, cùm axis ad baſes non eſt rectus. *Fig. 5.*

Fit etiam cylindrus rectus a rectangulo (OCBA) circa unum latus (BA) in orbem ducto. *Fig. 4.*

4. Similes coni & cylindri ſunt, quorum axes (AK, ZO) & baſium diametri (BF, QR) ſunt proportionales; [*& quorum axes vel ſunt baſibus recti, vel iiſdem ſimiliter inclinati.*] *Fig. 24. & 25.*

5. Sphæra eſt ſolidum comprehenſum unâ ſuperficie, ad quam omnes rectæ lineæ a quodam puncto intra ipſam poſito ductæ, ſunt æquales.

Punctum

Punctum illud centrum dicitur.

Sphæræ diameter eſt recta per centrum ducta ad ſuperficiem utrimque pertingens.

Fig. 6. Generatur ſphæra, ſi ſemicirculus circa diametrum (AF) immotam convertatur.

6. Magnitudines figuræ alicui inſcriptæ, aut circumſcriptæ, ſive figurâ minores vel majores, in figuram deſinere dicuntur, cùm ab eâ tandem differre poſſunt quantitate minori quacunque datâ, ſeu quantumvis parvâ.

Itaque ſi ea, quæ figuræ alicui inſcribuntur, ab eâ tandem deficiant defectu minori quocunque dato; inſcripta dicentur in figuram deſinere: Et ſi ea quæ alicui figuræ circumſcribuntur, excedant eam tandem exceſſu minori quocunque dato; dicentur rurſum circumſcripta deſinere in figuram.

Fig. 9. [7. *Si fiat triangulum BAC in ſemicirculo BDLC, & ſuper lateribus BA, AC pro diametris, ducantur ſemicirculi minores BNA, AMC; figura curvilinea BDAN, ALCM, ſemiperipheriâ circuli minoris exteriùs, & arcu circuli majoris interiùs, ſingula terminata, ab earum inventore*, Lunulæ conjugatæ Hippocratis Chii *appellantur.*

Fig. 10. *Si arcus BDA, ALC ſint æquales, ac proinde quadrantes ſint peripheriæ majoris circuli, denominentur ejuſmodi lunulæ* quadrantales.

Fig. 11. *Si recta ED arcus lunulæ quadrantalis proportionaliter ſecet in E, D, ut ſit arcus BE ad arcum EA, ut arcus BD ad arcum DA, vocentur areæ AED, BED* portiones lunulæ quadrantalis.

8. *Lunula, vel ejuſdem portio* quadrari *dicitur, ſi ei æqualis figura rectilinea conſtrui poſſit.*]

PROPOSITIO PRIMA.

Fig. 6. & 7. *Polygonorum ſimilium circulis inſcriptorum proportio eſt duplicata proportionis diametrorum (AF, IC;)* [atque adeo etiam ſemidiametrorum (AZ; IX.)]

Ducantur AO, FB; IR, LC. Quia polygona ponuntur ſimilia, æquales erunt (*a*) anguli OBA, RLI, & latera OB, BA, proportionalia lateribus RL, LI. Ergo in triangulis OAB, RIL, (*b*) anguli O & R æquantur. Ergo etiam BFA & LCI, qui iiſdem arcubus BA, LI inſiſtunt, ſunt (*c*) æquales. Anguli verò FBA, CLI in ſemicirculis ſunt (*a*) rec-

(a) *Per def.* 2. *l.* 6.
(b) *Per* 6. *l.* 6.
(c) *Per* 21. *l.* 3.

(*a*) recti, ac proinde æquales. Ergo reliqui BAF, LIC (*b*) æquantur. Quoniam igitur triangula FAB, CIL ſibi mutuò æquiangula ſunt, erunt (*c*) ſimilia; eritque BA ad LI, ut AF ad IC. Jam quia per hyp. polygona ſunt ſimilia, erit proportio eorum duplicata (*d*) proportionis laterum BA, LI; hoc eſt, ut jam oſtendi, duplicata proportionis diametrorum AF, IC, [*ac proinde* (e) *etiam ſemidiametrorum AZ, IX.*] Quod erat demonſtrandum. (a) Per 31. l. 3. (b) Per cor. 9. p. 32. l. 1. (c) Per 4. l. 6. (d) Per 20. l. 6. (e) Per 15. l. 5.

Corollaria.

1. POlygonorum ſimilium circulis inſcriptorum ambitus ſunt inter ſe ut diametri. Fig. 6. & 7.

Cùm oſtenſum jam ſit AB eſſe ad LI, ut AF ad IC; etiam OB erit ad RL, ut AF ad IC: & ſic de cæteris lateribus. Ergo per 12. 5. omnia ſimul latera ad ſimul omnia, (hoc eſt ambitus ad ambitum) ſunt ut AF ad IC.

[2. *Figurarum rectilinearum ſimilium circulis inſcriptarum, latera homologa ſunt inter ſe ut circulorum diametri.*]

Lemma.

POlygona circulo inſcripta in circulum deſinunt. Fig. 8.

Inſcribe quadratum ACBD. Cùm hoc dimidium ſit quadrati (*f*) circulo conſcripti, erit majus dimidio circuli. Quare ſi hoc auferatur è circulo, auferetur plus quàm dimidium. Deinde ſingulis arcubus biſectis in E, K, I, H, inſcribe octogonum: & in E tangat FG, cui BC, DA occurrant in G & F: erit CF (*g*) parallelogrammum, cujus cùm dimidium ſit triangulum (*h*) CEA, erit hoc plus quàm dimidium ſegmenti CEA. Eodem modo ſingula triangula AKD, DIB, &c. ſingulorum ſegmentorum plus ſunt quàm dimidia. Ergo omnia triangula omnium ſegmentorum plus quàm dimidia ſunt. Hæc ergo [*triangula*] ſi ex illis [*ſegmentis,*] hoc eſt, ex reſiduo circuli auferas, plus quàm dimidium auferetur. Pari argumento ſi inſcribantur circulo polygona duplo ſemper plurium laterum, oſtendam è reſiduo circuli ſemper auferri plus quàm dimidium. Ergo reſiduum erit tandem (*i*) minus quocunque dato, ac proinde polygona inſcripta tandem a circulo deficient quantitate minori datâ quacunque; hoc eſt, in circulum (*k*) deſinent. Q. e. d. (f) Per ſch. poſt 6. & 7. l. 4. (g) Per cor. p. 28. & 29. l. 1. (h) Per 41. l. 1. (i) Patet ex lem. 2. ſch. poſt 11. l. 6. (k) Per defin. 6. l. 12.

[*Haud abſimili methodo demonſtrari poſſet, polygona circulo circumſcripta in circulum deſinere. Verùm cùm hoc inter alia, nec non & ipſum Lemma præcedens, in prop. 3. Theorematum ex Archimede ſelectorum contineantur, ſuperfluum eſſet hîc loci plura ſubjungere*]

PRO-

PROPOSITIO II.

Fig. 6. & 7. C*Irculorum proportio eſt duplicata proportionis diametrorum.*

Polygonorum ſimilium circulis ſine fine inſcriptorum proportio ſemper duplicata (*a*) eſt proportionis diametrorum. Atqui polygona circulis in infinitum inſcripta, in circulos (*b*) deſinunt. Ergo per poriſma univerſale ſequens, etiam circulorum proportio duplicata eſt proportionis diametrorum. Quod erat demonſtrandum.

(a) *Per* 1. *l.* 12.
(b) *Per* *ſeq.*

Poriſma univerſale.

SI ea quæ duabus figuris (A, B) inſcribuntur, in ipſas deſinant; quam proportionem inter ſe ſemper habent inſcripta, eandem habent & figuræ.

R
A B X Z.
C F

Sit ratio X ad Z, ea quam inſcripta ſemper habent inter ſe. Si ergo negas rationem figurarum A, B eandem eſſe cum ratione X ad Z, quam ſemper habent ea, quæ figuris inſcribuntur; ſit ratio A ad B primo major ratione X ad Z. Ergo alia quædam quantitas R minor quàm figura A, erit ad figuram B, ut X ad Z. Quoniam inſcripta per hyp. deſinunt in figuras A & B erunt aliqua figuris A & B inſcripta, quæ ab ipſis deficiant (*c*) minori quantitate, quàm R deficiat a figurâ A. Sint ea, C & F. Ergo C erit majus quàm R. Ergo C eſt ad B in (*d*) majori, quàm R ad B; hoc eſt, (ut ponebatur,) quàm X ad Z; hoc eſt, per hyp. quàm idem C ad F. Quoniam igitur C eſt ad B in majori proportione, quàm ad F, erit B figura minor (*e*) ſibi inſcripto F, totum ſuâ parte. Eodem modo oſtendetur rationem B ad A non poſſe eſſe majorem ratione Z ad X, [*hoc* (f) *eſt, rationem A ad B non eſſe minorem ratione X ad Z.*] Ergo ratio A ad B æqualis eſt rationi X ad Z. Quod erat demonſtrandum.

(c) *Per def.* 6. *l.* 12.
(d) *Per* 8. *l.* 5.
(e) *Per* 10. *l.* 1.
(f) *Per* 26. *l.* 5.

[*Eâdem methodo demonſtrabitur, duas figuras eandem inter ſe proportionem habere, quam ſemper habent circumſcripta in illas deſinentia; hoc modo:*

C F.
A B X Z
R

Sit ratio X ad Z ea quam circumſcripta ſemper habent inter ſe. Si ergo negas rationem figurarum A, B eandem eſſe cum ratione X ad Z, quam ſemper habent ea quæ figuris circumſcribuntur; ſit ratio A ad B primo major ratione X ad Z.

Ergo

Ergo erit A ad aliam quandam quantitatem R; ipſâ majorem, ut X ad Z. Et quoniam circumſcripta per hypotheſin deſinunt in figuras A & B, erunt aliqua figuris A & B circumſcripta, quæ ipſas excedant quantitate (a) *minori quàm R excedat figuram B. Sint ea C & F. Ergo F minus erit quàm R. Ergo* (b) *ratio A ad F major eſt ratione A ad R; hoc eſt, ratione X ad Z, ſive C ad F. Quoniam igitur ratio A ad F major eſt ratione C ad F, figura A major* (c) *erit ſibi circumſcripto C, pars toto, quod eſt abſurdum. Non igitur eſt ratio A ad B major ratione X ad Z. Eodem modo oſtendetur rationem B ad A non eſſe ratione Z ad X majorem, &* (d) *proinde rationem A ad B non minorem eſſe ratione X ad Z. Si itaque ratio A ad B neque major neque minor eſt ratione X ad Z; erit ei æqualis. Q. E. D.*

(a) Per def. 6. l. 12. (b) Per 8. l. 5. (c) Per 10. l. 5. (d) Per 26. l. 5.

Corollaria ad Prop. II.

Cor. 1. *Hinc, ut circulus eſt ad circulum, ita polygonum in illo deſcriptum erit ad ſimile polygonum in hoc deſcriptum. Utraque enim ſunt in duplicatâ ratione diametrorum quæ ſunt in circulis.* Fig. 6. & 7.

Cor. 2. *Hinc etiam liquet circulos eſſe ad ſe invicem, in ratione radiorum ſuorum* (e) *duplicatâ; hoc eſt, ut* (f) *quadrata radiorum.*

Cor. 3. *Hinc etiam, circulorum quorum diametri vel ſemidiametri ſunt nota, proportio innoteſcit;* (g) *inveniendo nimirum diametris datis tertiam proportionalem, ad quam circuli primò diameter eandem* (h) *habebit rationem, quam habet circulus iſte primus ad ſecundum. Sit circuli primi diameter pedum quatuor, ſecundi pedum ſex; cùm ſint 4, 6, 9. continuè* (i) *proportionales, erit circulus primus ad ſecundum ut 4. ad 9.*

Cor. 4. *Hinc etiam, circulum quemvis in datâ ratione augere vel minuere licet, uti ſupra* (k) *notatum eſt. Proponatur circulum deſcribere qui ſit alterius dati quintuplus; ſitque dati circuli radius AB; inter quem, & rectam BC, ipſius AB quintuplam inveniatur media proportionalis BX. Circulus radio BX deſcriptus erit circuli dati quintuplus.*

(e) Per 15. & 34. l. 5. (f) Per ſch. poſt 20. l. 6. (g) Per 11. l. 6. (h) Per hanc prop. & def. 10. l. 5. (i) Per cor. 3. pr. 17. l. 6. (k) Vide cor. 4. pr. 20 l. 6.

Cor. 5. *Si quatuor rectæ fuerint proportionales; figuræ ſimiles rectilineæ, ſimiliterque deſcriptæ ſuper duabus rectis prioribus, proportionales erunt circulis quorum diametri vel ſemidiametri fuerint duæ poſteriores. Nam cùm rectæ datæ ſint proportionales, & cùm tam figuræ rectilineæ, quàm circuli* (l) *ſint in earumdem rectarum ratione duplicatâ; erunt etiam figuræ circulis* (m) *proportionales.*

(l) Per 20. l. 6. & 2. l. 12. (m) Per 34. l. 5.

Cor.

Cor. 6. *E converſo, ſi duæ figuræ ſimiles rectilineæ duobus circulis proportionales fuerint; erunt homologa rectilinearum latera, circulorum diametris proportionalia. Cùm enim rationes figurarum & circulorum æquales, duplicatæ* (a) *ſint rationum homologorum laterum & diametrorum reſpectivè,* (b) *erunt etiam hæ rationes æquales.*

(a) Per 20. l. 6. & 2. l. 12.
(b) Per 35. l. 5.

Cor. 7. *Hinc ſi detur circulo dato A æquale quadratum* 𝔔; *invenietur aliud quadratum X quod alteri cuivis circulo C æquale ſit. Nam cùm ex hypotheſi ſit A ad* 𝔔, *ut C ad X, erit permutando, A ad C ut* 𝔔 *ad X; & proinde (per cor. 5.) radius circuli A ad radium circuli C, ut latus quadrati* 𝔔 *ad latus quadrati X. Cùm igitur dentur circulorum radii, & latus quadrati* 𝔔, (c) *invenietur latus quadrati X, & proinde* (d) *ipſum X quadratum. Et quod in hoc corollario de quadratis dictum eſt, idem de figuris rectilineis ſimilibus quibuſcunque* (e) *dictum puta.*

(c) Per 12. l. 6.
(d) Per 46. l. 1.
(e) Per 12. & 18. l. 6.

Fig. 76. l. 6.
(f) Per cor. 2. pr. 8. l. 6.
(g) Per idem.
(h) Per hanc prop. & def. 10. l. 5.
(i) Per 24. l. 5.

Cor. 8. *Circulus ſuper hypotenuſâ AB trianguli rectanguli ABC, æqualis eſt duobus circulis qui deſcribuntur ſuper AC, BC lateribus angulum rectum continentibus. Si enim ab angulo recto C demittatur hypotenuſæ perpendicularis CO, erunt AB, AC, AO* (f) $\div\!\!\div$; *& itidem AB, CB, OB* (g) $\div\!\!\div$. *Eſt itaque circulus ſuper AB, ad circulos ſuper AC, CB, reſpectivè, ut eſt* (h) *AB ad AO, OB reſpectivè: & proinde,* (i) *circulus ſuper AB ad circulos reliquos ſimul ſumptos eſt, ut AB ad AO + OB. Et cùm ſit AB = AO + OB, erit etiam circulus ſuper AB duobus reliquis ſimul ſumptis æqualis.*

Cor. 9. *Hinc datis circulorum quorumcunque diametris, facile eſt illorum ſummam vel differentiam exhibere, hoc eſt, circulum invenire, quotcunque & quibuſcunque circulis datis æqualem; vel circulum deſcribere, cujus area circulorum quorumvis inæqualium differentiæ æquetur: eâdem ſcilicet methodo, quâ quadratorum ſumma vel differentia exhibetur in ſchol. p. 47. l. 1. quod vide. In demonſtratione tantùm pro p. 47. l. 1. citetur cor. 8. p. 2. l. 12.*

Fig. 9. & 10. l. 12.

Cor. 10. *Hinc etiam Lunularum conjugatarum quadraturam, quam primus docuit Hippocrates Chius, poſſumus derivare. Sit enim ABC triangulum rectangulum, & BAC ſemicirculus diametro BC, BNA ſemicirculus diametro AB, AMC ſemicirculus diametro AC deſcriptus. Eſt itaque ſemicirculus BAC ſemicirculis BNA & AMC* (k) *æqualis. Si igitur ſpatium utrinque commune auferas, nimirum ſegmenta BA, AC, relinquentur duæ lunulæ BNA, AMC, utrimque lineis circularibus terminatæ, triangulo rectilineo BAC æquales. Quòd ſi recta BA æqualis ſit rectæ AC; hoc eſt, ſi lunulæ fuerint quadrantales, demiſſâ perpendiculari*

(k) Per cor. 8. hujus.
Fig. 10.

AO

AO ad hypotenuſam BC, erit triangulum BAO æquale lunulæ BNA, & triangulum COA æquale lunulæ CMA. Q. E. I.

Scholium 1.

Similia circulorum ſegmenta ABO, ILR ſunt in duplicatâ ratione diametrorum AF, IC, vel etiam in duplicatâ ratione rectarum AO, IR, quæ ſegmentorum arcubus ſubtenduntur. Biſectis enim arcubus ABO, ILR in B & L, ductiſque rectis AB, BO, IL, LR; propter arcus biſectos, ſubtenſæ (a) *æquales erunt, nempe AB* = *BO, & IL* = *LR: Sed & ang. ABO* = (b) *ang. ILR. Similia igitur* (c) *ſunt triangula ABO, ILR; atque adeo ſunt in duplicatâ* (d) *ratione laterum AB, IL, ſive* (e) *diametrorum AF, IC quæ ſunt in circulis, vel etiam ſubtenſarum AO, IR. Et continuâ arcuum AB, BO, & IL, LR biſectione, figuræ polygonæ ſimiles perpetuò inſcribentur iiſdem ſegmentis, & ſuper iiſdem baſibus AO, IR, in ipſa ſegmenta tandem deſinentes; atque igitur* (f) *ipſa ſegmenta ABO, ILR erunt in duplicatâ ratione diametrorum AF, IC; vel in duplicatâ ratione ſubtenſarum AO, IR.* Q. E. D.

Fig. 6. & 7.

(a) Per 27. l. 3.
(b) Per cor. 2. pr. 33. l. 6.
(c) Per 6 l. 6.
(d) Per 19. l. 6.
(e) Per cor. 2. pr. 1. l. 12.
(f) Per poriſma univ.

Scholium 2.

Cum quadratura lunularum conjugatarum quarumcunque conjunctim, quadrantalium verò ſeorſim, in coroll. 10. oſtenſa ſit; liceat jam alia quædam de lunulâ quadrantali, de quadraturâ portionis ejuſdem, deque methodo eam in datâ ratione ſecandi, ſubjungere.

1. *Compleatur Lunula quadrantalis circulus minor;* & (g) *tranſibit ejus circumferentia per circuli majoris centrum O. Si jam in* arcu lunulæ exteriori BNA ſumatur quodvis punctum E, juncta OE ſecabit arcus lunulæ proportionaliter in E & D, & proinde lunulam ſecabit in portiones (*h*) AED, BED. *Cùm enim angulus BOE ſit ad centrum circuli majoris & ad circumferentiam circuli minoris, arcus BE* (i) *erit duplo plurium graduum quàm arcus BD; & proinde ſemiperipheria BEA eſt ad quadrantem BDA, ut arcus BE ad arcum BD, ſive,* (k) *ut arcus EA ad arcum DA. Et permutando, arcus BE eſt ad arcum EA, ut arcus BD ad arcum DA.*

Fig. 11.
(g) Per cor. 2. p. 9. l. 4.
(h) Per def. 7. l. 12.
(i) Sequitur ex cor. 4. Scholii p. 5. l. 4.
(k) Per 16. & 17. l. 5.

2. *Si arcus EB, EA fuerint æquales, hoc eſt, ſi punctum E coincidat cum N, medio puncto ſemicirculi BNA; ductæ rectæ NB, NA perficient quadratum NAOB circulo minori inſcriptum, & circulum majorem tangent in B & A. Cùm enim BNA ſemiperipheria circuli minoris biſecta ſit in N, erunt*

Fig. 11. & 12.

recta NB, NA arcus quadrantalis chorda, ſive latera (a) quadrati circulo minori inſcriptibilis. Et propter æquales majoris circuli radios BO, AO, erunt hi etiam in ſemicirculo BOA, reliqua duo quadrati, circulo minori inſcriptibilis, latera. Quare, cùm omne quadratum ſit (b) rectangulum, anguli NBO, NAO erunt recti, & propterea rectæ NB, NA circulum majorem tangent (c) in B & A.

(a) Per 6. l. 4. (b) Per def. 32. l. 1. (c) Per 16. l. 1.

3. Si verò arcus EB, EA fuerint inæquales, etiam ſubtenſæ EB, EA (d) inæquales erunt; & ſi EA major ſit quàm EB, propter angulum BEA in ſemicirculo rectum, (e) angulus EBA erit ſemirecto major, & angulus EAB ſemirecto minor; ac proinde ang. EAO (ſive EAB, ſemirecto BAO auctus) erit angulo recto minor. Recta igitur EA arcum circuli majoris quadrantalem BDA (f) ſecabit alicubi, ut in G.

Fig. 11. (d) Per cor. p. 27. l. 3. (e) Per cor. 18. p. 32. l. 1. (f) Per 16. l. 3.

4. Ductâ rectâ BG, hæc trianguli rectanguli BEG baſis, & arcûs BDG ſubtenſa erit, ut ſatis patet: atque anguli EGB, EBG erunt æquales, nempe ſemirecti. Nam propter angulos AGB, EGB duobus (g) rectis æquales, atque angulum AGB in ſegmento quadrantali (h) ſeſquirectum, erit angulus EGB ſemirectus, & propter angulum GEB rectum, erit (i) etiam angulus EBG ſemirectus.

(g) Per 13. l. 1. (h) Per cor. 1. p. 8. & 9. l. 4. (i) Per cor. 6. p. 32. l. 1.

5. Baſis BG trianguli rectanguli æquicruris EBG, a rectâ EO bifariam & perpendiculariter ſecatur. Angulus enim BEO ſuper arcu quadrantali BO circuli minoris, (k) eſt ſemirectus, & proinde angulus rectus BEG a rectâ EO biſecatur. Sed angulus BEG eſt trianguli iſoſcelis angulus verticalis: unde recta illum biſecans, (l) biſecabit etiam baſem BG in F, eique perpendicularis erit.

(k) Per cor. 1. p. 8. & 9. l. 4. (l) Per n. 3. ſch. p. 26. l. 1.

6. Triangula itaque BFE, GFE ſunt ſibi ipſis, & toti BEG, atque etiam triangulo BOA ſimilia. Singula enim ſunt triangula rectangula iſoſcelia, ſeu quadratorum dimidia.

7. Cùm BF ſit ipſi DO (circuli majoris radio) perpendicularis, (m) erit illa ſinus rectus arcûs BD; & proinde (n) dupla BF, ſive BG, ſubtenſa erit dupli arcûs BD, ſive BDG. Supra autem (n. 1.) oſtenſum eſt, arcum BE in circulo minore, duplo plurium graduum eſſe quàm eſt arcus BD in circulo majore. Ergo arcus BDG (nempe ipſius BD duplus) ſimilis (o) erit arcui BE, & ſegmentum BG ſimile ſegmento BE.

(m) Per def. 10 l. 3. (n) Per cor. pr. 30. l. 3. (o) Per def. 4. l. 6.

8. Portio lunulæ BED æqualis eſt triangulo rectilineo BEF. Segmenta enim ſimilia BE, B~ ſunt (p) in duplicatâ ratione diametrorum BA, BC: hoc eſt, (q) ut 1 ad 2; ac proinde ſemiſegmentum BDF eſt ſegmento BE æquale. Si itaque e portione BED ſubtrahatur ſegmentum BE, & ei æquale ſemiſegmentum BDF addatur, habebitur triangulum rectilineum

(p) Per ſch. 2. hujus. (q) Per ſch. p. 20. l. 6. & cor. 1. p. 47. l. 1.

[illegible] BEF portioni BED æquale, ac (a) *proinde quadratur portio BED lunulæ quadrantalis.*

9. Lunulam quadrantalem ADBN ſecundùm rationem datam (ſcil. PQ ad QR) dividere in portiones AED, BED; & utriuſque portionis quadraturam exhibere. *Diametrum AB ſemicirculi minoris AEB divide* (b) *ſecundùm rationem datam in I, & in eodem ſemicirculo, a puncto I, erigatur diametro BA perpendicularis IE; atque a puncto E ad O centrum circuli majoris, ducta recta EO lunulam in datâ ratione dividet. Similia* (c) *enim triangula BAO, BEF, ſunt in duplicatâ* (d) *ratione laterum homologorum AB, BE: hoc eſt, (propter AB, BE, BI* ∺ (e),) *ut* (f) *AB ad BI; atque ducta IO, in eâdem ratione* (g) *eſt triangulum BAO ad triangulum BIO, propter eandem altitudinem ad O. Cùm igitur triangulum BAO ad triangula BEF, BIO eandem* (h) *rationem habeat, erit triang. BIO* = (i) *triang. BEF* = (k) *portioni BED. Sed lunula tota triangulo BAO* (l) *æquatur; atque adeo portio EAD triangulo AIO* (m) *æquabitur. Eſt autem triangulum AIO ad triangulum BIO,* (n) *ut AI ad BI, ſive ut PQ ad QR; & proinde portio lunulæ AED erit ad portionem BED ut PQ ad QR. Lunula itaque quadrantalis in datâ ratione dividitur, & alio modo quadratura portionis BED exhibetur; unde tum eandem portionem triangulo BIO, tum portionem alteram AED triangulo AIO æqualem eſſe conſtat. Datur itaque portionis utriuſque quadratura.*

10. *Completo utroque circulo ABC, AOBN, ducatur diametro minoris BA parallela majoris diameter EF, eique ad rectos angulos circuli majoris diameter CD, quæ producta, tum lunulam ANB in duas æquales portiones, AND, BND, tum triangulum AOB in duo æqualia triangula AHO, BHO, toti & ſibi invicem ſimilia dividet. Dico quòd ſpatii luniformis AGOIBECFA cornua AGOF, BIOE, triangulis AHO, BHO, (&* (o) *proinde lunulæ quadrantalis portionibus AND, BND) reſpectivè æqualia ſunt. Nam propter ABq* = (p) *AOq + BOq = 2 AOq, erit* (q) *ſegmentum ADB ſegmenti AGO duplum, atque ſemiſegmentum ADH ſegmento AGO æquale; quæ ſi a circuli majoris octantibus æqualibus AOD, AOF auferantur, remanebunt æqualia AHO, AGOF. Et ſimili modo oſtendetur BHO = BIOE. Quadrantur itaque dicti ſpatii luniformis cornua AGOF, BIOE.*

11. *Iiſdem poſitis, in circulo minore compleatur quadratum BNAO, & centro N, radio NB vel NA* = (r) *OB vel OA) deſcribatur arcus quadrantalis BLA, eritque BLAO lunula quadrantalis, lunulæ BNAD ſimilis & æqualis, ac proinde triangulo BNA vel BOA* (ſ) *æquabitur. Sed cornua*

(a) Per def. 8. l. 12.
(b) Per 9. l. 6.
(e) Per n. 6. hujus.
(d) Per 19. l. 6.
(e) Per cor. 2 p. 8. l. 6.
(f) Per def. 10. l. 5.
(g) Per 1. l. 6.
(h) Per 11. l. 5.
(i) Per 9. l. 5.
(k) Per n. 8. hujus.
(l) Per cor. 10 hujus.
(m) Per ax. 3. l. 1.
(n) Per 1. l. 6.
Fig. 12.
(o) Per n. 9. hujus.
(p) Per 47. l. 1.
(q) Per ſch. 1. hujus, & ſchol. p. 20. l. 6.
(r) Per def. 22. l. 1.
(ſ) Per cor. 10. hujus prop.

(b) Per n. 10. BIOE, *AGOF ſimul ſumpta eidem triangulo* (a) *æquantur. Ergo ſpatium mixtilineum BLAFE duplici triangulo BOA, ſive quadrato BNAO æquale eſt.*]

PROPOSITIO III. & IV.

Sunt prolixæ & difficiles tyronibus, nec alium habent uſum, quàm ut per eas demonſtretur quinta, quam nos ſine illis multo faciliùs demonſtrabimus.

Lemmata ad P. 5.

I.

Fig. 13. SI duæ pyramides triangulares ſecentur planis (OSE, RXZ) ad baſes (ABC, IQV) parallelis, quæ dividant latera (CF, QL) proportionaliter (in E & Z:) erunt (OSE, RXZ) inter ſe ut baſes (ACB, IQV.)

Quoniam parallela plana OSE, ABC ſecantur a planis BFC, AFB, AFC; erunt ſectiones communes SE, BC, & OS, AB, & OE, AC (a) parallelæ. Ergo anguli OSE, ABC, & SOE, BAC, & OES, ACB, bini & bini, æquales (b) ſunt. Quare ſectiones OSE, ABC (c) ſunt ſimiles. Eodem modo ſimiles eſſe oſtendam ſectiones RXZ, IVQ. Ergo ratio ſectionis ABC ad OSE eſt duplicata (d) rationis laterum BC, SE; & ratio ſectionis IVQ ad RXZ duplicata eſt rationis VQ ad XZ. Atqui rationes BC ad SE, & VQ ad XZ ſunt eædem: (eſt enim BC ad SE, ut (e) CF ad EF, hoc eſt per hyp. ut QL ad ZL; hoc (f) eſt, ut VQ ad XZ.) Ergo ratio ABC ad OSE eadem eſt (g) cum ratione IVQ ad RXZ. Quod erat propoſitum.

(a) Per 16. l. 11.
(b) Per 10. l. 11.
(c) Per 4. l. 6.
(d) Per 19. l. 6.
(e) Per cor. 1. p. 4. l. 6.
(f) Per idem cor.
(g) Per 34. l. 5.

II.

Fig. 14. PYramidi (ZCAF) triangulam habenti baſim, priſmata in infinitum inſcripta, deſinunt in ipſam pyramidem.

Dividatur latus pyramidis in aliquot æquales partes AB, BG, GF; & per B, G, factis ſectionibus BEP & GDN baſi ZAC parallelis, inſcripta intelligantur pyramidi priſmata triangularia BEPMAO, & GDNKBQ. His deinde extra pyramidem continuatis, intelligantur pyramidi eſſe circum-

ſcripta

ſcripta priſmata CIBA, PXGB, NHFG. Exceſſus circumſcriptorum ſupra inſcripta, ſunt ſolida IM, XK, HG, quæ ſimul ſumpta æquantur priſmati CIBA. Nam HG eſt (*a*) æquale DB, ac proinde HG cum XK æquatur PXGB, hoc eſt (*b*) MEBA. Ergo tria HG, XK, IM æquantur toti CIBA. Atqui ſi AF in plures ſine fine partes æquales dividatur, ac proinde priſmatum numerus in infinitum multiplicetur; AB fiet (*c*) quavis datâ minor. Ergo etiam (*d*) priſma CIBA fiet quovis dato minus. Ergo priſmatum circumſcriptorum (multoque magis pyramidis ZCAF, quæ pars eſt priſmatum ſibi circumſcriptorum) exceſſus ſupra inſcripta priſmata, fiet quovis dato minor. Ergo inſcripta priſmata in pyramidem (*e*) tandem deſinunt. Quod erat demonſtrandum.

(a) *Per* 25. *l.* 11. (b) *Per eand.* (c) *Collig. ex lem.* 2. *ſch. poſt* 11. *l.* 6. (d) *Patet ex* 25. *l.* 11. (e) *Per def.* 6. *l.* 12.

PROPOSITIO V.

Pyramides triangulares æque altæ, eam inter ſe proportionem habent quam baſes (A Q R, E S X.) *Fig.* 1.

Pyramidum altitudines æquales referant latera AP, EZ; quibus in quot placuerit æquales partes, ſed æque multas, utrimque diviſis, factiſque per diviſionum puncta ſectionibus ad baſes parallelis, intelligantur utrique pyramidi inſcripta eſſe priſmata trigona æque multa & æque alta. Jam verò quia priſmata LA, IE ſunt æque alta, erit priſma LA ad priſma IE, ut (*f*) baſis LOB ad baſim INK; hoc eſt (*g*) ut baſis QRA ad baſim SXE. Eodem modo oſtendam ſingula priſmata pyramidi QPAR inſcripta, eſſe ad ſingula inſcripta pyramidi SZEX, ut baſis QAR ad baſim SEX. Ergo etiam (*h*) ſimul omnia ſunt ad omnia, ut baſis ad baſim. Quare cùm ea tandem deſinant (*i*) in ipſas pyramides, etiam ipſæ erunt (*k*) ut baſes. Quod erat demonſtrandum.

[*Demonſtratio ſupponit latera AP, EZ pyramidum, æquales earum altitudines exhibere, & proinde eſſe ad baſes QAR, SEX recta. Sed vim ſuam retinebit demonſtratio, quamvis latera illa ſint ad baſes quovis modo obliqua, ſi concipiantur a verticibus P, Z perpendiculares ad baſes demitti, & in æquales quotcunque partes, & æque multas utrinque dividi, & per diviſionum puncta tranſire ſupponantur plana baſibus parallela, quæ itaque rectas PA, ZE divident* (l) *in partes ſimiles, & numero æquales iis in quas dividuntur perpendiculares,*

(f) *Per cor.* 1. *p.* 34. *l.* 11. (g) *Per lem.* 1. (h) *Per* 12. *l.* 5. (i) *Per lem.* 2. (k) *Per pō-riſ. univerſ. poſt p.* 2. *l.* 12. (l) *Per* 17. *l.* 11.

lares, eademque plana baſes erunt priſmatum æque multorum & æque altorum, utrique pyramidi inſcriptorum; & proinde eodem modo procedet demonſtratio, ac ſi recta PA, ZE fuiſſent ipſa baſibus QAR, SEX perpendiculares.]

PROPOSITIO VI.

Fig. 16. & 17.

Pyramides quæcunque æque altæ, eam inter ſe rationem habent quam baſes (AB, CFO.)

Reſolvantur baſes in triangula A, B, C, F, O; pyramides verò totæ in pyramides triangulares. Pyramis AX eſt ad pyramidem OZ, ut (*a*) A ad O; & pyramis (*b*) BX eſt ad pyramidem OZ ut B ad O. Ergo pyramides ſimul AX, BX (hoc eſt tota ABX) ſunt ad pyramidem OZ, ut A, B (*c*) ſimul ad O. Eodem diſcurſu pyramis ABX eſt ad pyramidem FZ, ut (*d*) A, B eſt ad F: Et ABX eſt ad CZ, ut (*e*) A, B eſt ad C. Ergo ABX (*f*) eſt ad tres ſimul OZ, FZ, CZ, hoc eſt, ad totam pyramidem OFCZ, ut A, B ad O, F, C. Quod erat demonſtrandum.

(a) Per præc. (b) Per eand. (c) Per 24 l. 5. (d) Per præc & 24. l 5. (e) Per eaſd. (f) Per 24. l. 5.

[Corol. *Hinc ſequitur, pyramides quaſcunque æqualium baſium & altitudinum, æquales eſſe.*]

PROPOSITIO VII.

Omnis pyramis tertia pars eſt priſmatis habentis eandem baſim & altitudinem.

Fig. 18.

Sit primò pyramis trigona BGAC, in eâdem baſi & altitudine cum priſmate BACFEO. Ducantur BF, AO, AF. Triangula BFC, BFO ſunt (*g*) paria. Ergo pyramis BFCA pyramidi BOFA (*h*) æqualis eſt. Ob eandem cauſam pyramis OEAF par eſt pyramidi OBAF, hoc eſt pyramidi BOFA, ſunt enim eædem pyramides. Igitur etiam BFCA, & OEAF æquales ſunt. Omnes igitur tres BFCA, OEAF, OBAF, ſive BOFA ſunt pares. Ergo tres ſimul unius BFCA triplæ ſunt. Atqui tres illæ conſtituunt priſma BACFEO. Illud ergo pyramidis BFCA, hoc eſt (*i*) BGAC, triplum eſt. Quod erat demonſtrandum.

(g) Per 34. l. 1. (h) Per cor. præced. (i) Per cor. præced.

Fig. 19.

Sit deinde pyramis quævis eandem habens baſim & altitudinem cum priſmate AEFH. Ductis lineis BC, BO, BE, & NI, NG, NH, reſolve priſma in triangularia priſmata, & pyramidem in trigonas pyramides. Quo facto patet demonſtra-

monſtratio ex primâ parte. Nam ſingulæ partes priſmatis [*polygoni,*] triplæ erunt ſingularum partium pyramidis [*polygonæ; hoc eſt, ſingula priſmata triangularia ſingularum pyramidum triangularium tripla erunt.*] Ac proinde totum priſma [*polygonum*] totius pyramidis [*polygona*] triplum eſt. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VIII.

Similium pyramidum (OACB, KHIN) proportio eſt triplicata ejus, quam habent homologa latera (AB, HN.) Fig. 20.

Sint primò trigonæ. Perfectis parallelogrammis AM & HQ, ſuper his conſtitue parallelepipeda AG, HL, in altitudine pyramidum; quæ cùm pyramides ſint ſimiles, etiam patet ſimilia (*a*) eſſe. Ducantur jam EF, RP, & per EF, CB, item per RP, IN ſecabuntur (*b*) parallelepipeda in duo priſmata æqualia. Singula horum (*c*) tripla ſunt pyramidum OACB, KHIN. Utraque ergo ſimul, hoc eſt, tota parallelepipeda AG, HL, ſextupla ſunt pyramidum. Pyramides ergo parallelepipedis proportionales ſunt. Sed horum ratio (*d*) triplicata eſt rationis laterum AB, HN. Ergo & illarum. Quod erat demonſtrandum.

Quòd ſi pyramides ſimiles fuerint polygonæ, reſolvantur in triangulares AR, BR, CR, & OK, EK, FK. Facile (*e*) oſtendes etiam AR ipſi OK, & BR ipſi EK, & CR ipſi FK eſſe ſimiles. [*Ob ſimilia enim triangula* (f) *A, O; &* (g) *MIR, ZPK,* (h) *erit DM:MI :: ZV:ZP; & MI:MR :: ZP:ZK. Ergo* (i) *DM:MR :: ZV:ZK; & invertendo* (k) *MR:MD :: ZK:ZV. Eodem modo oſtendetur eſſe MD : RD : ZV:VK. Ergo* (l) *MR:RD :: ZK:VK. Similia* (m) *ſunt igitur triangula MRD, ZKV, & proinde etiam pyramides AR, OK, quæ ſimilibus triangulis multitudine æqualibus continentur, ſimiles* (n) *ſunt. Eodem modo, ob ſimilia triangula B, E; vel C, F, demonſtrabitur triangula DXR, VSK ſimilia eſſe, atque adeo pyramidem BR ipſi EK, & CR ipſi FK ſimilem eſſe.*] Ergo per 1. partem ratio pyramidum AR, OK eſt triplicata rationis IM ad PZ: & ratio pyramidum BR, EK triplicata eſt rationis MX ad SZ; hoc eſt denuo per hyp. rationis IM ad PZ: & ratio pyramidum CR, FK eſt triplicata rationis XQ ad ST, hoc eſt, rurſum IM ad PZ. Cùm ergo ratio ſingularum ad ſingulas ſit triplicata rationis IM ad PZ, etiam ratio (*o*) omnium ad omnes, (hoc eſt, ratio

(a) *Ex def.* 9. *l.* 11.
(b) *Per* 28. *l.* 11.
(c) *Per præc.*
(d) *Per* 33. *l.* 11.
Fig. 21.
(e) *Ex* 20. *&* 5. *l.* 6. *& ex defin.* 9. *l.* 11.
(f) *Per* 20. *l.* 6.
(g) *Per def.* 9. *l.* 11.
(h) *Per def.* 1. *l.* 6.
(i) *Per* 22. *l.* 5.
(k) *Per ſch. poſt* 16. *l.* 5.
(l) *Per* 22. *l.* 5.
(m) *Per* 5. *l.* 6.
(n) *Per def.* 9. *l.* 11.
(o) *Per* 12. *l.* 5.

ratio totiùs pyramidis ABCR ad totam OEFK) triplicata erit rationis IM ad PZ. Quod erat demonſtrandum.

[Corol. *Hinc, ſi fuerint quatuor rectæ continuè proportionales; erit prima ad quartam, ut eſt pyramis ſuper primâ, ad pyramidem ſimilem ſimiliterque deſcriptam ſuper ſecundâ; &* Fig. 21. *proinde, datis pyramidum ſimilium ABCR, OEFK lateribus homologis MX, ZS; ſi fiant MX, ZS, G, H continuè proportionales, erit pyramis ABCR ad pyramidem OEFK, ut MX eſt ad H.*]

PROPOSITIO IX.

Fig. 22. & 23. *Æquales pyramides reciprocant baſes & altitudines: & quæ reciprocant, ſunt æquales.*

1. Pars. Sint primò [*æquales*] pyramides trigonæ BACO, HKNL. Perfectis parallelogrammis BE, HR, ſuper his ſint parallelepipeda BF, HP. Erunt (ut oſtendimus in 8.) pyramidum ex hyp. æqualium ſextupla, ac proinde æqualia inter ſe. Sunt verò horum parallelepipedorum altitudines HK, BA eædem quæ pyramidum: baſes verò BE, HR duplæ (*a*) ſunt baſium pyramidalium BCO, HNL, ac proinde iis proportionales. Cùm igitur, ob parallelepipedorum æqualitatem, ſit ut BE ad HR, ita (*b*) reciprocè HK ad BA; etiam erit ut baſis BCO ad baſim HNL, ita reciprocè altitudo HK ad altitudinem BA. Quod erat demonſtrandum.

(a) Per 34. l. 1.
(b) Per 34. l. 11.

Quod ſi [*æquales*] pyramides habeant baſes polygonas, retentis iiſdem altitudinibus (*c*) reducantur ad trigonas, eruntque hæ illis æquales per [*cor. p.*] 6. Sed pyramides ſic reductæ, per jam demonſtrata, reciprocant baſes & altitudines. Ergo etiam pyramides datæ polygonæ reciprocant baſes & altitudines. Quod erat demonſtrandum.

(c) Per 25. l. 6.

2. Pars. [*Si baſes ſint trigonæ,*] quoniam jam ponitur eſſe BCO ad HNL, ut HK ad BA; erit quoque BE ad HR, ut HK ad BA. Ergo parallelepipeda BF, HP (*d*) ſunt æqualia. Ergò & ſextæ eorum partes, nempe pyramides BACO, HKNL. Quod erat demonſtrandum.

(d) Per 34. l. 11.

[*Quòd ſi pyramides habeant baſes polygonas altitudinibus reciprocas; reducantur illæ ad* (e) *baſes trigonas BCO, HNL, polygonis æquales. Erit igitur BCO ad HNL, ut HK ad BA, atque adeo pyramides hæ trigonæ æquales erunt per jam demonſtrata: ergo etiam pyramides polygonæ, quæ trigonis ſunt* (f) *æquales, erunt etiam ipſæ æquales.*]

(e) Per 25. l. 6.
(f) Per cor. p. 6. l. 12.

Cor-

Corollaria.

QUæ de pyramidibus demonſtrata ſunt p. 6. 8. 9. etiam conveniunt quibuſcunque priſmatis; cùm hæc tripla (*a*) ſint pyramidum eandem baſim & altitudinem habentium. Igitur (a) *Per 7. l. 12.*

1. Priſmatum æque altorum eadem eſt proportio quæ baſium. Id enim oſtenſum eſt de pyramidibus p. 6.

2. Similium priſmatum proportio eſt triplicata proportionis homologorum laterum. Id enim oſtenſum eſt de pyramid. p. 8. [*& proinde ſi dentur ſimilium priſmatum latera homologa, invenietur priſmatum ipſorum ad ſe invicem ratio, eodem modo quo ex iiſdem datis, pyramidum ratio inventa eſt, in cor. p.* 8.]

3. Æqualia priſmata reciprocant baſes & altitudines: & quæ reciprocant, ſunt æqualia. Id enim de pyramidibus oſtenditur p. 9.

Mirum eſt hæc ab Euclide prætermiſſa, cùm præcipua ſint, quæ de ſolidis rectilineis tradi poſſunt.

Scholium 1.

EX hactenus demonſtratis elicietur dimenſio quorumcunque priſmatum ac pyramidum.

Priſmatis ſoliditas producitur ex altitudine in baſim ductâ; pyramidis verò ex tertiâ altitudinis parte ductâ in baſim.

Ut ſi priſmatis altitudo ſit 5. pedum, baſis verò 25. pedum quadratorum; multiplica 25. per 5. proveniunt 125. pedes cubici pro ſoliditate priſmatis.

Eſto enim priſma polygonum AH. Ejus baſi AE intelligatur æquale eſſe triangulum BAC, ſuperque eo priſma BE æque altum ac AH. Erunt (*b*) BE, AH æqualia priſmata. Sed BE priſma (*c*) producitur ex altitudine ſuâ in baſim BAC, hoc eſt (*d*) AE. Ergo etiam priſma AH fit ex altitudine ſuâ, quæ altitudini priſmatis BE æqualis ponitur, in baſim AE. *Fig. 19. & 18.* (b) *Per cor. 1. hujus.* (c) *Per ſch. 1. p. 40. l. 11.* (d) *Per conſtr.*

Hinc verò & ex 7. patet demonſtratio partis ſecundæ.

[*Scholium* 2.

Dimenſio pyramidis truncatæ ABCESO, ex datis altitudine CE, baſibus parallelis ABC, OSE, earumque lateribus homologis BC, SE. *Fig. 19.*

Ut inveniatur EF altitudo partis deficientis ESOF; propter ſim. tri. BCF, SEF, erit BC: SE :: CF: EF. Et divid. BC — SE: SE :: CE: EF. Datis itaque BC, SE & CE, invenietur EF. Atque hæc quidem demonſtratio ſupponit altitudinem perpendicularem cum latere pyramidis coincidere; ſed utcunque cadat perpendicularis illa, planum OSE (ſi opus, continuatum) altitudinem pyramidis & latus ejus FC ſimiliter ſecabit; & proinde ſemper erit BC — SE ad SE, ut altitudo pyramidis truncatæ, ad altitudinem partis deficientis. Cujus altitudinis ſic inventa pars tertia in baſem minorem OSE ducta, dabit partis deficientis ESOF ſoliditatem. Inventæ autem altitudini partis deficientis, addatur altitudo data pyramidis truncatæ, & habetur altitudo pyramidis integræ; cujus altitudinis pars tertia in baſem majorem ducta, pyramidis integræ ſoliditatem dabit: e quâ, deducta pars, deficiens, pyramidem truncatam relinquet.]

Lemma ad P. 10.

PYramides & priſmata, quæ conis & cylindris in infinitum inſcribuntur, in conos & cylindros deſinunt.

Demonſtratur ut lemma propoſitionis 2. adminiculo propoſitionis 6. & corollarii 1. poſt. p. 9. ſi ut iſtic plana circulo inſcripta, ita hic pyramides & priſmata, quæ ſuper planis illis tanquam baſibus conſiſtunt, a cono & cylindro auferantur.

PROPOSITIO X.

Fig. 24. *OMnis conus tertia pars eſt cylindri eandem baſim & altitudinem habentis.*

Baſi CL intelligatur inſcribi polygonum regulare quotcunque laterum, & ſuper illo tanquam baſi, cono quidem pyramis, cylindro autem priſma inſcribi. Erit pyramis (*a*) tertia pars priſmatis. Et ſi rurſum inſcribatur circulo polygonum laterum duplo plurium, ſuperque eo inſcribatur cono pyramis, & cylindro priſma; iterum erit pyramis tertia pars priſmatis; Atque hoc ſemper eveniet. Quare cùm pyramides in conum, (*b*) priſmata in cylindrum deſinant, etiam (*c*) conus tertia pars cylindri erit. Quod erat demonſtrandum.

(a) *Per* 7. *l.* 12.

(b) *Per lem. præc.*

(c) *Per Ax. univ. poſt.* 2. *l.* 12.

[Scholium. *Notandum verò eſt, hanc propoſitionem & ſequentes duas, non ſolùm ad rectos conos & cylindros, verùm etiam*

etiam ad quoſcunque obliquos pertinere, quamvis figura rectos tantùm exhibeant. Deducuntur enim a ſimilibus pyramidum & priſmatum quorumcunque, *non a* rectorum *ſolorum proprietatibus.*]

PROPOSITIO XI.

Conorum æque altorum (BAF, QXR) proportio eadem eſt quæ baſium (CL, SE.) Idem accidit cylindris æque altis. Fig. 24. & 25.

Pyramides conis æque altis inſcriptæ, ſunt (*a*) ut baſes. Atqui (*b*) pyramides tandem in conos deſinunt. Ergo etiam (*c*) coni ſunt ut baſes. Cùm verò cylindri conorum eandem cum ipſis baſim & altitudinem habentium ſint tripli; etiam ipſi erunt ut baſes. Quod erat demonſtrandum.

(a) *Per* 6 *l.* 12.
(b) *Per lem. ante* 10.
(c) *Per periſ. antic.*

Corollarium.

Eodem modo demonſtrabitur etiam priſmata & cylindros æque alta eſſe inter ſe ut baſes, imo quælibet corpora cylindriſormia æque alta, hoc eſt, quæ producuntur ex quibuſcunque planis in eandem altitudinem ductis, eſſe inter ſe ut baſes. Eodem modo de pyramidibus & conis æque altis, & conicis quibuſcunque ratiocinare.

PROPOSITIO XII.

Conorum ſimilium (BAF & QZR) proportio eſt triplicata proportionis diametrorum (BF & QR) quæ ſunt in baſibus. Idem cylindris ſimilibus accidit. Fig. 24. & 25.

Similium conorum baſibus inſcribe polygona ordinata [*ejuſdem denominationis,*] quæ proinde ſimilia erunt. *Si verò ſimiles coni fuerint ſcaleni, ita eorum baſibus inſcribantur polygona, ut axium inclinatio eundem habeat ſitum reſpectu laterum vel angulorum utriuſque polygoni.*] Pyramides ſuper his polygonis inſcriptæ conis, etiam ſimiles ſunt; quod facile oſtenditur. Ergo earum proportio eſt triplicata (*d*) proportionis laterum BL, QE; hoc eſt, (*e*) proportionis diametrorum BF, QR. Quare cùm pyramides (*f*) in conos deſinant, etiam conorum proportio (*g*) eſt triplicata proportionis diametrorum BF, QR. Quod erat demonſtrandum.

(d) *Per* 8. *l.* 12.
(e) *Per cor.* 2. *p.* 1. *l.* 12.
(f) *Per lem. ante* 10. *l.* 12.
(g) *Per periſ. antic.*

De

De cylindris patet theorema, cùm ſint tripli conorum.

[Corol. *Si continuetur ratio diametrorum BF, QR quæ ſunt in baſibus conorum (vel cylindrorum) ſimilium, per terminos G, H; ut ſint BF, QR, G, H* ∺ *; Erit* (a) *ut BF ad H, ita conus BAF ad conum QZR, & ita cylindrus BM ad cylindrum RI.*]

(a) *Per def. 10. l. 5.*

PROPOSITIO XIII.

Fig. 26.

SI cylindrus (BI) ſecetur plano (RL) baſibus (BQ, CI) parallelo; erit pars (BL) ad partem (RI,) ut axis ſegmentum (AO) ad ſegmentum axis (OF.)

Demonſtratur ut prima ſexti.

Theorema eodem modo verum eſt de ſuperficie.

[*Dividatur enim axis OF in quotcunque partes æquales, & per ſingula diviſionum puncta ducantur plana baſibus RL, CI parallela; & dividetur cylindrus (atque etiam ſuperficies cylindrica) RI in partes numero æquales iis in quas dividitur axis OF; quarum ſingulæ, æquales ipſius OF partes pro axibus habentes, erunt cylindri ejuſdem altitudinis; & proinde cylindri in quos dividitur cylindrus RI erunt* (b) *ut baſes, hoc eſt, æquales: (quòd autem cylindricæ ſuperficies iſtæ in quas dividitur ſuperficies cylindrica RI, ſint etiam æquales, conſtabit ex eo quòd una quævis intra alteram quamvis poſita, illi examuſſim congruet: & eodem modo parvulorum cylindrorum æqualitas iterum conſtabit.) Ergo cylindrus (& cylindrica ſuperficies) RI dividitur in partes aliquotas ſimiles iis in quas dividitur axis OF. Si itaque ex axe OA accipiatur una pars aliquota axis OF quoties poterit, & per puncta partes illas ipſius AO connectentia, ducantur plana oppoſitis planis BQ, RL parallela; manifeſtum eſt, toties in antecedente AO axe contineri partem aliquotam conſequentis axis OF, quoties in antecedente BL cylindro (vel ſuperficie cylindricâ) continetur pars ſimilis aliquota conſequentis cylindri (vel ſuperficiei cylindricæ) RI. Ergo* (c) *axis AO eſt ad axem OF, ut cylindrus BL ad cylindrum RI; (vel etiam, ut ſuperficies cylindrica BL ad ſuperficiem cylindricam RI.)* Q. E. D.

(b) Per 11. l. 12.

(c) *Per rationum æqualium indicium.*

Schol. *Hæc propoſitio non minùs valet in obliquo cylindro quàm in recto: in eo enim caſu, partes aliquotæ axis OF, ad baſes ſuas ſimiliter inclinantur in parvulis iſtis cylindris, in quas dividi ſupponitur cylindrus RI a planis ad baſes parallelis; unde duo* qui-

quivis intra invicem poſiti congruent, & proinde tam cylinduli quàm eorum ſuperficies, partes erunt aliquotæ cylindri & ſuperficiei RI, *partibus aliquotis axis* OF *numero æquales; & proinde ex cylindro vel ſuperficie cylindricâ* BL *toties ſumi poſſunt, quoties partes axis* OF *ex axe* OA. *Unde demonſtratio omnino eadem erit in cylindro obliquo ac in recto.*

Corol. *Hinc, ſi cylindrus ſecetur plano baſibus parallelo; erunt etiam partes* BL, RI *ut earum altitudines. Si enim cylindrus ſit rectus, res patet; altitudines enim ab axis ſegmentis* AO, OF *non ſunt diverſæ; ſi verò fuerit obliquus, ducatur recta linea baſibus perpendicularis, ac manifeſtum eſt illam atque axem a plano baſibus parallelo ſimiliter* (a) *ſecari; & proinde, cùm partes* BL, RI *ſint* (b) *ut axis ſegmenta, erunt etiam ut ſegmenta perpendicularis, hoc eſt, ut ſui ipſarum altitudines.* Q. E. D.] (a) Per 17. 4 ...

(b) Per ſch. hujus pr.

PROPOSITIO XIV.

Cylindri (CI & AR) ſuper baſibus (GH, MQ) æqualibus, ſunt inter ſe ut altitudines (SF, LZ.) Idem conis accidit. Fig. 27. & 28.

Abſcinde ab altiori cylindro AR cylindrum AO, altitudinis LE ejuſdem cum SF. Igitur cylindri AO, CI (*c*) æquales ſunt. Cùm igitur cylindrus AO ſit ad cylindrum AR, ut (*d*) LE ad LZ; etiam CI erit ad AR, ut LE ad LZ; hoc eſt, (quia LE & SF (*e*) æquantur,) ut SF ad LZ. Quod erat demonſtrandum.

[*Porro, cùm ſit cylindrus* CI *ad cylindrum* AR, *ut* SF *ad* LZ; *erit etiam pars tertia cylindri* CI *ad partem tertiam cylindri* AR, *hoc eſt,* (f) *conus* CFT *ad conum* AZB, *ut* SF *ad* LZ.

Obſervent tyrones, hujus propoſitionis demonſtrationem æquè valere in cylindris & conis obliquis ac in rectis.

(c) Per 11. l. 12. cum ſchol. p. 10. l. 12.

(d) Per coro prac.

(e) Per conſtr.

(f) Per 10. l. 12. ejuſque ſchol.

Corollarium.

Theorema etiam verum eſt de priſmatis; itemque de pyramidibus; & demonſtratio planè ſimilis. Sed de priſmatis ex corol. 1. p. 9. l. 12. & p. 25. cum cor. 1. p. 24. l. 11. De pyramidibus ex hoc & ex 7. l. 12.

PRO-

PROPOSITIO XV.

Fig. 28. & 29. *ÆQuales cylindri (AR, DF) reciprocant baſes & altitudines; & ſi reciprocant, æquales ſunt. Idem conis accidit.*

Demonſtratur ut P. 34. l. 11. ſed pro. 32. & 25. iſthic citatis, hîc adhibebitur prop. 11. & 13. [*vel* 14.] lib. 12.

[1. *Pars. Sint primò cylindri recti: ſi fuerint æquè alti, baſes* (a) Per 11. l. 12. *(propter cylindros ex hypotheſi æquales) erunt* (a) *æquales; unde in eo caſu, res patet.*

Si verò altitudines fuerint inæquales, à majori LZ abſcinde LE minori QC æqualem, & per E duc planum XO ad MQ (b) Per eand. *parallelum. Baſis MQ eſt ad baſem VT,* (b) *ut cylindrus AO ad cylindrum FD; hoc eſt, (quia cylindri AR, FD æquales eſſe ſupponuntur,) ut cylindrus AO ad cylindrum AR; hoc eſt,* (c) Per 14. l. 12. (c) *ut altitudo LE ad altitudinem LZ; hoc eſt, (propter LE, QC æquales) reciprocè ut altitudo QC ad altitudinem LZ. Q. E. D.*

Sint autem cylindri quovis modo obliqui, & erigantur ſuper iiſdem baſibus & in eâdem altitudine cylindri recti; eruntque his (d) Per 11. l 12. & ſch. poſt 10. l. 12. *æquales* (d) *obliqui. Quare cùm æquales cylindri recti reciprocent baſes & altitudines; etiam æquales obliqui reciprocabunt. Q. E. D.*

Cùm verò æquales coni ſint (e) Per 10. l. 12. (e) *æqualium cylindrorum æquè altorum & ſuper iiſdem baſibus partes tertiæ; hi etiam baſes & altitudines reciprocabunt.*

2. *Pars. Sint cylindrorum rectorum altitudines inæquales, & de majori LZ ſume minori QC æqualem LE, & per E ducatur* (f) Per 10. l. 12. *planum XO baſi parallelum. Cylindrus AO eſt ad cylin-* (g) Per conſtr. *drum FD,* (f) *ut MQ ad VT; hoc eſt per hypoth. ut QC* (g) (h) Per 14. l. 12. *ſive LE ad LZ; hoc* (h) *eſt, ut AO ad AR. Ergo* (i) *cylindri* (i) Per 9. l. 5. *AR, FD ſunt æquales. Et cùm cylindri obliqui ſint rectis æquè altis & ſuper iiſdem baſibus* (k) Per 11. l. 12. & ſch. poſt 10. l. 12. (k) *æquales; hi etiam, ſi reciprocant baſes & altitudines, æquales erunt. Q. E. D.*

Coni autem, cùm ſint (l) Per 10. l. 12. (l) *tertiæ partes cylindrorum æquè altorum ſuper iiſdem baſibus, ſi reciprocant baſes & altitudines, erunt & ipſi æquales. Q. E. D.*]

Scholium.

CUM nihil attulerit Euclides de ratione compoſitâ in corporibus, eam breviter hoc loco demonſtrabimus.

1. Cy-

1. Cylindrus ad cylindrum, & priſma ad priſma, rationem habent compoſitam ex rationibus baſium & altitudinum.

Sunto cylindri FD & AR: ab altiori AR (nam in æquè altis res per ſe patet (*a*);) abſcinde AO æquè altum ac FD. Sit etiam ut baſis VT ad baſim MQ, ita FN ad X; & ut altitudo ND ſeu BO ad altitudinem BR, ita X ad Z. Oportet igitur oſtendere, cylindrum FD eſſe ad cylindrum AR, ut FN eſt ad Z. Cylindrus FD eſt ad cylindrum AO, ut (*b*) baſis VT ad baſim MQ; hoc eſt, (*c*) ut FN ad X: cylindrus autem AO eſt ad cylindrum AR, ut (*d*) BO ad BR; hoc eſt, ut (*e*) X ad Z. Igitur ex (*f*) æquo, cylindrus FD eſt ad cylindrum AR, ut FN ad Z. *Fig.* 29. *&* 28. (a) *Per* 11. *l.* 12. (b) *Per* 11. *l.* 12. (c) *Per conſtr.* (d) *Per* 14. *l.* 12. (e) *Per conſtr.* (f) *Per* 22. *l.* 5.

De priſmatis res eodem modo demonſtrabitur, ſed ex corollario 1. p. 9. & coroll. p. 14.

2. Etiam conus ad conum, & pyramis ad pyramidem rationem habent compoſitam ex rationibus baſis ad baſim, & altitudinis ad altitudinem.

Sunt enim (*g*) cylindrorum ac priſmatum partes tertiæ. (g) *Per* 10. *&* 7. *l.* 12.

[*Hæc verò omnia in corporibus obliquis æquè obtinent ac in rectis, uti ex antedictis ſatis patet.*]

PROPOSITIO XVI, XVII.

HÆ propoſitiones omnium prolixiſſimæ, non alium uſum habent, quàm ut demonſtretur P. 18. *quam nos aliâ faciliori viâ demonſtrabimus.*

Lemma ad P. 18.

Cylindri hemiſphærio inſcripti, in hemiſphærium deſinunt. Sit PZY maximus hemiſphærii ſemicirculus: ſitque radius AZ perpendicularis diametro PY. Seca AZ in aliquot æquales partes AM, MN, NZ; ductiſque per diviſionum puncta M, N, perpendicularibus, &c. Inſcribantur ſemicirculo rectangula OBRK, EDHS, quibus deinde extra circulum continuatis, ſemicirculo circumſcripta intelligantur rectangula FTYP, LVBO, QXDE; eruntque omnia æquè alta. Exceſſus autem circumſcriptorum ſupra inſcripta ſunt plana FK, LS, XE, VH, TR, quæ ſimul ſumpta conficiunt rectangulum FTYP. Nam quia XE æquatur DS, erunt LS, VH, XE ſimul, æqualia rectangulo IB, hoc eſt OR. Quare ſi adjicias utrimque plana FK, TR, erunt ſimul omnia FK, LS, XE, VH, TR æqualia rectangulo FTYP. Si jam intelligatur ſemicirculus cum rectangulis circa radium *Fig.* 30.

immotum

immotum AZ circumagi, inſcripta rectangula EH, OK producent cylindros hemiſphærio inſcriptos; & rectangula circumſcripta producent cylindros hemiſphærio circumſcriptos, ſibi mutuò inſiſtentes: & ſicut rectangulorum circumſcriptorum exceſſus ſupra inſcripta rectangula erat rectangulum FY, ita etiam cylindrorum circumſcriptorum exceſſus ſupra inſcriptos erit cylindrus a rectangulo FY genitus. Atqui hujus cylindri altitudo fiet quavis datâ minor; adeoque etiam ipſe quovis dato (a) evadet minor, ſi radio in plures ſine fine partes diviſo, rectangulorum, indeque & cylindrorum numerus ſine fine multiplicetur. Ergo cylindrorum circumſcriptorum; multoque magis ipſius hemiſphærii, quod cylindrorum circumſcriptorum pars eſt, exceſſus ſupra inſcriptos cylindros fiet tandem quovis dato minor. Ergo cylindri hemiſphærio in infinitum inſcripti, tandem deſinunt (b) in hemiſphærium. Quod erat demonſtrandum.

(a) Patet ex 14. l. 12.

(b) Per def. 6. l. 12.

Corollarium.

EOdem modo demonſtrabitur cylindros cono, conoidi, ſphæroidi, &c. inſcriptos, in ipſa deſinere.

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 31.

SPhærarum proportio eſt triplicata proportionis diametrorum (BK, RZ.)

Radiis AB, YR in quot placuerit æquales partes, ſed æquè multas, diviſis, ductiſque per diviſionum puncta perpendicularibus, &c. Intelligantur maximis ſphærarum ſemicirculis inſcripta eſſe rectangula æquè multa, quæ circa radios immotos AB, YR circumacta, inſcribant utrique hemiſphærio cylindros æquè multos, ſibi invicem inſiſtentes. Quia KC (c) eſt ad CF, ut CF ad CB. Erit ratio KC ad CB duplicata (d) rationis KC ad CF, hoc eſt rationis FC ad CB. Similiter erit ratio ZE ad ER, duplicata rationis XE ad ER. Sed per conſtr. eſt KC ad CB, ut ZE ad ER. Ergo etiam (e) FC eſt ad BC, ut XE ad ER. Sed BC eſt ad CO per conſtr. ut RE ad ES. Igitur ex æquo (f) FC eſt ad CO, ut XE ad ES. Cylindri igitur (g) FL, XQ ſimiles ſunt, ac proinde eorum proportio eſt triplicata (h) proportionis diametrorum FI, XV, ſeu ſemidiametrorum FC, XE, quæ ſunt in baſibus. Sed proportio FC ad XE eadem eſt cum proportione quæ eſt inter diametros ſphæra-

(c) Per cor. 1. p. 13. l. 6.
(d) Per def. 10. l. 5.
(e) Per 35. l. 5.
(f) Per 22. l. 5.
(g) Per def. 4. l. 12.
(h) Per 12. l. 12.

ſphærarum BK, RZ; (nam ut jam oſtendi, FC eſt ad KE, ut CO ad ES; hoc eſt, ut (*a*) BK ad RZ, ipſarum CO, ES per conſtr. æquè multiplices.) Ergo ratio cylindrorum FL, XQ eſt triplicata rationis diametrorum BK, RZ. Eodem modo demonſtrabimus ſingulos cylindros hemiſphærio uni inſcriptos, ad cylindros ſingulos inſcriptos alteri hemiſphærio rationem habere triplicatam rationis diametrorum BK, RZ. Ergo etiam ratio ſimul omnium ad omnes ſimul, (*b*) triplicata eſt rationis diametrorum BK, RZ. Quare cùm aggregata cylindrorum tandem in hemiſphæria (*c*) deſinant, hemiſphæriorum quoque, ac proinde & ſphærarum ratio triplicata erit (*d*) rationis diametrorum. Quod erat demonſtrandum.

(a) *Per 15. l. 5.*
(b) *Per 12. l. 5.*
(c) *Per lem. præced.*
(d) *Per perſm. conv.*

Corollarium.

NOtâ igitur proportione diametrorum, etiam ſphærarum proportio innoteſcit. Ut ſi minoris diameter ſit unius pedis, majoris 10. continuetur ratio 1 ad 10 per quatuor terminos, 1. 10. 100. 1000. Ut eſt 1. ad 1000, quartum terminum, ita ſphæra minor erit ad majorem.

Conorum, Cylindrorum & Sphæræ dimenſio dabitur libro ſeq. ex Archimede.

Scholium.

QUemadmodum ſimiles (*e*) planæ figuræ per mediam proportionalem unam, ita corpora ſimilia non niſi per medias duas, in proportione datâ augentur vel diminuuntur.

(e) *Per cor. 4. p. 20. l. 6.*

Data ſit ſphæra vel cubus, vel aliud corpus quodcunque, cujus radius ſive latus ſit A. Data item ſit proportio quæcunque A ad B, ut dupla. Oporteat exhibere corpus & duplum dati, & ſimile.

Fig. 32.

Inter terminos rationis datæ A & B, inveniantur duæ mediæ proportionales X, Z, ut docuimus in ſcholio poſt 13. l. 6. Sphæra cujus radius eſt X, ſive corpus dato ſimile, factum ſuper latere X, erit duplum dati.

Nam corpora ſimilia quorum radii ſeu latera ſunt A & X, rationem inter ſe habent triplicatam (*f*) rationis A ad X, hoc eſt, eandem (*g*) quam A habet ad B.

Atque hoc eſt celebratiſſimum illud problema, quod Deliacum a Deliaco Apolline dictum eſt, quòd is, lue ſæviſſimâ Athenas populante, conſultus reſpondiſſet, peſtem ceſſaturam

(f) *Per 8. & cor. 2. p. 9. & per 12. ac 18. l. 12.*
(g) *Per def. 10. l. 5.*

ſi ejus aræ, quæ cubica erat, duplicaretur. Ita Valerius Maximus l. 8. [*cap.* 12.

Atqui Valerius non iſta, ſed hoc ſolùm dicit: [Plato] conductores ſacræ arcis, [*lege* aræ,] de modo & formâ ejus ſecum ſermonem conferre conatos, ad Euclidem Geometram ire juſſit. *Ubi tamen pro* Euclide, Eudoxum *reponendum eſſe monet Menagius ad Diog. Laertii lib.* 2. *ſegm.* 106. *Cæterum accuratiora ſi velis de hujus problematis occaſione, deque methodis idem ſolvendi, ac præcipuè de variis modis duas medias proportionales inveniendi, quos excogitarunt antiqui Geometræ, conſule (ut alios mittam)* Eratoſthenem de cubi duplicatione, (*inter opera ejus ad calcem Arati Oxon.* 1672. *edita.*) Vitruvium de Architect. *lib.* 9. *cap.* 3. Plutarchum de genio Socratis, (*operum Moral. edit. Francofurt. pag.* 579.) Pappum Collect. Mathemat. *lib.* 3. *prop.* 5. *&* Eutocium (*a Tacqueto laudatum ſupra, in ſchol. poſt* 13. *l.* 6.) Comment. in Archimed. de ſphærâ & Cylindro, *ad Theor.* 1. *lib.* 2.

Porro, inter duos numeros datos invenientur duo medii proportionales hoc modo. Quadratum prioris extremi in poſteriorem ducatur, & producti radix cubica extrahatur. Erit ea duorum mediorum prior. Deinde quadratum poſterioris extremi per extremum priorem multiplicetur, & hujus producti radix cubica exhibebit duorum mediorum poſteriorem. Exemp. gr. proponatur invenire duos medios proportionales inter 8. *&* 27. *Multiplica* (8 × 8 =) 64 *per* 27, *& orietur* 1728, *cujus radix cubica* 12, *eſt duorum mediorum proportionalium prior. Deinde multiplica* (27 × 27 =) 729, *per* 8, *& producetur* 5832, *cujus radix cubica eſt* 18, *nempe duorum mediorum poſterior. Nam* 8, 12, 18, 27 ∺. *Et univerſaliter, ſi inter A & E quærantur duæ mediæ proportionales M & N; erit M = √ c AqE, & N = √ c EqA.*

Cùm enim rectangulum ſub A & E ſit (a) *medium proportionale inter illarum quadrata; erunt Aq, AE, Eq* ∺. *Ducantur hæc tria plana in eandem altitudinem A; & orientur* (b) *ſolida continuè proportionalia Ac,* (c) *AqE, EqA. Ducantur etiam eadem plana in altitudinem communem E, & fient ſolida AqE, EqA, Ec* ∺. *Quatuor ergo ſolida, Ac, AqE, EqA, Ec ſunt continuè proportionalia; ac proinde eorum radices cubicæ, A, √ c AqE, √ cEqA, E continuè proportionales* (d) *erunt. Ergo, cùm ex hypoth. ſint A, M, N, E* ∺, *erit M = √ cAqE, & N = √ cEqA.*

(a) Per cor. 2. p. 22. l. 6.

(b) Per 32. l. 11.

(c) Vide ſch. p. 36. l. 11.

(d) Per ſch. 1. p. 33. l. 11. & p. 35. l. 5.

Si verò primus terminus fuerit 1, *extractâ radice cubicâ poſterioris extremi, habebitur duorum mediorum prior, cujus medii quadratum erit duorum mediorum poſterior. Si enim fuerit*

erit $A = 1$, *erit* $Aq = 1$. *Unde* $AqE = 1 \times E = E$, & $\sqrt{c}\,AqE$ (*ſive M*) $= \sqrt{c}\,E$. *Et eodem modo* $\sqrt{c}\,EqA$ (*ſive N*) $= \sqrt{c}\,Eq =$ (a) $\sqrt{c}\,E \times \sqrt{c}\,E$. *Ex. gr. inter* 1. & 125. *medii ſunt* 5. & 25. *Eſt nempe* $\sqrt{c}\,125 = 5$, & $5 \times 5 = 25$. *Sunt autem* 1, 5, 25, 125 ∺. *Ac proinde, ſi pro cubi dati latere ponatur unitas, habebitur latus cubi dato dupli, radicem cubicam numeri binarii extrahendo. Quod (cùm per ſe manifeſtum ſit, tum etiam) ex eo deducitur, quòd* $\sqrt{c}\,2$ *ſit duorum mediorum proportionalium prior inter* 1. & 2.]

(a) Per coll. p. 37. l. 11.

ANDREÆ TACQUET

E SOCIETATE JESU

SELECTA EX

ARCHIMEDE THEOREMATA

Viâ faciliori ac breviori demonſtrata, & novis inventis aucta.



AMSTELODAMI,

Apud PETRUM DE COUP.

M DCC XXV.

LECTORI.

QUamvis in Mathematicis diſciplinis complures ſummi & admirabiles viri extiterunt: prima tamen gloria, communi quodam conſenſu, Archimedi Syracuſano delata eſt. Sed illum plures laudant, quàm legant; admirantur plures, quàm intelligant. Cauſa, opinor, ſunt exemplarium moles, & raritas; ſermonis ex Græco tranſlati obſcuritas nonnulla; demonſtrationes prolixæ & arduæ. Putavi igitur ex ſtudioſæ juventutis uſu futurum, ſi elementis jam illuſtratis, hæc a me ſelecta ex Archimede theoremata, & viâ multo faciliori ac breviori demonſtrata ſubnecterem. Selegi porro ea, quæ & admirationis plus, & utilitatis habent; viamque in demonſtrando eam tenui, ut ſperem eum qui elementa perceperit, hæc ſummi Geometræ præclariſſima inventa negotio haud magno aſſecuturum. Sub finem adjectis tredecim propoſitionibus, Archimedis de cylindro & ſphærâ doctrinam ampliorem facio, atque inter cætera demonſtro ſeſquialteram proportionem in tribus corporibus, ſphærâ, cylindro, & æquilatero cono, utroque ſphæræ circumſcripto, continuari. Varia inſuper ſparſim, inter quæ propoſitio 12. & corollaria prop. 14. præcipua ſunt, & ſcholia omnia adjeci. Fruere iſtis, quiſquis Geometriæ candidatus es; & quantùm ex Euclide profeceris, in Archimede experire. Cùmque in verita-

rum pulcherrimarum contemplatione defigi te, evehique ſurſum perſenſeris, mentem ab infimis hiſce rebus feliciter jam avulſam attolle etiam altiùs, atque dirige ad Veritatem primam, æternam, immenſam, quæ Deus eſt, cujus ineffabili viſione nos futuros aliquando æternùm beatos confido. Vale.

THEO-

THEOREMATA SELECTA
EX ARCHIMEDE.

DEFINITIONES,

Seu vocum nonnullarum explicatio.

ESto circulus BECG, cujus centrum A, diameter BC, quam ad rectos angulos ſecet recta EG non per centrum, videlicet in D. Ex centro autem educantur radii AE, AG. His poſitis *Fig 26. tab. ex Archimede.*

1. Sector ſphæræ eſt, qui ſectore circulari AECG, ſeu AEBG, circa diametrum BC in orbem acto, producitur.

2. Segmentum ſeu portio ſphæræ eſt, quæ a circulari ſegmento ECG, ſeu EBG, circa eandem diametrum BC in orbem acto, deſcribitur.

3. Portionis ſphæricæ (EBG) vertex eſt diametri immobilis extremitas B: Baſis eſt circulus a rectâ EG deſcriptus: Axis eſt diametri pars BD inter verticem B, & D centrum baſeos intercepta.

4. Cùm ſphæricæ portionis, aut corporis ei inſcripti, aut coni ſuperficiem nomino, ſemper intelligo abſque baſi; & cùm cylindri ſuperficiem dico, intelligo ſimiliter abſque baſibus; niſi adjungatur (*tota*;) tunc enim accipiuntur & baſes.

Rurſum cùm de cylindris vel conis ago, non alios intelligo quàm rectos.

Axiomata.

1. POlygoni circulo inſcripti ambitus, minor eſt circuli peripheriâ. *Fig. 1. & 19.*

2. Polygoni circulo circumſcripti ambitus, circuli peripheriâ major eſt. *Fig. 1.*

3. Quod ſi polygonum circulo inſcriptum, circa diametrum (AE) unà cum circulo circumagatur; erit corporis a polygono geniti ſuperficies, minor ſphæræ ſuperficie. Et, ſi polygonum circulo circumſcriptum, circa diametrum *Fig. 19.*

 unà

unà cum circulo circumagatur; erit corporis a polygono geniti major ſuperficies, ſuperficie ſphæræ.

Fig. 17. 4. Similiter, ambitus polygoni inſcripti ſegmento circulari (DAF,) minor eſt peripheriâ ſegmenti (DAF.) Et ſi polygonum ſegmento inſcriptum unà cum ſegmento, circa ſegmenti axem (AO) circumagatur; erit corporis a polygono geniti ſuperficies, minor ſuperficie portionis ſphæricæ (DAF.)

Fig. 6. & 8. 5. Superficies priſmatis cylindro inſcripti, minor eſt cylindri ſuperficie; circumſcripti verò major.

Fig. 7. & 10. 6. Et ſuperficies pyramidis cono inſcriptæ, minor eſt coni ſuperficie; circumſcriptæ autem major.

PROPOSITIO PRIMA.

Data ſint figuræ quæcunque ſeu planæ ſeu ſolidæ, A, B: Sint autem magnitudines aliæ ſemper atque aliæ, quæ figuras datas A ac B ſemper minùs ac minùs excedendo, in ipſas (a) *deſinant, & tamen ſemper inter ſe æquales ſint:*

(a) Vide def. 6. l. 12.

Dico etiam figuras A & B æquales eſſe.

E. F.
A. B. X.

Si non, alterutra major erit. Sit ergo A major quàm B exceſſu X. Per hypotheſim dantur magnitudines E, F inter ſe æquales, quæ excedant figuras A, B exceſſu minori quàm X, quo A ponitur ſuperare B. Ergo F minor eſt quàm A. Sed F per hypotheſim eſt æqualis E. Ergo etiam E minor eſt quàm A; quod eſt abſurdum; cùm per hyp. E excedat A. Eodem modo oſtendam B non poſſe eſſe majorem quàm A. Ergo cùm neutra ſit major alterâ, æquales erunt. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO II.

Data ſint figuræ A & B; ſint autem magnitudines aliæ ſemper atque aliæ, quæ a figuris datis ſemper minùs ac minùs deficiendo, in ipſas (b) *deſinant, & ſemper inter ſe æquales ſint:*

(b) Vide def. 6. l. 12.

Dico etiam figuras datas A, B æquales fore.

A. B. Z. Si

A. B. Z. Si non, alterutra minor erit. Eſto igi-
O P. tur A minor quàm B defectu Z. Per hy-
potheſim dari poſſunt magnitudines O, P inter ſe æquales, quæ deficiant a figuris datis A & B defectu minori quàm Z, quo ponitur A deficere à B. Ergo P major eſt quàm A. Sed P per hypotheſim eſt æqualis O. Ergo etiam O major eſt quàm A, quod repugnat hypotheſi, quâ ſtatuitur O minor quàm A. Eodem modo oſtendam B non eſſe minorem quàm A. Quare cùm neutra ſit minor alterâ, æquales erunt. Quod erat demonſtrandum.

[*Hæ verò propoſitiones duæ, ex poriſmate univerſali (poſt pr. 2. lib. 12.) abſque ulteriori demonſtratione, immediatè deduci poſſent.*]

PROPOSITIO III.

Ambitus polygonorum circulo circumſcriptorum & inſcriptorum, deſinunt in circuli peripheriam. Similiter & polygona ipſa in circulum deſinunt.

Si nimirum arcubus ſine fine biſectis, plura ſemper ac plura latera circulo circumſcribantur & inſcribantur. *Fig. 1. tab. 6. ex Archim.*

1. Pars. Intelligantur circulo inſcripta & circumſcripta, polygona ordinata [*ſimilia*;] ſive ut traditur p. 12. l. 4. ſive ut in hac figurâ, perinde erit. Manifeſtum eſt (*a*) F I eſſe ad CE, (hoc eſt, (*b*) totum ambitum circumſcriptum eſſe ad totum ambitum inſcriptum,) ut I A eſt ad C A. Atqui I C exceſſus rectæ I A ſupra C A, fit tandem quacunque datâ minor, ſi plura ſemper ac plura in infinitum latera circumſcribi & inſcribi intelligamus. Ergo etiam exceſſus ambitûs circumſcripti ſupra ambitum inſcriptum, tandem fiet quovis dato minor. Ergo multò (*c*) magis exceſſus ambitûs circumſcripti ſupra peripheriam fiet quocunque dato minor. Similiter, quia jam oſtendi defectum ambitûs inſcripti ab ambitu circumſcripto fieri quovis dato minorem, multò (*d*) magis defectus inſcripti ambitûs a peripheriâ fiet quovis dato minor. Ambitus igitur tam inſcripti quàm circumſcripti, in peripheriam (*e*) deſinunt. Quod erat primum. Hæc ulterius demonſtrare operæ pretium non eſt, cùm ſatis ſint manifeſta.

(a) *Per cor. 1. p. 4. l. 6.*
(b) *Per 12. l. 5.*
(c) *Patet ex ax. 11.*
(d) *Patet ex axio. 2.*
(e) *Per def. 6. l. 12.*

2. Pars

2. Pars. Quia jam oſtenſum eſt exceſſum lateris FI ſupra latus EC fieri tandem quovis dato minorem; (eſt enim FI ad EC, ut IA ad CA;) etiam exceſſus quadrati FI ſupra quadratum EC fiet quovis dato minor. Sed ut quadratum FI ad quadratum EC, ita (*a*) polygonum circumſcriptum ad polygonum inſcriptum. Ergo etiam exceſſus polygoni circumſcripti ſupra inſcriptum tandem fiet dato minor. Ergo multò magis exceſſus polygoni circumſcripti ſupra circulum tandem fiet dato minor; ac proinde & polygoni inſcripti defectus a circulo, dato minor aliquando erit. Igitur polygona circulo tam inſcripta quàm circumſcripta, in circulum (*b*) deſinunt. Quod erat alterum.

(a) *Per 20 l. 6. & ſch. ei annexum.*

(b) *Per def. 6. l. 12.*

PROPOSITIO IV.

Fig. 1. (c) *Vide def. 3. l. 4.*

Polygonum (c) *ordinatum circulo conſcriptum (FINTR) æquatur triangulo, cujus baſis eſt ambitus polygoni, altitudo verò circuli radius.*

Et polygonum ordinatum circulo inſcriptum æquatur triangulo, cujus baſis eſt polygoni inſcripti ambitus, altitudo verò perpendicularis (AO) in latus unum ex centro ducta.

1. Pars. Radius AB ad contactum ductus, (*d*) eſt perpendicularis ad tangentem IF. Quare ſi, ductis rectis AF, AI, AN, &c. polygonum reſolvatur in triangula; erit radius AB communis omnium altitudo; adeoque triangula ipſa liquet eſſe æqualia. Ergo triangulum baſim habens parem ſummæ laterum FI, IN, NT, &c. altitudinem verò AB, æquabitur illis (*e*) omnibus, hoc eſt, toti polygono circumſcripto.

2. Pars. Simili fere ratiocinio concludetur.

[*Nam propter æqualia inſcripti latera, perpendiculares omnes a centro A æquales* (f) *erunt, & proinde omnia triangula in qua reſolvitur inſcriptum polygonum,* (g) *æqualia ſunt. Unde eodem prorſus modo procedet demonſtratio ac in parte priori.*

Cor. 1. *Hinc area polygoni ordinati circulo inſcripti vel circumſcripti invenitur,* (h) *multiplicando perpendiculum a centro ad latus quodvis ductum, in dimidiam polygoni circumferentiam.*

(d) *Per 18. l. 3.*

(e) *Per 1. l. 6.*

(f) *Per 14. l. 3.*

(g) *Per 38. l. 1.*

(h) *Per hanc & ſchol. p. 41. l. 1.*

Cor.

Cor. 2. *Et cùm polygona circulo inſcripta ac circumſcripta, in circulum, & polygoniorum ambitus in circuli ambitum tandem* (a) *deſinant; etiam area circuli invenietur, multiplicando radium in dimidiam ejuſdem peripheriam.* (a) Per præc.

Cor. 3. *Circulus ergo æqualis erit triangulo, cujus baſis eſt peripheria circuli, altitudo autem ſemidiameter. Exurgit* (b) *enim area trianguli ex dimidiâ baſi in altitudinem ductâ. Et eodem modo conſtabit, ſectorem circuli æqualem eſſe triangulo, cujus altitudo eſt circuli radius, & cujus baſis eſt recta quæ arcui ſectoris æqualis ſit: Hoc autem corol. ex iiſdem principiis latiùs demonſtratur in prop. ſeq.* (b) Per ſch. p. 41. l. 1.

Cor. 4. *Figurarum iſoperimetrarum capaciſſima eſt circulus. Eſto perimeter polygoni cujuſcunque* [*e. gr. quadrati*] EGHI *æqualis circumferentiæ circuli cujus radius ſit AF, & cujus centrum F coincidat cum centro circuli qui quadrato* EGHI *inſcribi, vel circumſcribi poſſit. Dico quod circuli area major eſt quàm area polygoni. Area enim circuli æqualis* (c) *eſt triangulo cujus baſis eſt circumferentia, altitudo verò ſemidiameter F A: & Area polygoni æqualis* (d) *triangulo cujus baſis eſt perimeter polygoni, circumferentia circuli ex hypotheſi æqualis, & altitudo perpendicularis FO a centro circuli in latus polygoni demiſſa: quæ quidem cùm radio circuli ſemper ſit minor, liquet aream polygoni areâ circuli eſſe minorem. Q. E. D.* Fig. 2. (c) Per cor. 3. (d) Per hanc prop.

Et ſimiliter inter figuras ſolidas æqualibus ſuperficiebus contentas, Sphæra omnium capaciſſima demonſtrabitur.

PROPOSITIO V.

Circulus eſt æqualis triangulo, cujus baſis eſt peripheria circuli, altitudo autem ſemidiameter. Fig. 3.

Polygona ordinata circulo circumſcripta, & triangula baſes habentia ambitum polygoni, altitudinem verò radium circuli, ſemper ſunt (*e*) æqualia. Atqui polygona circulo in infinitum, circumſcripta, in circulum (*f*) deſinunt: ſimiliterque triangula (ut mox oſtendam) quæ pro baſi habent ambitum polygoni circumſcripti, pro altitudine verò radium AB, tandem deſinunt in triangulum pro baſi habens peripheriam, pro altitudine radium AB. Ergo (*g*) circulus, & triangulum pro baſi habens peripheriam, pro altitudine radium AB, æqualia ſunt. (e) Per præc. (f) Per 3. hujus. (g) Per 2. hujus.

Quòd autem triangula ſub ambitu polygoni & radio, deſinunt in triangulum ſub peripheriâ & radio, ſic oſtendo. Triangula ſub ambitu circumſcripti polygoni & radio AB ſunt

cumſcriptibilis, cujus proinde ambitus erit 96 LK, *circuli circumferentiâ* (a) *major. Si itaque oſtendatur* 96LK *minorem eſſe quàm* $3\frac{1}{7}$ *diametri AB; Ergo etiam circuli perimeter minor erit quàm* $3\frac{1}{7}$ *ejuſdem diametri.*

(a) Per axio. 2. hujus.

Ob triangula ſimilia (b) *CEA, CAS, erit* CE : EA :: CA : AS. *Sed* CA = (c) 2 AS; *ergo* CE = 2 EA. *Et ob angulum ACE biſectum rectâ CF,* (d) *erit* EC : CA :: EF : FA; *& compon.* EC + CA : CA :: EA : FA; *& permut.* EC + CA : EA :: CA : FA. *Et eodem modo oſtendetur eſſe* FC + CA : FA :: CA : GA; *&* GC + CA : GA :: CA : HA; *& denique* HC + CA : HA :: CA : KA.

(b) Per 8. l. 6.
(c) Prius.
(d) Per 3. l. 6.

Ponatur EC = 306: *erit* ECq = 93636, *&* EA (e) *erit* = 153, *unde* EAq = 23409, *&* CAq (= ECq (f) − EAq = 93636 − 23409) = 70227. *Sed* $\sqrt{70225}$ = 265. *Ergo* CA *major eſt quàm* 265, *&* EC + CA *major quàm* (306 + 265 =) 571. *Et cùm ſit* EC + CA : EA :: CA : FA, *ſitque ratio* EC + CA *ad* EA (g) *major ratione* 571 *ad* 153, *erit* (h) *etiam ratio* CA *ad* FA *major ratione* 571 *ad* 153, *hoc eſt, (utrumque numerum multiplicando per* 8,) *ratione* 4568 *ad* 1224. *Si itaque ponatur* FA = 1224, *erit* (i) CA *major quàm* 4568.

(e) Prius.
(f) Per prob. 2. poſt. p. 47. l. 1.
(g) Per 8. l. 5.
(h) Per ſch. p. 11. l. 5.
(i) Per 10. l. 5. cum ſchol. p. 7. l. 5.
(k) Per 47. l. 1.

Ponatur igitur FA = 1224, *eritque* FAq = 1498176: *Et cùm* CA *major ſit quàm* 4568, *erit* CAq *majus quàm* 20866624, *adeoque* CFq (= (k) FAq + ACq) *majus erit quàm* 1498176 + 20866624, *hoc eſt, quàm* 22364800. *Sed* $\sqrt{22363441}$ = 4729. *Ergo* FC *major eſt quàm* 4729, *&* FC + CA *major quàm* 4729 + 4568, *hoc eſt, quàm* 9297. *Et cùm ſit* FC + CA : FA :: CA : GA, *ſitque ratio* FC + CA *ad* FA, *major ratione* 9297 *ad* 1224, *erit etiam ratio* CA *ad* GA *major ratione* 9297 *ad* 1224. *Si itaque ponatur* GA = 1224, *erit* CA *major quàm* 9297.

Ponatur igitur GA = 1224, *eritque* GAq = 1498176: *Et cùm* CA *major ſit quàm* 9297, *erit* CAq *majus quàm* 86434209, *adeoque* CGq = GAq + ACq) *majus erit quàm* 1498176 + 86434209, *hoc eſt, majus quàm* 87932385. *Sed* $\sqrt{87928129}$ = 9377. *Ergo* CG *major eſt quàm* 9377, *&* GC + CA *major eſt quàm* 9377 + 9297, *ſive major quàm* 18674. *Et cùm ſit* GC + CA : GA :: CA : HA, *ſitque ratio* GC + CA *ad* GA *major ratione* 18674 *ad* 1224, *ſive (utrumque dimidiando) ratione* 9337 *ad* 612; *erit etiam ratio* CA *ad* HA *major ratione* 9337 *ad* 612. *Si itaque ponatur* HA = 612, *erit* CA *major quàm* 9337.

Ponatur igitur HA = 612, *eritque* HAq = 374544. *Et cùm* CA *major ſit quàm* 9337, *erit* CAq *majus quàm* 87179569, *adeo-*

adeoque CHq (= HAq + ACq) *majus quàm* 374544 + 87179569, *hoc eſt, majus quàm* 87554113. *Sed* $\sqrt{87553449}$ = 9357. *Ergo* CH *major eſt quàm* 9357, & HC + AC *major erit quàm* 9357 + 9337, *hoc eſt, major quàm* 18694. *Et cùm ſit* HC + CA : HA :: CA : KA; *ſitque ratio* HC + CA *ad* HA *major ratione* 18694 *ad* 612, *ſive* (*utrumque dimidiando*) *ratione* 9347 *ad* 306; *erit etiam ratio* CA *ad* KA *major ratione* 9347 *ad* 306. *Si itaque ponatur* 2AK *ſive* LK = 306, *erit* 2AC *ſive* AB *major quàm* 9347, & *ratio* AB *ad* 9347 *major erit ratione* LK *ad* 306; & *proinde, ratio* $3\frac{1}{7}$ AB *ad* ($3\frac{1}{7} \times 9347$ =) $29376\frac{2}{7}$, *major erit* (a) *ratione* 96LK *ad* (96 × 306 =) 29376. *Hæc autem ultima eſt ratio æqualitatis, cùm ſit* 96LK = 29376. *Ergo* $3\frac{1}{7}$ AB *major eſt quàm* $29376\frac{2}{7}$; & *proinde adhuc major quàm* 29376, *ſive quàm* 96LK. *Ambitus ergo polygoni ordinati* 96 *laterum circulo circumſcripti*, & *multo magis perimeter circuli cui circumſcribitur polygonum illud, minor eſt quàm* $3\frac{1}{7}$ *diametri ejuſdem circuli.* Q.E.D.

(a) *Per* 15. *l.* 5.

Pars ſecunda. Circuli perimeter, diametri AB triplum excedit, quantitate majori quàm $\frac{10}{71}$ partibus ejuſdem diametri. *Fig.* 5.

Eſto arcus AD *ſexta pars totius circumferentiæ circularis*; & *continuâ biſectione fiat arc.* AD = 2. *arc.* AE = 4 *arc.* AF = 8 *arc.* AG = 16 *arc.* AH; & *erit arcus* AH $\frac{1}{96}$ *totius circumferentiæ. Ducantur rectæ* BD, BE, BF, BG, BH; & AD, AE, AF, AG, AH; *erit* AH *latus figuræ ordinatæ* 96 *laterum circulo inſcriptibilis, cujus proinde ambitus,* 96 AH. *erit circuli circumferentiâ* (b) *minor. Secent rectæ* AD, BE *ſe invicem in* K, & *propter angulos* EBA, EAD *æqualibus arcubus inſiſtentes*, & *proinde* (c) *æquales*, & *angulum ad* E *communem, triangula* ABE, KAE (d) *erunt ſimilia*, & *proinde* AB : AK :: BE : EA. *Et in triangulo* ABD, *ob angulum* B (e) *biſectum rectâ* BK, *erit* (f) DB : BA :: DK : KA; & *compon.* DB + BA : BA :: DA : KA; & *permut.* DB + BA : DA :: BA : AK :: (*priùs*) BE : EA. *Et pari ratiocinio oſtendetur eſſe* EB + BA : EA :: BF : FA; & FB + BA : FA :: BG : GA; & GB + BA : GA :: BH : HA.

(b) *Per axio.* 1. *hujus.*
(c) *Per* 29. *l.* 3.
(d) *Per cor.* 9. *p* 32. *l.* 1. & *p.* 4. *l.* 6.
(e) *Per* 29. *l.* 3.
(f) *Per* 3. *l.* 6.

Ponatur jam BA = 1560, *eritque* BAq = 2433600, & DA (= *radio* (g) AC) = 780; *unde* DAq = 608400, & DBq (= BAq − DAq) = 1825200. *Sed* $\sqrt{1825201}$ = 1351..

(g) *Per cor.* 1. *p.* 15. *l.* 4.

cumſcriptibilis, cujus proinde ambitus erit 96 LK, circuli circumferentiâ (a) *major. Si itaque oſtendatur 96 LK minorem eſſe quàm* $3\frac{1}{7}$ *diametri AB; Ergo etiam circuli perimeter minor erit quàm* $3\frac{1}{7}$ *ejuſdem diametri.*

Ob triangula ſimilia (b) *CEA, CAS, erit* $CE : EA :: CA : AS$. *Sed* $CA = $ (c) $2\,AS$; *ergo* $CE = 2\,EA$. *Et ob angulum ACE biſectum rectâ CF,* (d) *erit* $EC : CA :: EF : FA$; *& compon.* $EC + CA : CA :: EA : FA$; *& permut.* $EC + CA : EA :: CA : FA$. *Et eodem modo oſtendetur eſſe* $FC + CA : FA :: CA : GA$; *&* $GC + CA : GA :: CA : HA$; *& denique* $HC + CA : HA :: CA : KA$.

Ponatur $EC = 306$: *erit* $ECq = 93636$, *& EA* (e) *erit* $= 153$, *unde* $EAq = 23409$, *&* $CAq\,(= ECq$ (f) $- EAq = 93636 - 23409) = 70227$. *Sed* $\sqrt{70225} = 265$. *Ergo CA major eſt quàm 265, &* $EC + CA$ *major quàm* $(306 + 265 =)\ 571$. *Et cùm ſit* $EC + CA : EA :: CA : FA$, *ſitque ratio* $EC + CA$ *ad EA* (g) *major ratione 571 ad 153; erit* (h) *etiam ratio CA ad FA major ratione 571 ad 153, hoc eſt, (utrumque numerum multiplicando per 8,) ratione 4568 ad 1224. Si itaque ponatur* $FA = 1224$, *erit* (i) *CA major quàm 4568.*

Ponatur igitur $FA = 1224$, *eritque* $FAq = 1498176$: *Et cùm CA major ſit quàm 4568, erit CAq majus quàm 20866624, adeoque CFq* $(=$ (k) $FAq + ACq)$ *majus erit quàm* $1498176 + 20866624$, *hoc eſt, quàm 22364800. Sed* $\sqrt{22363441} = 4729$. *Ergo FC major eſt quàm 4729, &* $FC + CA$ *major quàm* $4729 + 4568$, *hoc eſt, quàm 9297. Et cùm ſit* $FC + CA : FA :: CA : GA$, *ſitque ratio* $FC + CA$ *ad FA, major ratione 9297 ad 1224, erit etiam ratio CA ad GA major ratione 9297 ad 1224. Si itaque ponatur* $GA = 1224$, *erit CA major quàm 9297.*

Ponatur igitur $GA = 1224$, *eritque* $GAq = 1498176$: *Et cùm CA major ſit quàm 9297, erit CAq majus quàm 86434209, adeoque CGq* $= GAq + ACq)$ *majus erit quàm* $1498176 + 86434209$, *hoc eſt, majus quàm 87932385. Sed* $\sqrt{87928129} = 9377$. *Ergo CG major eſt quàm 9377, &* $GC + CA$ *major eſt quàm* $9377 + 9297$, *ſive major quàm 18674. Et cùm ſit* $GC + CA : GA :: CA : HA$, *ſitque ratio* $GC + CA$ *ad GA major ratione 18674 ad 1224, ſive (utrumque dimidiando) ratione 9337 ad 612; erit etiam ratio CA ad HA major ratione 9337 ad 612. Si itaque ponatur* $HA = 612$, *erit CA major quàm 9337.*

Ponatur igitur $HA = 612$, *eritque* $HAq = 374544$. *Et cùm CA major ſit quàm 9337, erit CAq majus quàm 87179569,* ado-

(a) Per axio. 2. hujus.
(b) Per 8. l. 6.
(c) Prius.
(d) Per 3. l. 6.
(e) Prius.
(f) Per prob. 2. poſt. p. 47. l. 1.
(g) Per 8. l. 5.
(h) Per ſch. p. 11. l. 5.
(i) Per 10. l. 5. cum ſchol. p. 7. l. 5.
(k) Per 47. l. 1.

utroque CHq (= *HAq* + *ACq*) *majus quàm* 374544 + 87179569, *hoc eſt, majus quàm* 87554113. *Sed* √ 87553449 = 9357. *Ergo* CH *major eſt quàm* 9357, & *HC* + *AC* *major erit quàm* 9357 + 9337, *hoc eſt, major quàm* 18694. *Et cùm ſit* HC + CA: HA :: CA: KA; *ſitque ratio* HC + CA *ad* HA *major ratione* 18694 *ad* 612, *ſive* (*utrumque dimidiando*) *ratione* 9347 *ad* 306; *erit etiam ratio* CA *ad* KA *major ratione* 9347 *ad* 306. *Si itaque ponatur* 2AK *ſive* LK = 306, *erit* 2AC *ſive* AB *major quàm* 9347, & *ratio* AB *ad* 9347 *major erit ratione* LK *ad* 306; & *proinde, ratio* $3\frac{1}{7}$ AB *ad* ($3\frac{1}{7}$ × 9347 =) $29376\frac{2}{7}$, *major erit* (a) *ratione* 96LK *ad* (96 × 306 =) 29376. *Hæc autem ultima eſt ratio æqualitatis, cùm ſit* 96LK = 29376. *Ergo* $3\frac{1}{7}$ AB *major eſt quàm* $29376\frac{2}{7}$; & *proinde adhuc major quàm* 29376, *ſive quàm* 96LK. *Ambitus ergo polygoni ordinati* 96 *laterum circulo circumſcripti*, & *multo magis perimeter circuli cui circumſcribitur polygonum illud, minor eſt quàm* $3\frac{1}{7}$ *diametri ejuſdem circuli.* Q. E. D.

(a) Per 15. l. 5.

Pars ſecunda. Circuli perimeter, diametri AB triplum excedit, quantitate majori quàm $\frac{10}{71}$ partibus ejuſdem diametri.

Fig. 5.

Eſto arcus AD *ſexta pars totius circumferentiæ circularis*; & *continuâ biſectione fiat arc.* AD = 2. *arc.* AE = 4 *arc.* AF = 8 *arc.* AG = 16 *arc.* AH; & *erit arcus* AH $\frac{1}{96}$ *totius circumferentiæ. Ducantur rectæ* BD, BE; BF, BG, BH; & AD, AE, AF, AG, AH; *erit* AH *latus figuræ ordinatæ* 96 *laterum circulo inſcriptibilis, cujus proinde ambitus*, 96AH. *erit circuli circumferentiâ* (b) *minor. Secent rectæ* AD, BE *ſe invicem in* K, & *propter angulos* EBA, EAD *æqualibus arcubus inſiſtentes*, & *proinde* (c) *æquales*, & *angulum ad* E *communem, triangula* ABE, KAE (d) *erunt ſimilia*, & *proinde* AB: AK :: BE: EA. *Et in triangulo* ABD, *ob angulum* B (e) *biſectum rectâ* BK, *erit* (f) DB: BA :: DK: KA; & *compon.* DB + BA: BA :: DA: KA; & *permut.* DB + BA: DA :: BA: AK :: (*priùs*) BE: EA. *Et pari ratiocinio oſtendetur eſſe* EB + BA: EA :: BF: FA; & FB + BA: FA :: BG: GA; & GB + BA: GA :: BH: HA.

(b) Per axio. 1. hujus.
(c) Per 29. l. 3.
(d) Per cor. 9. p. 32. l. 1. & p. 4. l. 6.
(e) Per 29. l. 3.
(f) Per 3. l. 6.

Ponatur jam BA = 1560, *eritque* BAq = 2433600, & DA (= *radio* (g) AC) = 780; *unde* DAq = 608400, & DBq (= BAq − DAq) = 1825200. *Sed* √ 1825201 = 1351. *Ergo*

(g) Per cor. 1. p. 15. l. 4.

S

Ergo DB *minor eſt quàm* 1351, *&* DB + BA *minor quàm* (1351 + 1560 =) 2911. *Quare ratio* 2911 *ad* 780, *hoc eſt*, (*utrumque numerum per* 100 *multiplicando*,) *ratio* 291100 *ad* 78000, *major eſt ratione* DB + BA *ad* DA, *ſive* BE *ad* EA. *Si itaque ponatur* EA = 78000, *erit* BE *minor quàm* 291100.

Ponatur igitur EA = 78000, *eritque* EAq = 6084000000. *Et cùm ſit* BE *minor quàm* 291100, *erit* BEq *minus quàm* 84739210000, *&* BAq (= BEq + EAq) *minus quàm* 90823210000. *Sed* √ 90826890625 = 301375. *Ergo* BA *minor eſt quàm* 301375, *&* EB + BA *minor quàm* (291100 + 301375 =) 592475. *Quare ratio* 592475 *ad* 78000, *hoc eſt*, (*utrumque numerum dividendo per* 325, *& quotos inde ortos per* 11 *multiplicando*,) *ratio* 20053 *ad* 2640, *ratione* EB + BA *ad* EA, *ſive* BF *ad* FA *major erit*. *Si itaque ponatur* FA = 2640, *erit* BF *minor quàm* 20053.

Ponatur igitur FA = 2640, *eritque* FAq = 6969600. *Et cùm* BF *minor ſit quàm* 20053, *erit* BFq *minus quàm* 402122809, *&* BAq (= BFq + FAq) *minus quàm* 409092409. *Sed* √ 409131529 = 20227. *Ergo* BA *minor eſt quàm* 20227, *&* FB + BA *minor quàm* 40280. *Quare ratio* 40280 *ad* 2640, *hoc eſt*, (*utrumque dividendo per* 40, *& quotos inde ortos multiplicando per* 6,) *ratio* 6042 *ad* 396 *major eſt ratione* FB + BA *ad* FA, *ſive* BG *ad* GA. *Si itaque ponatur* GA = 396, *erit* BG *minor quàm* 6042.

Ponatur igitur GA = 396, *eritque* GAq = 156816. *Et cùm* BG *ſit minor quàm* 6042, *erit* BGq *minus quàm* 36505764, *&* BAq (= BGq + GAq) *minus quàm* 36662580. *Sed* √ 36663025 = 6055. *Ergo* BA *minor eſt quàm* 6055, *&* GB + BA *minor quàm* 12097. *Quare ratio* 12097 *ad* 396, *hoc eſt*, (*utrumque duplicando*,) *ratio* 24194 *ad* 792 *major eſt ratione* GB + BA *ad* GA, *ſive ratione* BH *ad* HA. *Si itaque ponatur* HA = 792, *erit* BH *minor quàm* 24194.

Ponatur igitur HA = 792, *eritque* HAq = 627264. *Et cùm* BH *minor ſit quàm* 24194, *erit* BHq *minus quàm* 585349636, *&* BAq (= BHq + HAq) *minus quàm* 585976900. *Sed* √ 585978849 = 24207. *Ergo* BA *minor eſt quàm* 24207, *& ratio* AH *ad* AB *major erit ratione* 792 *ad* 24207, *ſive* (*utrumque dividendo per* 3,) *major ratione* 264 *ad* 8069; *& proinde ratio* 96 AH *ad* AB *major erit ratione* (96 × 264 =) 25344 *ad* 8069. *Et quoniam* (25344, *ſive*) 25344 × 1 *ſuperat* ($25343\frac{34}{71}$, *ſive*) 8069 × $3\frac{10}{71}$; *erit*

(a) *ra-*

(a) *ratio* 25344 *ad* 8069 *major ratione* $3\frac{10}{71}$ *ad* 1, *ac* (b) *proinde ratio* 96 *AH ad AB major eſt ratione* $3\frac{10}{71}$ *ad* 1. *Ergo* (c) *factum extremorum majus erit facto mediorum, hoc eſt,* 96 *AH ſive ambitus polygoni circulo inſcripti, & proinde circuli circumferentia cui inſcribitur, major erit quàm* $3\frac{10}{71}$ *diametri AB. Q. E. D.*]

(a) Per cor. 7 p. 16 l. 5.
(b) Per ſch. p. 11 l. 5.
(c) Per cor. 6. p. 16. l. 6.

Quod ſi ad polygona plurium adhuc laterum Geometricum ratiocinium velimus extendere, limites jam ſtatutos arctare poterimus magis magiſque ſine termino, atque ita propiùs in infinitum ad veram proportionem accedere. Præſtitum eſt hoc a Ludolpho à Ceulen, Grimbergero, Metio, Snellio, aliiſque.

[*Cùm autem tangens graduum* 36 *in* 10 *ductus, det pentagoni* circumſcripti; *& ſinus graduum* 36 *in* 10 *ductus, det pentagoni* inſcripti *perimetrum: Cùm etiam conſimiliter, tangens gradûs dimidii in* 720 *ducta, polygoni laterum* 360 circumſcripti, *& ſinus gradûs dimidii in* 720 *ductus, polygoni laterum* 360 inſcripti *perimetrum exhibeat; atque ita porro in infinitum; Obſcurum eſſe nequit quo pacto e datis jam ſinuum atque tangentium tabulis, numeri ſequentes inveniri poterunt.*] Vide Fig. 2.

Proportiones præcipuas hactenus inventas hîc ſubjicio.

Prima eſt Archimedis, hujuſmodi:

Diameter 7.
Circumf. 22. major verâ.
Diameter 71.
Circumf. 223. minor verâ.

[*Nam* $\frac{22}{7} = 3\frac{1}{7}$, *&* $\frac{223}{71} = 3\frac{10}{71}$.]

Rationes 22. ad 7, & 223. ad 71, ſi ad commune conſequens reducantur, (quod fit eodem modo, quo fractiones revocantur ad eundem denominatorem;) rationes orientur 1562, ad 497. & 1561. ad 497.

Poſitâ igitur diametro partium 497,
erit circumferentia major verâ 1562.
& circumferentia minor verâ 1561.

Utraque igitur a verâ differt quantitate minori, quàm ſit $\frac{1}{497}$ pars diametri.

Quod ſi rationes 7 ad 22, & 71 ad 223 reducantur ad commune conſequens; provenient rationes 1561 ad 4906, & 1562 ad 4906.

Poſitâ igitur circumferentiâ partium 4906.
erit diameter minor verâ 1561.
diameter major verâ 1562.

Utraque igitur a verâ diametro differt quantitate minori, quam ſit pars $\frac{1}{4906}$ circumferentiæ.

Proportio tradita a Metio eſt Archimedeâ multo accuratior. Juxta hanc eſt

Diameter 113.
Circumf. 355.

Inter omnes parvis numeris conſtantes, nulla veræ propinquior: ex hac enim, poſitâ diametro 10,000,000, provenit circumferentia 31,415,929, quæ a verâ ſolùm penes notam primam 9 differt exceſſu paulo majore, quàm ſint duæ particulæ decimillioneſimæ diametri.

Sed utraque multo exactior eſt gemina illa Ludolphi a Ceulen: prioris termini conſtant notis 21, poſterioris verò notis 36.

Diameter
100,000000,000000,000000.
Circumf. major verâ.
314,159265,358979,323847.
Circumf. minor verâ
314,159265,358979,323846.

Differentia utriuſque circumferentiæ eſt particula una diametri, denominata a numero, qui conſtat unitate & 20 cifris; ac proinde tam hæc quàm illa a verâ circumferentiâ differt minori quantitate quàm ſit diametri particula dicta, videlicet centies millioneſies millioneſies millioneſima.

Diameter
100000,000000,000000,000000,000000,000000.
Circumf. major verâ
314159,265358,979323,846264,338327,950289.
Circumf. minor verâ.
314159,265358,979323,846264,338327,950288.

Differentia utriuſque circumferentiæ, inter quam vera exiſtit, eſt diametri particula una denominata a numero, qui conſtat unitate & 35. cifris, quæ particula ad diametrum, minorem habet proportionem, quàm arenula una ad orbem terræ. Non enim conſtat orbis terræ tot arenulis, quot continentur particulæ tales in diametro.

Fruſtra igitur ſit ulteriùs progredi. Progrediere nihilominus ultra in infinitum, ſi ratiocinium Geometricum, cujus methodum expeditam tradit Snellius, placuerit continuare.

[Poſitâ

[*Poſitâ verò Circumferentiâ partium*
1,000000,000000,000000,000000,000000,000000,
Diameter erit quamproxime, partium
0,318309,886183,790671,537767,926745,028724.

Corol. 1. *Cùm in numeris minùs accuratis, ſit circuli circumferentia ad diametrum ut* 22 *ad* 7; *erit circulus in ejuſmodi numeris ad quadratum inſcriptum, ut* 11 *ad* 7; *ad quadratum circumſcriptum ut* 11 *ad* 14; *& ad radii quadr. ut* 22 *ad* 7. *Sequuntur hæc ex cor.* 2. *prop. præced.*

Cor. 2. *Cùm verò, in numeris accuratioribus, circuli circumferentia ſit ad diametrum, ut* 355 *ad* 113; *erit in iiſdem numeris, circulus ad quadratum inſcriptum ut* 355 *ad* 226; *ad quadratum circumſcriptum ut* 355 *ad* 452; *& ad radii quadratum ut* 355 *ad* 113.

Cor. 3. *Si autem pro circumferentiâ ponatur unitas cum quinque cifris annexis; erit circulus ad quadratum inſcriptum ut* 100000 *ad* 63662; *ad quadratum circumſcriptum ut* 100000 *ad* 127324; *& ad radii quadratum ut* 100000 *ad* 31831 *circiter.*

Cor. 4. *Si denique pro diametro ponatur unitas cum quinque cifris annexis; erit circulus ad quadratum inſcriptum ut* 157080 *ad* 100000; *ad quadratum circumſcriptum ut* 78540 *ad* 100000; *& ad radii quadratum ut* 314159 *ad* 100000, *fere.*

Scholium.

PRoportionis jam traditæ fructus eximii, ſunt hi qui ſequuntur.

Inventio Diametri ex circumferentiâ.

MAjorem terminum unius è proportionibus jam traditis ſtatue primo loco, minorem ſecundo, circumferentiam tertio; his tribus numeris quæratur per regulam auream quartus proportionalis. Is erit quæſita diameter.

Ut ſi detur circumferentia maximi circuli terræ, milliaria continere Belgica unius horæ 8640, & quæratur terræ diameter; ſic ſtabunt termini:

355 : 113 :: 8640 :

multiplica jam ſecundum per tertium, & productum divide per primum; proveniunt milliaria Belgica $2750\frac{1}{71}$ pro diametro orbis terræ.

[*Errare videtur noſter, circumferentiæ terreſtri milliaria Belgica* 8640 *tribuendo. Ex dimenſione Snellii, ambitus terræ* mil-

milliaria Belgica 6840 *continet, uti apud Varenium videre eſt; pro quibus Tacquetus* 8640 *milliaria poſuit, numerum centenarium & millenarium ex incuriâ tranſponendo. Ex vero igitur numero Snelliano, tyronibus exercitationis ergo, computum de novo inſtituendi prabetur occaſio.*]

Inventio circumferentiæ ex Diametro.

TErminus minor unius e proportionibus ſupra traditis ſtatuatur primo loco, major ſecundo, diameter nota tertio: His tribus numeris quæratur quartus proportionalis. Is dabit quæſitam circumferentiam.

Ut ſi detur orbis terræ diameter continere milliaria Belgica unius horæ $2750\frac{14}{71}$. & quæratur ambitus; termini ita ſtabunt.

$113 : 355 :: 2750\frac{14}{71} : .$

Tunc ſecundum multiplica per tertium, & productum divide per primum: provenient milliaria Belgica 8640. pro ambitu orbis terræ.

Quàm modice hæc circumferentia veram excedat, dictum eſt ſupra, exceſſu videlicet paulo majore, quàm ſint diametri terreſtris duæ particulæ decimillioneſimæ, hoc eſt, 9 circiter aut 10. pedibus Rhynlandicis, quorum 18000. conſtituunt milliare horarium. Quod ſi utamur proportione Ludolphinâ etiam priori, cujus termini conſtant 21. notis; invenietur circumferentia inſenſibiliter a verâ differens, non ſolùm diametro datâ milliariorum Belgicorum 2750. qualis eſt terræ; verùm etiam, licèt diameter ponatur centum millionum eorundem milliariorum, qualis fortaſſe eſt diameter firmamenti. Hac enim poſitâ, proveniet circumferentia minori quantitate a verâ differens, quàm una centimillioneſima particula pedis Rhynlandici. Quòd ſi, ad inveſtigandam circumferentiam orbis terræ, utamur proportione Archimedis, intervallum circumferentiarum verâ majoris ac minoris excedet 5 milliaria Belgica. Non eſt igitur adhibenda Archimedea proportio, niſi in quantitate parvâ: imo ſemper expediet Metianâ uti, quæ & modicis conſtat terminis, & pluſquam millies exactior eſt.

Circuli dimenſio.

SEmidiameter multiplicata per dimidiam circumferentiam producit aream circuli: quemadmodum patet ex coroll. 1. p. 5. hujus.

Ut

Ut ſi ſemidiametrum orbis terræ, quæ neglectâ fractione continet milliaria Belgica 1375. multiplicemus per dimidium terræ ambitum, per milliaria nempe Belgica 4320; provenient milliaria Belgica quadrata 5, 940000 pro circulo maximo terræ. Differentia inventæ circularis areæ a verâ habetur, ſi differentia inventæ circumferentiæ dimidiæ a dimidiâ verâ, ducatur in ſemidiametrum datam; aut ſi differentia ſemidiametri inventæ a verâ, ducatur in datam ſemicircumferentiam.

[Dimenſio ſectoris circularis AEBG (vel AECG,) ex datis radio circuli AE, & arcu ſectoris EBG (vel ECG.) Fig. 26.

Fiat, ut 113 ad 355, ita (a) *ſemidiameter data ad ſemicircumferentiam circuli: deinde, ut gradus 360 ad gradus arcûs dati, ita* (b) *ſemicircumferentia jam inventa, ad arcûs ſectoris dimidium EB, (vel EC;) quo in radium datum ducto,* (c) *exorietur area ſectoris quæſiti.* (a) *Per* 15. *l.* 5. (b) *Per eand.* (c) *Per cor.* 3. *p.* 4. *hujus, & ſchol. p.* 41. *l.* 1.

Et, ſi area trianguli rectilinei AEG, ſectori majori AEBG addatur, (vel a minore AECG ſubducatur;) habebitur circuli ſegmentum majus EDGB, (vel minus EDGC.) Area verò iſtius trianguli (d) *eſt rectang. AD* $\times$ *DE. Eſt autem ED* (e) *ſinus, & AD coſinus arcûs EB (vel EC.) Ex datis itaque ſegmenti arcu EBG (vel ECG) & baſi EG; vel ex datis radio EA & baſi EG; vel denique ex radio EA & arcu EBG (vel ECG;) invenientur ED & DA, atque adeo area trianguli EAG. Verùm hæc potiùs e trigonometriâ petenda ſunt.*] (d) *Per def. p.* 41. *l.* 1. (e) *Per def.* 1c. *l.* 3. & *cor.* 1. *p.* 3. *l.* 3.

Dimenſio Cylindrorum & Conorum.

EAM hîc appono, quòd a circuli dimenſione pendeat. Cylindrus igitur & priſma quodvis producitur ex altitudine multiplicatâ per baſim: Conus & pyramis ex tertiâ altitudinis parte in baſim ductâ; ſunt enim partes tertiæ cylindrorum ac priſmatum, eandem cum ipſis baſim & altitudinem habentium, per 10. & 7. l. 12.

Sit baſis Cylindri aut coni 50. ped. quadratorum, altitudo pedum 100. Duc 100. in 50, proveniunt 5000. pedes cubici pro ſoliditate cylindri. Duc tertiam partem altitudinis 100, nimirum $33\frac{1}{3}$ in 50, proveniunt $1666\frac{2}{3}$ pedes cubici pro ſoliditate coni.

Fig. 14. [Dimenſio Coni truncati N Q R O; ex datis baſibus parallelis ZZ, SS, & altitudine V D.

A*D hoc problema ſolvendum, lemma ſequens præmittatur:* Ut eſt differentia radiorum qui ſunt in baſibus, (N V — Q D,) ad radium minorem (Q D;) ita eſt altitudo coni truncati (V D,) ad altitudinem partis deficientis (D P.) *Ductâ enim in triangulo NVP, rectâ DI ad PN parallelâ, erit* (a) *VI: IN:: VD: DP. Sed propter parallelogrammum NIDQ,* (b) *eſt IN = QD, & proinde VI = NV — QD. Ergo liquet propoſitum.*

(a) Per 2. l. 6. (b) Per 34. l. 1.

Datis itaque tribus prioribus, invenietur quarta DP, altitudo nempe partis deficientis QPR, cujus altitudinis pars tertia in baſem SS ducta, dabit partem illam deficientem QPR. Deinde pars tertia rectarum PD + DV, ſive altitudinis coni completi, ducta in baſem ZZ, dabit conum completum NPO; a quo ſi ſubducatur pars deficiens QPR, relinquetur conus truncatus NQRO.

Porro notandum eſt, hanc demonſtrationem non minùs in coni truncati ſcaleni, quàm in recti dimenſione valituram, uti ex iis quæ de pyramidis truncatæ dimenſione in libro elementorum duodecimo ſcripſimus, ſatis patet.]

PROPOSITIO VII.

Fig. 6. & 7. l. 12.

C*Irculorum peripheriæ eam inter ſe proportionem habent, quam diametri,* [ſive radii.]

Nam polygonorum ſimilium circulo ſine fine inſcriptibilium ambitus ſunt inter ſe ſemper ut (*c*) diametri AF & IC. Sed hi (*d*) ambitus in peripherias deſinunt. Ergo etiam peripheriæ ſunt inter ſe ut diametri. Quod erat demonſtrandum.

(c) Per cor. 1. p. 1. l. 12. (d) Per 9. hujus.

PROPOSITIO VIII.

Fig. 6. Archimed.

S*Uperficies priſmatis cylindro tam circumſcripti quàm inſcripti, æquatur rectangulo, cujus altitudo eſt latus cylindri, baſis verò æqualis perimetro baſis priſmaticæ.*

1. Pars.

1. Pars. Priſmatis conſcripti ſuperficies tangit cylindrum ſecundùm lineas EA, NF, &c. quæ ſunt cylindri latera; hæc autem (quòd ex hyp. cylindrus ſit rectus) ad planum baſeos recta (*a*) ſunt, ac proinde etiam (*b*) recta ad lineas CG, GM, &c. Sunt verò & æqualia inter ſe. Igitur unum cylindri latus communis eſt omnium rectangulorum CO, OM MH, &c. altitudo. Conſcripti igitur priſmatis ſuperficies æquatur (*c*) rectangulo ſub ambitu baſis priſmaticæ, & priſmatis ſeu cylindri latere contento.

Eadem eſt ratio ſecundæ partis. Nam latus cylindri [*BD, vel IK, vel QP, &c.*] communis rurſum eſt altitudo rectangulorum BDIK, KIQP, &c. quæ conſtituunt ſuperficiem priſmatis inſcripti.

(a) *Per def.* 3. *l.* 12. *&* *p.* 8. *l.* 11.
(b) *Per def.* 3. *l.* 11.
(c) *Patet ex* 1. *l.* 6.

PROPOSITIO IX.

Pyramidis ordinatæ cono recto circumſcriptæ ſuperficies, æqualis eſt triangulo, cujus baſis eſt baſeos pyramidalis circumferentia (FHLD,) altitudo autem latus coni (BG.) *Fig.* 7.

Et pyramidis ordinatæ cono recto inſcriptæ ſuperficies æquatur triangulo; cujus baſis eſt baſeos pyramidalis circumferentia, altitudo verò perpendicularis (BO) à vertice in latus baſeos deducta.

1. Pars. Ducantur ad contactus G, K, M rectæ BG, BK, BM. Erunt hæ recti coni latera, ac proinde æquales. Et quia axis BA (*d*) rectus eſt baſis plano FKD, etiam planum (*e*) GBA plano FKD rectum erit. Atqui HG perpendicularis (*f*) eſt ad AG communem ſectionem planorum FKD & GBA. Ergo HG etiam (*g*) recta eſt plano GBA, ac proinde perpendicularis quoque eſt ad (*h*) ipſam BG. Ergo GB latus coni erit altitudo trianguli FBH. Eodem modo latus coni erit altitudo reliquorum HBL, LBD, &c. Igitur triangulum circumferentiâ FHLD, & latere coni comprehenſum (*i*) æquatur ſuperficiei pyramidis circumſcriptæ abſque baſi. Quod erat primum.

2. Partis ſimilis fere demonſtratio eſt.

[*Ponatur latera baſeos inſcriptæ pyramidis ordinatæ, lateribus circumſcriptæ parallela; & ſecet latus CI planum GBA in O, & jungatur OB, eritque CI ad planum AOB* (k) *recta, & proinde rectis AO, BO, à centro baſeos & à vertice coni ductis* (l) *perpendicularis. Sed omnes ejuſmodi rectæ*

(d) *Per hyp.*
(e) *Per* 18. *l.* 11.
(f) *Per* 18. *l.* 3.
(g) *Collig. ex def.* 4. *l.* 11.
(h) *Per def.* 3. *l.* 11.
(i) *Patet ex* 1. *l.* 6.
(k) *Per* 8. *l.* 11.
(l) *Per def.* 3. *l.* 11.

Fig. 14. [Di

A

— Q
trun
Duct
(a) Per 2. l. 6. erit
NID
(b) Per 34. l. 1. Ergo
D.
do ne
in ba
inde
pleti
quo
catu
P
trun
iis
duo

Fig. 6. & 7. l. 12. C

N
(c) Per cor. 2. p. 1. l. 12. bilit
IC.
(d) Per 9. hujus. etia
mo

AO à centro ad quodvis baſeos polygoni ordinati latus perpendiculares, (a) ſunt æquales, & proinde in omnibus triangulis BAO, propter axem BA communem & ad planum baſeos rectum, & omnia latera AO ſibi invicem æqualia, (b) erunt etiam omnes rectæ BO æquales. Omnia igitur triangula quæ pyramidis inſcriptæ ſuperficiem conſtituunt, æqualem habent altitudinem, nempe perpendicularem BO, à cujuſvis trianguli vertice B ad baſem demiſſa; & ſimul ſumpta (c) æquabuntur (hoc eſt, ſuperficies pyramidis cono recto inſcriptæ æquabitur) triangulo, cujus baſis eſt baſeos pyramidalis inſcriptæ circumferentia, & cujus altitudo eſt perpendicularis BO. Quod erat alterum.

(a) Per ... l. ... (b) Per ... l. ... (c) Patet ex 2. l. 6.

Aliter. Cùm triangula quæ pyramidis inſcriptæ ſuperficiem componunt, pro baſibus habeant æqualia polygoni ordinati, quod baſi coni inſcribitur, latera, & pro cruribus æqualia coni recti latera; triangula iſta erunt ſibi mutuò æquilatera, (d) æquiangula, & (cùm ſibi mutuò impoſita (e) congruant,) altitudinis æqualis. Unde ut priùs, triangulum quod continetur ſub altitudine communi, & ſub baſi quæ omnibus triangulorum baſibus ſive quæ perimetro polygoni inſcripti æquetur, triangulis iſtis, ſive pyramidis inſcriptæ ſuperficiei (f) æquale erit.]

(d) Per 8. l. 1. (e) Per ax. 8. l. 1. (f) Patet ex 2. l. 6.

PROPOSITIO X.

SUperficies priſmatis ordinati cylindro recto circumſcripti deſinit (g) in cylindri ſuperficiem: & pyramidis ordinatæ cono recto circumſcriptæ ſuperficies in coni ſuperficiem deſinit.

(g) Vide def. 5. l. 12.

Fig. 6. 1. Pars. Priſmatum ordinatorum cylindro ſine fine conſcriptorum & inſcriptorum ſuperficiès, habebunt tandem inter ſe differentiam datâ minorem, uti facile patebit ex 8. & 3. hujus. Multo igitur magis ſuperficies circumſcripti priſmatis à ſuperficie cylindri, inter inſcriptam & circumſcriptam mediâ, differet differentiâ minori quacunque datâ, hoc eſt, (h) deſinit in cylindricam ſuperficiem, minùs ſemper ac minus excedendo.

(h) Per def. 6. l. 12. Fig. 7. 2. Pars. Eodem modo oſtenditur ex 9. & 3. hujus.

In figuris tantùm exhibentur cylindri & coni ſemiſſes, ne multitudo linearum confuſionem pareret. Cæterum cogitandi ſunt cylindrus & conus integri, quos priſmata & pyramides circumſcriptæ ambiunt. Sic enim clariùs appareret planas ſuperficies circumſcriptas eſſe majores ex 2. axiomate.

[Scho-

Scholium. 1. *Cùm propoſitiones 4. ſequentes, & quædam e corollariis inde deductis, ratiocinio aliquantum prolixiori demonſtrentur, & eo ordine diſponantur, ut neceſſariò per ambages procedendum ſit; opus tyronibus haud ingratum me facturum ſpero, ſi propoſitiones illas, unà cum omnibus earum corollariis, methodo naturali & expeditâ, ex hac prop.* 10. *deduxerim.*

Corollaria ex primâ parte prop. 10.

1 H*Inc ſequitur, cylindri recti ſuperficiem* CD, *æquari rectangulo ſub* CB *latere cylindri, &* BN *baſeos peripheriâ. Superficies enim priſmatum cylindro ſine fine circumſcriptorum, æquales ſemper* (a) *ſunt rectangulis ſub latere cylindri & baſium priſmaticarum perimetris. Sed ejuſmodi ſuperficies priſmatica in* (b) *ſuperficiem cylindricam, & perimetri baſium priſmaticarum in* (c) *peripheriam baſeos cylindri tandem deſinunt.* Ergo (d) *ſuperficies cylindri æquatur rectangulo ſub latere cylindri, & ſub baſeos peripheriâ.*

Aliter. *Applicetur ad ſuperficiem cylindricam charta rectangula, altitudinis cylindri altitudini æqualis, & baſeos quæ peripheria baſeos cylindricæ æquetur; & inter ſe congruent charta atque ſuperficies cylindrica: ideoque* (e) *æquales ſunt.* (*Eſt cor.* 1. *pr. ſeq.*)

2. *Hinc rectangulorum proprietates ſuperficiebus cylindricis rectis conveniunt, ſi pro rectangulorum altitudinibus ponantur latera cylindrorum; & pro baſibus, cylindricarum baſium peripheriæ, vel etiam quandoque diametri, quæ eandem cum peripheriis proportionem* (f) *habent. Adeoque* 1. *Cylindricæ ſuperficies æque altæ,* (g) *ſunt inter ſe ut baſium diametri.* (*Eſt cor.* 2. *pr. ſeq.*) 2. *Quæ baſes habent æquales, ſunt* (h) *inter ſe ut cylindrorum latera.* (*Eſt cor.* 3. *p. ſeq.*) 3. *Quæ ſimiles ſunt,* (i) *erunt in duplicatâ ratione diametrorum quæ in baſibus ſunt.* (*Eſt cor.* 4. *p. ſeq.*) 4. *Et quælibet,* (k) *ſunt inter ſe in ratione compoſitâ ex rationibus laterum, & diametrorum Eſt cor.* 5. *p.* 11.) 5. *Si æquales ſint,* (l) *reciprocant latera & baſium diametros; & ſi reciprocent, æquales ſunt.* (*Eſt cor.* 6. *p.* 11.) 6. *Si latus in baſeos peripheriam ducatur,* (m) *habebitur ſuperficiei cylindricæ area.* (*Eſt cor.* 7. *prop. ſeq.*)

3. *Cylindri recti ſuperficies* CD, *eſt ad baſim* BN, *ut cylindri latus* BC *eſt ad* BO, *quartam partem diametri baſeos. Eſt enim ſuperficies cylindrica* (n) *æqualis rectangulo ſub latere* BC *& peripheriâ baſeos. Sed baſis cylindri* (o) *æquatur rectangulo ſub* BO *quartâ parte diametri baſeos & eâdem peripheriâ:*

Quare

Fig. 8.

(a) Per 8. hujus.
(b) Per hanc prop.
(c) Per 3. hujus.
(d) Per 1. hujus.
(e) Per ax. 7. l. 1.
(f) Per 7. hujus.
(g) Per 1. l. 6. & 7. hujus.
(h) Per cor. 1. p. 1. l. 6.
(i) Per 20. l. 6. & 7. hujus.
(k) Per 23. l. 6.
(l) Per 14. l. 6.
(m) Per ſch. p. 34. l. 1.
(n) Per cor. 1. prim.
(o) Per cor. 1. p. 5. hujus.

AO à centro ad quodvis baſeos polygona ordinata latus perpendiculares, (a) *ſunt æquales, & proinde in omnibus triangulis BAO, propter axem BA communem & ad planum baſeos rectum, & omnia latera AO ſibi invicem æqualia,* (b) *erunt etiam omnes rectæ BO æquales. Omnia igitur triangula quæ pyramidis inſcriptæ ſuperficiem conſtituunt, æqualem habent altitudinem, nempe perpendicularem BO, à cujuſvis trianguli vertice B ad baſem demiſſa; & ſimul ſumpta* (c) *æquabuntur (hoc eſt, ſuperficies pyramidis cono recto inſcriptæ æquabitur) triangulo, cujus baſis eſt baſeos pyramidalis inſcriptæ circumferentia, & cujus altitudo eſt perpendicularis BO. Quod erat alterum.*

(a) Per 14. l. 3.
(b) Per 4. l. 1.
(c) Patet ex 1. l. 6.

Aliter. *Cùm triangula quæ pyramidis inſcriptæ ſuperficiem componunt, pro baſibus habeant æqualia polygoni ordinati, quod baſi coni inſcribitur, latera, & pro cruribus æqualia coni recti latera; triangula iſta erunt ſibi mutuò æquilatera,* (d) *æquiangula, & (cùm ſibi mutuò impoſita* (e) *congruant,) altitudinis æqualis. Unde ut priùs, triangulum quod continetur ſub altitudine communi, & ſub baſi quæ omnibus triangulorum baſibus, ſive quæ perimetro polygoni inſcripti æquetur, triangulis iſtis, ſive pyramidis inſcriptæ ſuperficiei* (f) *æquale erit.*]

(d) Per 8. l. 1.
(e) Per ax. 8. l. 1.
(f) Patet ex 1. l. 6.

PROPOSITIO X.

Superficies priſmatis ordinati cylindro recto circumſcripti deſinit (g) *in cylindri ſuperficiem: & pyramidis ordinatæ cono recto circumſcripta ſuperficies in coni ſuperficiem deſinit.*

(g) Vide def. 6. l. 12.

Fig. 6.

1. Pars. Priſmatum ordinatorum cylindro ſine fine circumſcriptorum & inſcriptorum ſuperficiès, habebunt tandem inter ſe differentiam datâ minorem, uti facile patebit ex 8. & 3. hujus. Multo igitur magis ſuperficies circumſcripti priſmatis à ſuperficie cylindri, inter inſcriptam & circumſcriptam mediâ, differet differentiâ minori quacunque datâ, hoc eſt, (*h*) deſinit in cylindricam ſuperficiem, minùs ſemper ac minus excedendo.

(h) Per def. 6. l. 12.

Fig. 7.

2. Pars. Eodem modo oſtenditur ex 9. & 3. hujus.

In figuris tantùm exhibentur cylindri & coni ſemiſſes, ne multitudo linearum confuſionem pareret. Cæterum cogitandi ſunt cylindrus & conus integri, quos priſmata & pyramides circumſcriptæ ambiunt. Sic enim clariùs apparet planas ſuperficies circumſcriptas eſſe majores ex 2. axiomate.

[Scho-

Scholium. 1. *Cùm propoſitiones 4. ſequentes, & quædam è corollariis inde deductis, ratiocinio aliquantum prolixiori demonſtrentur, & eo ordine diſponantur, ut neceſſariò per ambages procedendum ſit; opus tyronibus haud ingratum me facturum ſpero, ſi propoſitiones illas, unà cum omnibus earum corollariis, methodo naturali & expeditâ, ex hac prop. 10. deduxerim.*

Corollaria ex primâ parte prop. 10.

1 *Hinc ſequitur, cylindri recti ſuperficiem CD, æquari rectangulo ſub CB latere cylindri, & BN baſeos peripheriâ. Superficies enim priſmatum cylindro ſine fine circumſcriptorum, æquales ſemper* (a) *ſunt rectangulis ſub latere cylindri & baſium priſmaticarum perimetris. Sed ejuſmodi ſuperficies priſmaticæ in* (b) *ſuperficiem cylindricam, & perimetri baſium priſmaticarum in* (c) *peripheriam baſeos cylindri tandem deſinunt. Ergo* (d) *ſuperficies cylindri æquatur rectangulo ſub latere cylindri, & ſub baſeos peripheriâ.*

Fig. 8.
(a) Per 8. hujus.
(b) Per hanc prop.
(c) Per 3. hujus.
(d) Per 1. hujus.

Aliter. *Applicetur ad ſuperficiem cylindricam charta rectangula, altitudinis cylindri altitudini æqualis, & baſeos quæ peripheriæ baſeos cylindricæ æquetur; & inter ſe congruent charta atque ſuperficies cylindrica: ideoque* (e) *æquales ſunt.* (*Eſt cor.* 1. *pr. ſeq.*)

(e) Per axi. 7. l. 1.

2. *Hinc rectangulorum proprietates ſuperficiebus cylindricis rectis conveniunt, ſi pro rectangulorum altitudinibus ponantur latera cylindrorum; & pro baſibus, cylindricarum baſium peripheriæ, vel etiam quandoque diametri, quæ eandem cum peripheriis proportionem* (f) *habent. Adeoque* 1. *Cylindricæ ſuperficies æque altæ,* (g) *ſunt inter ſe ut baſium diametri.* (*Eſt cor.* 2. *pr. ſeq.*) 2. *Quæ baſes habent æquales, ſunt* (h) *inter ſe ut cylindrorum latera.* (*Eſt cor.* 3. *p. ſeq.*) 3. *Quæ ſimiles ſunt,* (i) *erunt in duplicatâ ratione diametrorum quæ in baſibus ſunt.* (*Eſt cor.* 4. *p. ſeq.*) 4. *Et quælibet,* (k) *ſunt inter ſe in ratione compoſitâ ex rationibus laterum, & diametrorum* (*Eſt cor.* 5. *p.* 11.) 5. *Si æquales ſint,* (l) *reciprocant latera & baſium diametros; & ſi reciprocent, æquales ſunt.* (*Eſt cor.* 6. *p.* 11.) 6. *Si latus in baſeos peripheriam ducatur,* (m) *habebitur ſuperficiei cylindricæ area.* (*Eſt cor.* 7. *prop. ſeq.*)

(f) Per 7. hujus.
(g) Per 1. l. 6. & 7. hujus.
(h) Per cor. 1. p. 1. l. 6.
(i) Per 20. l. 6. & 7. hujus.
(k) Per 23. l. 6.
(l) Per 14. l. 6.
(m) Per ſch. p. 34. l. 1.

3. *Cylindri recti ſuperficies CD, eſt ad baſim BN, ut cylindri latus BC eſt ad BO, quartam partem diametri baſeos. Eſt enim ſuperficies cylindrica* (n) *æqualis rectangulo ſub latere BC & peripheriâ baſeos. Sed baſis cylindri* (o) *æquatur rectangulo ſub BO quartâ parte diametri baſeos & eâdem peripheriâ:*

(n) Per cor. 1. prim.
(o) Per cor. 1. p. 5. huj.

Quare

AO à centro ad quodvis baſeos polygona ordinata latus per-
(a) Per 14. l. 3. *pendiculares, (a) ſunt æquales, & proinde in omnibus trian-*
gulis BAO, propter axem BA communem & ad planum
(b) Per 4. l. 1. *baſeos rectum, & omnia latera AO ſibi invicem æqualia, (b)*
erunt etiam omnes rectæ BO æquales. Omnia igitur trian-
gula quæ pyramidis inſcriptæ ſuperficiem conſtituunt, æqualem
habent altitudinem, nempe perpendicularem BO, a cujuſvis
(c) Patet ex 1. l. 6. *trianguli vertice B ad baſem demiſſa; & ſimul ſumpta (c)*
æquabuntur (hoc eſt, ſuperficies pyramidis cono recto inſcriptæ
æquabitur) triangulo, cujus baſis eſt baſeos pyramidalis inſcrip-
tæ circumferentia, & cujus altitudo eſt perpendicularis BO.
Quod erat alterum.

Aliter. *Cùm triangula quæ pyramidis inſcriptæ ſuperficiem componunt, pro baſibus habeant æqualia polygoni ordinati, quod baſi coni inſcribitur, latera, & pro cruribus æqualia coni recti*
(d) Per 8. l. 1. *latera; triangula iſta erunt ſibi mutuò æquilatera, (d) æquian-*
(e) Per ax. 8. l. 1. *gula, & (cùm ſibi mutuò impoſita (e) congruant,) altitudinis æqualis. Unde ut priùs, triangulum quod continetur ſub altitudine communi, & ſub baſi quæ omnibus triangulorum baſibus. ſive quæ perimetro polygoni inſcripti æquetur, triangulis iſtis, ſive*
(f) Patet ex 1. l. 6. *pyramidis inſcriptæ ſuperficiei (f) æquale erit.]*

PROPOSITIO X.

Superficies priſmatis ordinati cylindro recto circum-
(g) Vide def. 6. l. 12. *ſcripti deſinit (g) in cylindri ſuperficiem: & py-*
ramidis ordinatæ cono recto circumſcriptæ ſuperficies in coni ſuperficiem deſinit.

Fig. 6. 1. Pars. Priſmatum ordinatorum cylindro ſine ſine cons-ſcriptorum & inſcriptorum ſuperficiès, habebunt tandem inter ſe differentiam datâ minorem, uti facile patebit ex 8. & 3. hujus. Multo igitur magis ſuperficies circumſcripti priſmatis a ſuperficie cylindri, inter inſcriptam & circumſcriptam mediâ, differet differentiâ minori quacunque datâ,
(h) Per def. 6. l. 12. hoc eſt, (*h*) deſinit in cylindricam ſuperficiem, minùs ſemper ac minus excedendo.

Fig. 7. 2. Pars. Eodem modo oſtenditur ex 9. & 3. hujus.

In figuris tantùm exhibentur cylindri & coni ſemiſſes, ne multitudo linearum confuſionem pareret. Cæterum cogitandi ſunt cylindrus & conus integri, quos priſmata & pyramides circumſcriptæ ambiunt. Sic enim clariùs appareret planas ſuperficies circumſcriptas eſſe majores ex 2. axiomate.

[Scho-

Scholium. 1. *Cùm propoſitiones 4. ſequentes, & quædam è corollariis inde deductis, ratiocinio aliquantum prolixiori demonſtrentur, & eo ordine diſponantur, ut neceſſariò per ambages procedendum ſit; opus tyronibus haud ingratum me facturum ſpero, ſi propoſitiones illas, unà cum omnibus earum corollariis, methodo naturali & expeditâ, ex hac prop. 10. deduxerim.*

Corollaria ex primâ parte prop. 10.

1 H*Inc ſequitur, cylindri recti ſuperficiem CD, æquari rectangulo ſub CB latere cylindri, & BN baſeos peripheriâ. Superficies enim priſmatum cylindro ſine fine circumſcriptorum, æquales ſemper* (a) *ſunt rectangulis ſub latere cylindri & baſium priſmaticarum perimetris. Sed ejuſmodi ſuperficies priſmaticæ in* (b) *ſuperficiem cylindricam, & perimetri baſium priſmaticarum in* (c) *peripheriam baſeos cylindri tandem deſinunt.* Ergo (d) *ſuperficies cylindri æquatur rectangulo ſub latere cylindri, & ſub baſeos peripheriâ.*

Fig. 8.
(a) Per 8. hujus.
(b) Per hanc prop.
(c) Per 3. hujus.
(d) Per 1. hujus.

Aliter. *Applicetur ad ſuperficiem cylindricam charta rectangula, altitudinis cylindri altitudini æqualis, & baſeos quæ peripheria baſeos cylindricæ æquetur; & inter ſe congruent charta atque ſuperficies cylindrica: ideoque* (e) *æquales ſunt.* (*Eſt cor.* 1. *pr. ſeq.*)

(e) Per [illegible] 7. l. 1.

2. *Hinc rectangulorum proprietates ſuperficiebus cylindricis rectis conveniunt, ſi pro rectangulorum altitudinibus ponantur latera cylindrorum; & pro baſibus, cylindricarum baſium peripheriæ, vel etiam quandoque diametri, quæ eandem cum peripheriis proportionem* (f) *habent. Adeoque* 1. *Cylindricæ ſuperficies æque altæ,* (g) *ſunt inter ſe ut baſium diametri.* (*Eſt cor.* 2. *pr. ſeq.*) 2. *Quæ baſes habent æquales, ſunt* (h) *inter ſe ut cylindrorum latera.* (*Eſt cor.* 3. *p. ſeq.*) 3. *Quæ ſimiles ſunt,* (i) *erunt in duplicatâ ratione diametrorum quæ in baſibus ſunt.* (*Eſt cor.* 4. *p. ſeq.*) 4. *Et quælibet,* (k) *ſunt inter ſe in ratione compoſitâ ex rationibus laterum, & diametrorum Eſt cor.* 5. *p.* 11.) 5. *Si æquales ſint,* (l) *reciprocant latera & baſium diametros; & ſi reciprocent, æquales ſunt.* (*Eſt cor.* 6. *p.* 11.) 6. *Si latus in baſeos peripheriam ducatur,* (m) *habebitur ſuperficiei cylindricæ area.* (*Eſt cor.* 7. *prop. ſeq.*)

(f) Per 7. hujus.
(g) Per 1. l. 6. & 7. hujus.
(h) Per cor. 1. p. 1. l. 6.
(i) Per 20. l. 6. & 7. hujus.
(k) Per 23. l. 6.
(l) Per 14. l. 6.
(m) Per ſch. p. 34. l. 1.

3. *Cylindri recti ſuperficies* CD, *eſt ad baſim* BN, *ut cylindri latus* BC *eſt ad* BO, *quartam partem diametri baſeos. Eſt enim ſuperficies cylindrica* (n) *æqualis rectangulo ſub latere* BC *& peripheriâ baſeos. Sed baſis cylindri* (o) *æquatur rectangulo ſub* BO *quartâ parte diametri baſeos & eâdem peripheriâ:*

(n) Per cor. 1. prius.
(o) Per cor. 1. p. 5. hujus.

Quare

(a) Per 1. l. 6. *Quare* (a) *ſuperficies cylindrica erit ad baſim, ut* BC *ad* BO. (*Eſt p.* 12. *infra.*)

Fig. 27. 4. *Hinc ſuperficies cylindri* GK, *ſphæra circumſcripti, cujus nempe altitudo* NK *æquatur diametro baſeos* NG, *erit baſeos quadrupla, ſive baſium ambarum dupla; nam propter* NK = NG, *erit ſuperficies cylindrica ad baſim, ut* NK *ad* $\frac{1}{4}$ NK, *ſive ut* 4 *ad* 1, *ſive quadrupla baſeos; ac proinde ad utraſque baſes ut* 4 *ad* 2, *ſive baſium dupla. Et ſuperficies cylindri* EK, *hemiſphario circumſcripti, erit baſeos dupla, ſive duabus baſibus æqualis. Si verò latus cylindri fuerit quarta pars diametri baſeos, ſuperficies cylindri baſi æqualis erit.* (*Eſt cor. p.* 12.)

Fig. 9. & 8. 5. *Sit* GH *media proportionalis inter* AB *baſeos radium, &* 2BC, *duplum lateris cylindri; eritque circulus radio* GH *æqualis ſuperficiei cylindricæ* CD. *Nam propter* AB, GH, 2BC ∺, *erit baſis* BN *ad circulum* GPH, (b) *ut* AB *ad* 2BC, *ſive ut* $\frac{1}{2}$ AB *ad* BC, *hoc eſt, ut* (c) *baſis* BN *ad ſuperficiem cylindricam* CD. *Ergo* (d) *circulus* GPH *ſuperficiei cylindricæ æqualis erit.* (*Eſt p. ſeq.*)

(b) Per cor. 2. p. 2. l. 12. (c) Per cor. 3. prius. (d) Per 9. l. 5.

Corollaria ex parte ſecundâ prop. 10.

Fig. 10. 6. *Coni recti ſuperficies* CBD *æquatur triangulo ſub* BG *latere coni pro altitudine, & ſub peripheriâ baſeos coni* CG *pro baſi. Etenim pyramidum cono ſine fine circumſcriptarum ſuperficies, ſemper* (e) *ſunt æquales triangulis, ſub latere coni* BG *pro altitudine, & ſub baſium pyramidalium perimetris* EF *pro baſibus. Atqui ejuſmodi ſuperficies pyramidales in* (f) *ſuperficiem conicam, & baſium pyramidalium perimetri in baſeos coni* (g) *peripheriam tandem deſinunt. Adeoque* (h) *ſuperficies coni æquatur triangulo ſub coni latere pro altitudine, & ſub peripheriâ baſeos pro baſi.*

(e) Per 9. hujus. (f) Per hanc prop. (g) Per 3. hujus. (h) Per 1. hujus

Aliter. *Aptetur ad ſuperficiem conicam charta, quæ illi ex amuſſim congruat; & habebit charta illa, in planum extenſa, formam ſectoris circuli, cujus radius coni lateri, & cujus arcus peripheriæ baſeos coni* (i) *æqualis erit. Sed ejuſmodi ſector* (k) *æquatur triangulo ſub dicto ſectoris radio pro altitudine, & ſub rectâ quæ arcui æquetur pro baſi; hoc eſt, ſub latere coni pro altitudine, & ſub peripheriâ baſeos coni pro baſi. Quare* (l) *& ſuperficies coni eidem triangulo æquabitur.* (*Eſt cor.* 1. *pr.* 13.)

(i) Patet ex def. coni recti, & ſectoris circ. (k) Per cor. 3. p. 4. huj. (l) Per ax. 7. & 1. l. 1.

7. *Hinc triangulorum proprietates ſuperficiebus conicis rectis conveniunt, ſi pro triangulorum altitudinibus ponantur conorum latera, & pro baſibus baſium peripheriæ* (m) *vel diametri. Ergo,* 1. *Superficies conicæ æqualia latera habentes,* (n) *ſunt*

(m) Per 7. hujus. (n) Per 1. l. 6.

ut baſium diametri. 2. *Quæ baſes habent æquales, ſunt* (a) *ut latera.* 3. *Quæ ſimiles ſunt, duplicatam* (b) *habent rationem diametrorum quæ ſunt in baſibus.* 4. *Et quælibet rationem* (c) *habent compoſitam ex rationibus laterum & diametrorum quæ ſunt in baſibus.* 5. *Et quæ æquales ſunt,* (d) *reciprocant latera & baſium diametros; & quæ reciprocant, æquales ſunt.* 6. *Habetur* (e) *denique ſuperficies conica, multiplicando latus coni in dimidiam baſeos peripheriam.* (*Hæc ſunt corollaria* 2, 3, 4, 5, 6, & 7. *pr.* 13. *infra.*)

8. *Coni recti ſuperficies CBD eſt ad baſim, ut coni latus BC ad baſeos radium AC. Eſt enim ſuperficies coni* (f) *æqualis rectangulo ſub latere BC & dimidiâ peripheriâ baſeos. Sed coni baſis* (g) *æquatur rectangulo ſub radio AC & eâdem peripheriâ dimidiâ. Ergo* (h) *ſuperficies coni erit ad baſim, ut BC ad AC.* (*Eſt pr.* 14. *infra.*)

9. *Hinc primò,* (*fig.* 30.) *ſuperficies coni recti a triangulo æquilatero circa perpendicularem AK circumacto geniti, baſeos QT dupla eſt. Eſt enim BK latus coni, ſemidiametri baſeos AB duplum.* 2. (*fig.* 27.) *ſuperficies coni a triangulo rectangulo æquicruri EBD circa perpendicularem AB circumacto producti, eſt ad baſim, ut in quadrato diameter BD ad latus DA.* 3. (*fig.* 27.) *ſuperficies cylindri recti GK, eſt ad ſuperficiem coni recti GBN, ejuſdem baſeos & altitudinis, ut cylindri latus NK ad* ½·*BN dimidium latus coni. Eſt enim ſuperf. GBN ad baſim MI,* (i) *ut BN ad NQ ſive* ½ *NG, hoc eſt, ut* ½ *BN ad* ¼ *NG. Sed baſis MI eſt ad ſuperf. GK,* (k) *ut* ¼ *NG ad NK. Ergo* (l) *ſuperf. GBN eſt ad ſuperf. GK. ut* ½ *BN ad NK:* & (m) *invertendo, ſuperficies cylindri GK erit ad ſuperficiem coni GBN, ut latus cylindri NK ad dimidium latus coni,* ½ *BN.* (*Hæc ſunt corollaria* 1, 2, & 3. *pr.* 14.)

10. *Sint AC, OL, CB* ∺ *Erit circulus radio OL æqualis ſuperficiei conicæ CBD. Eſt* (n) *enim baſis coni CG ad ſuperficiem conicam CBD, ut AC ad CB, hoc* (o) *eſt, ut eadem baſis coni ad circulum OPL. Itaque* (p) *circulus OPL ſuperficiei conicæ æqualis erit.* (*Eſt pr.* 13. *infra.*)

Scholium 2.

Hiſce adjicimus duas propoſitiones e Galilæo deſumptas.

1. Cylindri quorum ſuperficies æquantur, ſunt inter ſe ut baſium diametri directè, vel ut altitudines cylindrorum reciprocè. *Cylindri enim ſunt* (q) *ut baſes & altitudines; hoc* (r) *eſt, in duplicatâ ratione diametrorum in baſibus, & ſimplici ratione altitudinum. Sed ſuperficies cylindricæ ſunt* (ſ) *ut*

diametri

(a) *Per cor.* 1. *p.* 1. *l.* 6.
(b) *Per* 19. *l.* 6.
(c) *Per cor.* 2. *p.* 23. *l.* 6.
(d) *Per* 15. *l.* 6.
(e) *Per ſchol. p.* 42. *l.* 1.
(f) *Per cor.* 6. *prius, & cor. p.* 42. *l.* 1.
(g) *Per cor.* 1. *p.* 5. *huj.*
(h) *Per* 1. *l.* 6.
(i) *Per cor.* 8. *prius.*
(k) *Per cor.* 3. *prius.*
(l) *Per* 22. *l.* 5.
(m) *Per ſch. p.* 16. *l.* 5.
Fig. 10. 11.
(n) *Per cor.* 8. *prius.*
(o) *Per cor.* 2. *p.* 2. *l.* 12.
(p) *Per* 9. *l.* 5.
(q) *Per n.* 1. *in ſchol. p.* 15. *l.* 12.
(r) *Per* 2. *l.* 12.
(ſ) *Per n.* 4. *cor.* 2. *p.* 10. *hujus.*

diametri baſium & altitudines cylindrorum. Cylindri igitur erunt ut diametri baſium & ſuperficies: (nam ſi ratio diametrorum componatur cum ratione ex diametris & altitudinibus compoſitâ, exorietur ratio compoſita ex duplicatâ ratione diametrorum & ſimplici altitudinum.) Cùm itaque ſuperficies ponantur æquales, cylindri (a) erunt ut diametri baſium directè; vel ut (b) altitudines reciprocè.

Aliter. Sint altitudines A, α; baſium diametri B, β; erunt ſuperficies ut (c) AB, & αβ; & baſes ut (d) BB, & ββ; ac cylindri ut (e) ABB, & αββ. Sed per hypoth. cylindrica ſuperficies æquantur, hoc eſt, AB = αβ. Ergo (f) A:α :: β:B. Et ducendo antecedentes in BB, & conſequentes in ββ, erit (g) ABB:αββ :: BBβ:Bββ :: (h) B:β :: (i) α:A.

2. (Fig. 29. & 28. l. 12.) Æqualium cylindrorum (FD, AR) ſuperficies ſunt inter ſe, in ſubduplicatâ ratione altitudinum. Hoc eſt, ſi inter altitudines ND, BR, ponatur media proportionalis P; erit (k) ND ad P (ſive P ad BR) ut ſuperficies cylindri FD ad ſuperficiem cylindri AR.

Nam propter BR, P, ND ∺, erit Pq:NDq :: (l) BR:ND :: (m) VT:MQ :: FNq:ABq; & P:ND :: (n) FN:AB :: (o) ſuperf. FD:ſuperf. AO. Sed ND (ſive BO) :BR :: (p) ſuperf. AO:ſuperf. AR. Ergo ex (q) æquo, P:BR :: (ſive ND: P ::) ſuperf. FD:ſuperf. AR.

Aliter. Si inter altitudines A, α ſit M media proportionalis, ſintque B, β baſium diametri, ut ſupra; erunt baſes ut BB, ββ; ſuperficies ut AB, αβ; & cylindri ut ABB, αββ. Et cùm cylindri ſint æquales, hoc eſt, ABB = αββ, erit AB:αβ :: β:B. Et cùm per 15. l. 12. ſit ββ:BB :: A:α; (r) erit β:B :: A:M. Ergo AB:αβ :: A:M. Q. E. D.

Corol. Hinc ingentem illam particularum corpora naturalia componentium ſubtilitatem aliquo modo percipere datum eſt. Sit FD cylindrus argenteus ſuperficiem habens deauratam, ſive bracteis aureis obductam; quem opifices in auri filum immanis longitudinis producunt. Eſt nempe altitudo cylindri FD ad fili longitudinem, ut 1 ad 115600; inter quas, media proportionalis, ſive √115600, eſt 340. Itaque bractea aurea quâ tegitur ſuperficies fili, 340 vicibus tenuior erit quàm illa quâ ſuperficies cylindri FD obducitur. Vide Rohault. Phyſ. par. 1. cap. 9. ſect. 11.]

(a) Per def. 9. l. 5. & def. 5. l. 6.
(b) Per n. 5. cor. 2. p. 10. hujus.
(c) Per n. 4. cor. 2. p. 10. hujus.
(d) Per 2. l. 12.
(e) Per n. 1. in ſchol. p. 25. l. 12.
(f) Per 16. l. 6.
(g) Per 4. l. 5. (ſive per lem. 1. par. 2. l. 5.)
(h) Per 15. l. 5.
(i) Prius.
(k) Per def. 10. l. 5.
(l) Per ſch. p. 20. l. 6.
(m) Per 25. l. 12.
(n) Per 15. l. 5.
(o) Per n. 1. cor. 2. p. 10. hujus.
(p) Per n. 2. cor. 2. p. 10. hujus.
(q) Per 22. l. 5.
(r) Per def. 10. l. 5. cum ſchol. p. 20. l. 6.

Lemma ad ſequent.

Fig. 12. Sint AB, CD, EF proportionales, ſitque KB dimidia AB, & EG dupla EF; etiam KB, CD, EG proportionales erunt.

Recta

Recta KB eſt ad AB, ut (*a*) EF ad EG. Rectangulum ergo KB, EG æquatur (per 16. l. 6.) rectangulo AB, EF. Sed hoc per 17. l. 6. æquatur quadrato CD. Ergo & rectangulum KB, EG par eſt quadrato CD. Ergo per 17. l. 6. KB, CD, EG ſunt proportionales. (a) *Per* 15. *l.* 5.

[Aliter. *KB*: *AB* :: (b) *EF*: *EG*. *Sed AB*: *CD* :: (c) *CD*: *EF*. *Ergo* (d) *ex æquo perturbatè*, *KB*: *CD* :: *CD*: *EG*.] (b) *Per* 15. *l.* 5. (c) *Ex hyp.* (d) *Per* 23. *l.* 5.

PROPOSITIO XI.

Circulus, cujus radius (GH) eſt medius proportionalis inter recti cylindri latus (BC) & baſeos diametrum (BD,) æqualis eſt ſuperficiei cylindricæ. *Fig.* 98.

Intelligantur circulis ABN, GPH, circumſcripta eſſe [*ejuſdem ſpeciei*] ordinata polygona, adeoque ſimilia, NM, RS; & ſuper NM polygono erectum eſſe priſma, cylindro circumſcriptum. Quoniam BD, GH, BC ex hyp. ſunt proportionales, etiam AD (ſeu AN) GH & dupla BC (*e*) proportionales erunt. Jam triangulum ſub AN & ambitu polygoni MN contentum, (*f*) æquatur polygono conſcripto NM: rectangulum verò ſub BC ſeu EF & eodem ambitu NM, (hoc eſt, (*g*) triangulum ſub ambitu NM & dupla BC,) æquale eſt (*h*) ſuperficiei priſmatis cylindro conſcripti. Atqui triangulum ſub ambitu NM & AN, eſt ad triangulum ſub ambitu NM & dupla BC, (*i*) ut AN ad duplam BC. Ergo etiam polygonum NM eſt ad ſuperficiem priſmatis cylindro conſcripti, ut AN ad duplam BC. Sed quia jam oſtendi AN, GH, duplam BC, eſſe proportionales: ratio AN ad duplam BC eſt duplicata (*k*) rationis AN ad GH. Ergo polygonum NM ad ſuperficiem priſmatis rationem habet duplicatam rationis AN ad GH. Sed etiam polygonum NM ad ſimile ſibi polygonum GRQS, rationem habet duplicatam rationis AN ad GH, ut facile colligitur ex 1. lib. 12. [*Nam ductâ GQ, triangula ANK, GHQ (propter angulos ANK, GHQ rectos, & AKN, GQH polygonorum ſimilium ordinatorum* (l) *ſemiangulos) ſunt* (m) *æquiangula & ſimilia. Ergo AK*: *GQ* :: *AN*: *GH*. *Sed per* 1. *l.* 12. *polygona ſunt in duplicatâ ratione radiorum AK, GQ, circulorum quibus ipſa polygona ſunt inſcriptibilia: ac proinde erunt* (n) *in duplicatâ ratione radiorum AN, GH, circulorum quibus eadem polygona circumſcribuntur.*] Ergo polygonum NM ad ſuper-

(e) *Per lem.* (f) *Per* 4. *hujus.* (g) *Patet ex cor. p.* 42. *l.* 1. (h) *Per* 8. *hujus.* (i) *Per* 1. *l.* 6. (k) *Per def.* 10. *l.* 5. (l) *Per* 12. *l.* 4. *cum ſchol.* (m) *Per cor.* 9. *p.* 32. *l.* 1. (n) *Per* 11. *l.* 5.

AO à centro ad quodvis baſeos polygona ordinata latus perpendiculares, (a) *ſunt æquales*, *& proinde in omnibus triangulis BAO*, *propter axem BA communem & ad planum baſeos rectum*, *& omnia latera AO ſibi invicem æqualia*, (b) *erunt etiam omnes rectæ BO æquales. Omnia igitur triangula quæ pyramidis inſcriptæ ſuperficiem conſtituunt*, *æqualem habent altitudinem*, *nempe perpendicularem BO*, *a cujuſvis trianguli vertice B ad baſem demiſſa*; *& ſimul ſumpta* (c) *æquabuntur* (*hoc eſt*, *ſuperficies pyramidis cono recto inſcripta æquabitur*) *triangulo*, *cujus baſis eſt baſeos pyramidalis inſcripta circumferentia*, *& cujus altitudo eſt perpendicularis BO. Quod erat alterum.*

(a) Per 14. l. 3.
(b) Per 4. l. 1.
(c) Patet ex 1. l. 6.

Aliter. *Cùm triangula quæ pyramidis inſcriptæ ſuperficiem componunt*, *pro baſibus habeant æqualia polygoni ordinati*, *quod baſi coni inſcribitur*, *latera*, *& pro cruribus æqualia coni recti latera*; *triangula iſta erunt ſibi mutuò æquilatera*, (d) *æquiangula*, *&* (*cùm ſibi mutuò impoſita* (e) *congruant*,) *altitudinis æqualis. Unde ut priùs*, *triangulum quod continetur ſub altitudine communi*, *& ſub baſi quæ omnibus triangulorum baſibus*. *ſive quæ perimetro polygoni inſcripti æquetur*, *triangulis iſtis*, *ſive pyramidis inſcriptæ ſuperficiei* (f) *æquale erit*.]

(d) Per 8. l. 1.
(e) Per ax. 8. l. 1.
(f) Patet ex 1. l. 6.

PROPOSITIO X.

SUperficies priſmatis ordinati cylindro recto circumſcripti deſinit (g) *in cylindri ſuperficiem*: *& pyramidis ordinatæ cono recto circumſcripta ſuperficies in coni ſuperficiem deſinit.*

(g) Vide def. 6. l. 12.

Fig. 6. 1. Pars. Priſmatum ordinatorum cylindro ſine ſine circumſcriptorum & inſcriptorum ſuperficiës, habebunt tandem inter ſe differentiam datâ minorem, uti facile patebit ex 8. & 3. hujus. Multo igitur magis ſuperficies circumſcripti priſmatis a ſuperficie cylindri, inter inſcriptam & circumſcriptam mediâ, differet differentiâ minori quacunque datâ, hoc eſt, (*h*) deſinit in cylindricam ſuperficiem, minùs ſemper ac minus excedendo.

(h) Per def. 6. l. 12.

Fig. 7. 2. Pars. Eodem modo oſtenditur ex 9. & 3. hujus.

In figuris tantùm exhibentur cylindri & coni ſemiſſes, ne multitudo linearum confuſionem pareret. Cæterum cogitandi ſunt cylindrus & conus integri, quos priſmata & pyramides circumſcriptæ ambiunt. Sic enim clariùs apparet planas ſuperficies circumſcriptas eſſe majores ex 2. axiomate.

[Scho-

Scholium. 1. *Cùm propoſitiones* 4. *ſequentes, & quædam è corollariis inde deductis, ratiocinio aliquantum prolixiori demonſtrentur, & eo ordine diſponantur, ut neceſſariò per ambages procedendum ſit; opus tyronibus haud ingratum me facturum ſpero, ſi propoſitiones illas, unà cum omnibus earum corollariis, methodo naturali & expeditâ, ex hac prop.* 10. *deduxerim.*

Corollaria ex primâ parte prop. 10.

1 HInc *ſequitur, cylindri recti ſuperficiem CD, æquari rectangulo ſub CB latere cylindri, & BN baſeos peripheriâ. Superficies enim priſmatum cylindro ſine fine circumſcriptorum, æquales ſemper* (a) *ſunt rectangulis ſub latere cylindri & baſium priſmaticarum perimetris. Sed ejuſmodi ſuperficies priſmatica in* (b) *ſuperficiem cylindricam, & perimetri baſium priſmaticarum in* (c) *peripheriam baſeos cylindri tandem deſinunt. Ergo* (d) *ſuperficies cylindri æquatur rectangulo ſub latere cylindri, & ſub baſeos peripheriâ.*

Fig. 8.
(a) *Per* 8. *hujus.*
(b) *Per hanc prop.*
(c) *Per* 3. *hujus.*
(d) *Per* 1. *hujus.*

Aliter. *Applicetur ad ſuperficiem cylindricam charta rectangula, altitudinis cylindri altitudini æqualis, & baſeos quæ peripheria baſeos cylindricæ æquetur; & inter ſe congruent charta atque ſuperficies cylindrica: ideoque* (e) *æquales ſunt.* (*Eſt cor.* 1. *pr. ſeq.*)

(e) *Per ax.* 7. *l.* 1.

2. *Hinc rectangulorum proprietates ſuperficiebus cylindricis rectis conveniunt, ſi pro rectangulorum altitudinibus ponantur latera cylindrorum; & pro baſibus, cylindricarum baſium peripheriæ, vel etiam quandoque diametri, quæ eandem cum peripheriis proportionem* (f) *habent. Adeoque* 1. *Cylindricæ ſuperficies æque altæ,* (g) *ſunt inter ſe ut baſium diametri.* (*Eſt cor.* 2. *pr. ſeq.*) 2. *Quæ baſes habent æquales, ſunt* (h) *inter ſe ut cylindrorum latera.* (*Eſt cor.* 3. *p. ſeq.*) 3. *Quæ ſimiles ſunt,* (i) *erunt in duplicatâ ratione diametrorum quæ in baſibus ſunt.* (*Eſt cor.* 4. *p. ſeq.*) 4. *Et qualibet,* (k) *ſunt inter ſe in ratione compoſitâ ex rationibus laterum, & diametrorum Eſt cor.* 5. *p.* 11.) 5. *Si æquales ſint,* (l) *reciprocant latera & baſium diametros; & ſi reciprocent, æquales ſunt.* (*Eſt cor.* 6. *p.* 11.) 6. *Si latus in baſeos peripheriam ducatur,* (m) *habebitur ſuperficiei cylindricæ area.* (*Eſt cor.* 7. *prop. ſeq.*)

(f) *Per* 7. *hujus.*
(g) *Per* 1. *l.* 6. & 7. *hujus.*
(h) *Per cor.* 1. *p.* 1. *l.* 6.
(i) *Per* 20. *l.* 6. & 7. *hujus.*
(k) *Per* 23. *l.* 6.
(l) *Per* 14. *l.* 6.
(m) *Per ſch. p.* 34. *l.* 1.

3. *Cylindri recti ſuperficies CD, eſt ad baſim BN, ut cylindri latus BC eſt ad BO, quartam partem diametri baſeos. Eſt enim ſuperficies cylindrica* (n) *æqualis rectangulo ſub latere BC & peripheriâ baſeos. Sed baſis cylindri* (o) *æquatur rectangulo ſub BO quartâ parte diametri baſeos & eâdem peripheriâ:*

(n) *Per cor.* 1. *prius.*
(o) *Per cor.* 1. *p.* 5. *huj.*

Quare

PROPOSITIO XIII.

Fig. 11. & 10. *Circulus, cujus radius (OL) eſt medius proportionalis inter coni recti latus (BC) & baſis radium (AC,) æqualis eſt ſuperficiei conicæ.*

Intelligantur circulis ACG, OPL circumſcripta eſſe polygona ordinata [*ſimilia*] EF, IN, & ſuper polygono EF erectam eſſe pyramidem cono circumſcriptam.

Quoniam per hyp. AC ſeu AG eſt ad OL, ut OL ad BC, erit ratio AG ad BC duplicata (*a*) rationis AG ad OL. Sed ut AG ad BC, ita triangulum ſub AG & ambitu EF eſt ad triangulum ſub BC & eodem ambitu EF. Ergo ratio trianguli ſub AG & ambitu EF ad triangulum ſub BC & eodem ambitu, eſt etiam duplicata rationis AG ad OL. Sed triangulum ſub AG & ambitu EF æquale eſt (*b*) polygono EF: & triangulum ſub BC & eodem ambitu EF æquale (*c*) eſt ſuperficiei pyramidis circumſcriptæ. Ergo ratio polygoni EF ad ſuperficiem pyramidis etiam eſt duplicata rationis AG ad OL. Atqui etiam ratio polygoni EF ad polygonum ſibi per conſtr. ſimile IN, eſt duplicata (*d*) rationis AG ad OL, [*uti conſtat ex iis quæ demonſtrationi prop. 11. inſeruntur.*] Ergo polygonum EF, ad ſuperficiem pyramidis & ad polygonum IN eandem habet rationem, quæ proinde æqualia (*e*) erunt. Eodem modo oſtendam ſuperficies pyramidum, quæ cono in infinitum magis magiſque polygonæ circumſcribi poſſunt, ſemper æquales eſſe polygonis quæ circulo OPL poſſunt circumſcribi etiam in infinitum. Quare, cùm & pyramidum (*f*) ſuperficies in coni ſuperficiem, & polygona in circulum (*g*) OPL tandem deſinant, etiam coni (*h*) ſuperficies & circulus OPL erunt æqualia. Quod erat demonſtr.

Ex hoc præclaro theoremate exhibetur circulus ſuperficiei conicæ æqualis.

(a) *Per def.* 10. *l.* 5.
(b) *Per* 4. *hujus.*
(c) *Per* 9. *hujus.*
(d) *Colligitur ex p.* 1. *l.* 12.
(e) *Per* 9. *l.* 5.
(f) *Per* 10. *hujus.*
(g) *Per* 9. *hujus.*
(h) *Per* 1. *hujus.*

Corollaria.

Fig. 10. & 11. 1. *Recti coni ſuperficies æqualis eſt triangulo, ſub eom latere (BC) & baſeos peripheria (CG) comprehenſo.*

Sit

Sit OL radius media proportionalis inter AC & BC. Quia peripheria CG eſt ad peripheriam P, ut (*a*) radius AG ad radium OL; hoc eſt per hyp. ut OL ad BC: erit triangulum ſub primâ, nempe peripheriâ GG, & ſub quartâ BC, (*b*) æquale triangulo ſub ſecundâ, nempe peripheriâ P, & tertiâ OL; hoc eſt, (*c*) circulo OPL, hoc eſt, (*d*) ſuperficiei conicæ BCD. Quod erat demonſtrandum. (a) *Per 7. hujus.* (b) *Per ſch. 4. p. 16. l. 6.* (c) *Per 5. hujus.* (d) *Per hanc 13.*

Ex hoc corollario liquet ſuperficies conicas triangulorum ſubire leges. Iraque

2. Superficies conicæ (BAF, QXR) æqualia latera (BA, QX) habentes, ſunt inter ſe ut baſium diametri (BF, QR.) *Fig. 24. & 25. l. 12.*

3. Et (CFT, AZB) quæ baſes habent æquales, ſunt inter ſe ut latera (CF, AZ.) *Fig. 27. & 28. l. 12.*

4. Et quæ ſimiles ſunt (BAF, QRZ,) duplicatam habent rationem ejus, quæ eſt inter baſium diametros. *Fig. 24. & 25. l. 12.*

5. Et quælibet, rationem inter ſe habent compoſitam ex rationibus laterum (BA, QZ) & diametrorum BF, QR) quæ ſunt in baſibus. *Fig. ead.*

6. Et quæ æquales ſunt, reciprocant latera & baſium diametros; & quæ reciprocant, ſunt æquales.

Quæ omnia demonſtrantur ex coroll. 1. ut ſupra corollaria de cylindricâ ſuperficie deduximus ex corollario iſthic primo.

7. Metiemur denique conicam ſuperficiem, ſi latus FC per baſeos peripheriam dimidiam multiplicemus. Ut ſi latus ſit pedum 5. peripheria baſeos pedum 20; duc 5. per 10. proveniunt 50. pedes quadrati pro conicâ ſuperficie. Dem. patet ex eodem 1. coroll. *Fig. 29. l. 12.*

PROPOSITIO XIV.

Coni recti ſuperficies eſt ad baſim, ut latus (BC) *ad baſis radium* (AC.) *Fig. 10. & 11. Archim.*

Inter latus BC & baſis radium AC, ſit media proportionalis OL. Ergo ratio BC ad AC eſt duplicata (*e*) rationis OL ad AC. Jam circulus radii OL (*f*) eſt æqualis ſuperficiei conicæ CBD. Sed hujus ratio ad coni baſim ACG eſt duplicata (*g*) rationis OL ad AC; ac proinde eadem cum ratione BC ad AC. Ergo etiam ratio ſuperficiei conicæ CBD eſt ad baſim ACG; ut BC ad AC. Quod erat demonſtrandum. (e) *Per def. 10. l. 5.* (f) *Per 13. hujus.* (g) *Per 2. l. 12.*

(a) Per 1. l. 6. *Quare* (a) *ſuperficies cylindrica erit ad baſim, ut BC ad BO.* (*Eſt p.* 12. *infra.*)

Fig. 27. 4. *Hinc ſuperficies cylindri GK, ſphæra circumſcripti, cujus nempe altitudo NK æquatur diametro baſeos NG, erit baſeos quadrupla, ſive baſium ambarum dupla; nam propter NK = NG, erit ſuperficies cylindrica ad baſim, ut NK ad $\frac{1}{4}$ NK, ſive ut 4 ad 1, ſive quadrupla baſeos; ac proinde ad utraſque baſes ut 4 ad 2, ſive baſium dupla. Et ſuperficies cylindri EK, hemiſphærio circumſcripti, erit baſeos dupla, ſive duabus baſibus æqualis. Si verò latus cylindri fuerit quarta pars diametri baſeos, ſuperficies cylindri baſi æqualis erit.* (*Eſt cor. p.* 12.)

Fig. 9. & 8. 5. *Sit GH media proportionalis inter AB baſeos radium, & 2BC, duplum lateris cylindri; eritque circulus radio GH æqualis ſuperficiei cylindricæ CD. Nam propter AB, GH, 2BC* $\div$, *erit baſis BN ad circulum GPH,* (b) *ut AB ad 2BC, ſive ut $\frac{1}{2}$ AB ad BC, hoc eſt, ut* (c) *baſis BN ad ſuperficiem cylindricam CD. Ergo* (d) *circulus GPH ſuperficiei cylindricæ æqualis erit.* (*Eſt p. ſeq.*)

(b) Per cor. 2. p. 2. l. 12. (c) Per cor. 3. prius. (d) Per 9. l. 5.

Corollaria ex parte ſecundâ prop. 10.

Fig. 10. 6. *Coni recti ſuperficies CBD æquatur triangulo ſub BG latere coni pro altitudine, & ſub peripheriâ baſeos coni CG pro baſi. Etenim pyramidum cono ſine fine circumſcriptarum ſuperficies, ſemper* (e) *ſunt æquales triangulis, ſub latere coni BG pro altitudine, & ſub baſium pyramidalium perimetris EF pro baſibus. Atqui ejuſmodi ſuperficies pyramidales in* (f) *ſuperficiem conicam, & baſium pyramidalium perimetri in baſeos coni* (g) *peripheriam tandem deſinunt. Adeoque* (h) *ſuperficies coni æquatur triangulo ſub coni latere pro altitudine, & ſub peripheriâ baſeos pro baſi.*

(e) Per 9. hujus. (f) Per hanc prop. (g) Per 3. hujus. (h) Per 1. hujus

Aliter. *Aptetur ad ſuperficiem conicam charta, quæ illi ex amuſſim congruat; & habebit charta illa, in planum extenſa, formam ſectoris circuli, cujus radius coni lateri, & cujus arcus peripheriæ baſeos coni* (i) *æqualis erit. Sed ejuſmodi ſector* (k) *æquatur triangulo ſub dicto ſectoris radio pro altitudine, & ſub rectâ quæ arcui æquetur pro baſi; hoc eſt, ſub latere coni pro altitudine, & ſub peripheriâ baſeos coni pro baſi. Quare* (l) *& ſuperficies coni eidem triangulo æquabitur.* (*Eſt cor.* 1. *pr.* 13.)

(i) Patet ex def. coni recti, & ſectoris circ. (k) Per cor. 3. p. 4. huj. (l) Per ax. 7. & 1. l. 1.

7. *Hinc triangulorum proprietates ſuperficiebus conicis rectis conveniunt, ſi pro triangulorum altitudinibus ponantur conorum latera, & pro baſibus baſium peripheriæ* (m) *vel diametri. Ergo,* 1, *Superficies conicæ æqualia latera habentes,* (n) *ſunt* ut

(m) Per 7. hujus. (n) Per 1. l. 6.

ut baſium diametri. 2. *Quæ baſes habent æquales, ſunt* (a) *ut latera.* 3. *Quæ ſimiles ſunt, duplicatam* (b) *habent rationem diametrorum quæ ſunt in baſibus.* 4. *Et qualibet rationem* (c) *habent compoſitam ex rationibus laterum & diametrorum quæ ſunt in baſibus.* 5. *Et quæ æquales ſunt,* (d) *reciprocant latera & baſium diametros; & quæ reciprocant, æquales ſunt.* 6. *Habetur* (e) *denique ſuperficies conica, multiplicando latus coni in dimidiam baſeos peripheriam.* (*Hæc ſunt corollaria* 2, 3, 4, 5, 6, & 7. *pr.* 13. *infra.*)

8. *Coni recti ſuperficies CBD eſt ad baſim, ut coni latus BC ad baſeos radium AC. Eſt enim ſuperficies coni* (f) *æqualis rectangulo ſub latere BC & dimidiâ peripheriâ baſeos. Sed coni baſis* (g) *æquatur rectangulo ſub radio AC & eâdem peripheriâ dimidiâ. Ergo* (h) *ſuperficies coni erit ad baſim, ut BC ad AC.* (*Eſt pr.* 14. *infra.*)

9. *Hinc primò,* (*fig.* 30.) *ſuperficies coni recti a triangulo æquilatero circa perpendicularem AK circumacto geniti, baſeos QT dupla eſt. Eſt enim BK latus coni, ſemidiametri baſeos AB duplum.* 2. (*fig.* 27.) *ſuperficies coni a triangulo rectangulo æquicruri EBD circa perpendicularem AB circumacto producti, eſt ad baſim, ut in quadrato diameter BD ad latus DA.* 3. (*fig.* 27.) *ſuperficies cylindri recti GK, eſt ad ſuperficiem coni recti GBN, ejuſdem baſeos & altitudinis, ut cylindri latus NK ad* $\frac{1}{2}$ *BN dimidium latus coni. Eſt enim ſuperf. GBN ad baſim MI,* (i) *ut BN ad NQ ſive* $\frac{1}{2}$ *NG, hoc eſt, ut* $\frac{1}{2}$ *BN ad* $\frac{1}{4}$ *NG. Sed baſis MI eſt ad ſuperf. GK,* (k) *ut* $\frac{1}{4}$ *NG ad NK. Ergo* (l) *ſuperf. GBN eſt ad ſuperf. GK. ut* $\frac{1}{2}$ *BN ad NK: &* (m) *invertendo, ſuperficies cylindri GK erit ad ſuperficiem coni GBN, ut latus cylindri NK ad dimidium latus coni,* $\frac{1}{2}$ *BN.* (*Hæc ſunt corollaria* 1, 2, & 3. *pr.* 14.)

10. *Sint AC, OL, CB* ∺ *Erit circulus radio OL æqualis ſuperficiei conicæ CBD. Eſt* (n) *enim baſis coni CG ad ſuperficiem conicam CBD, ut AC ad CB, hoc* (o) *eſt, ut eadem baſis coni ad circulum OPL. Itaque* (p) *circulus OPL ſuperficiei conicæ æqualis erit.* (*Eſt pr.* 13. *infra.*)

Scholium 2.

Hiſce adjicimus duas propoſitiones e Galilæo deſumptas.

1. Cylindri quorum ſuperficies æquantur, ſunt inter ſe ut baſium diametri directè, vel ut altitudines cylindrorum reciprocè. *Cylindri enim ſunt* (q) *ut baſes & altitudines; hoc* (r) *eſt, in duplicatâ ratione diametrorum in baſibus, & ſimplici ratione altitudinum. Sed ſuperficies cylindricæ ſunt* (ſ) *ut diametri*

(a) Per cor. 1. p. 1. l. 6.
(b) Per 19. l. 6.
(c) Per cor. 2. p. 23. l. 6.
(d) Per 15. l. 6.
(e) Per ſchol. p. 42. l. 1.
(f) Per cor. 6. prius, & cor. p. 42. l. 1.
(g) Per cor. 1. p. 5. huj.
(h) Per 1. l. 6.
(i) Per cor. 8. prius.
(k) Per cor. 3. prius.
(l) Per 22. l. 5.
(m) Per ſch. p. 16. l. 5.
Fig. 10. 11.
(n) Per cor. 8. prius.
(o) Per cor. 2. p. 2. l. 12.
(p) Per 9. l. 5.
(q) Per n. 1. in ſchol. p. 15. l. 12.
(r) Per 2. l. 12.
(ſ) Per n. 4. cor. 2. p. 10. hujus.

ZZ, SS comprehenſa, æquatur circulo GHM. Quod erat demonſtrandum.

[Corol. *Hinc ex datis circulorum parallelorum radiis NV, QD, & ſuperficiei conica inter circulos intercepta latere NQ, habetur ſuperficiei illius dimenſio, ſi radiorum ſumma NV + QD per latus NQ multiplicetur, & facti radix quadratica extrahatur. Erit enim ut 113 ad 355, ita radix iſta ad terminum quartum. Quo termino in radicem illam ducto, exoritur ſuperficies conica quaſita. Patet ex 17. l. 6. & ſchol. p. 6. hujus, cum p. 15. l. 15.*]

Lemma ad ſequen.

Fig. 16. RECTÆ (BH, CG) quæ in circulo æquales arcus (BC, HG) intercipiunt, ſunt parallelæ.

Ducatur enim CH. Quoniam arcus BC, HG per hyp. ſunt æquales, etiam (*a*) anguli BHC, GCH alterni æquales erunt: Ergo (*b*) BH & CG ſunt parallelæ. Quod erat demonſtrandum.

(a) Per 29. l. 3.
(b) Per 28. l. 1.

[Scholium. *Hinc oritur methodus facillima ducendi per punctum datum B, recta data CG parallelam BH, uti ſupra ad prop. 31. l. 1. notatum eſt.*]

PROPOSITIO XVI.

Fig. 16. I*Nſcribatur circulo figura regularis, parilatera & æquilatera,* [cujus latera quaternarius metiatur;] *ducaturque EB ab extremitate diametri ad B terminum lateris diametro proximi; angulos verò æqualiter diſtantes ab A jungant recta BH, CG, DF:*

Dico rectangulum quod diametro AE, & ſubtenſa EB continetur, æquari rectangulo, quod fit ex latere uno figura inſcripta (AB, vel BC, &c.) & ex omnibus jungentibus BH, CG, DF ſimul ſumptis.

(c) Per 26. l. 3.
(d) Per lem. præc.
(e) Per 27. & 15. cum cor. 9. p. 32. l. 1.
(f) Per 4. l. 6.

Duc CH, DG. Quoniam BH, CG, DF intercipiunt arcus (*c*) æquales, BC, HG; CD, GE; erunt (*d*) parallelæ. Pari argumento parallelæ ſunt BA, CH, DG, EF. Omnia igitur triangula (*e*) BAK, KHL, LCM, MGN, NDO, OFE æquiangula ſunt. Ergo (*f*) ut BK ad KA, ſic HK ad KL; & ut

& ut HK ad KL, ſic CM ad ML; & ut CM ad ML, ſic GM ad MN; & ut GM ad MN, ſic DO ad ON; & ut DO ad ON, ſic FO ad OE. Ergo (a) ut una antecedentium BK ad unam conſequentium KA; ſic omnes antecedentes BK, KH, CM, MG, DO, OF, (hoc eſt, omnes jungentes BH, CG, DF) ſunt ad omnes conſequentes AK, KL, LM, MN, NO, OE, hoc eſt, ad diametrum AE. Sed ut BK ad (b) AK, ſic EB eſt ad BA. Ergo ut omnes ſimul BH, CG, DF ad AE, ſic EB eſt ad BA. Ergo (c) rectangulum ſub omnibus jungentibus BH, CG, DF & ſub BA, æquatur rectangulo ſub AE & EB. Quod erat demonſtrandum.

(a) Per 12. l. 5.
(b) Per cor. 3 p. 8. l. 6.
(c) Per 16. l. 6.

[Cor. 1. *Omnes jungentes BH, CG, DF, a diametro AE bifariam & perpendiculariter ſecantur. Nam in triangulis BAK, HAK, propter latera BA, AK lateribus HA, AK æqualia, & angulos ad A* (d) *æquales, erit* (e) *BK = KH: & anguli ad K æquales, & proinde* (f) *recti. Et eodem modo ad jungentem quamvis aliam CG, ductis AC, AG, oſtendetur eſſe CM = MG, & angulos ad M rectos.*

Cor. 2. *Si jungens CG ſit diameter circuli; angulus CGH a jungente & latere proximo comprehenſus, acutus erit. Ductâ enim CH, angulus CHG in ſemicirculo rectus* (g) *eſt, & proinde angulus HGC* (h) *acutus.*

Si verò recta jungens ſit diametro minor, ut BH; angulus ABH ad partem ſegmenti minoris, a latere figuræ inſcriptæ AB, & jungente BH comprehenſus, etiam (i) *acutus erit. Eſt enim angulus ſuper arcu AH in ſegmento majore ABEH.*

(d) Per 29. l. 3.
(e) Per 4. l. 1.
(f) Per def. 14. l. 1.
(g) Per 31. l. 3.
(h) Per cor. 5. p. 32. l. 1.
(i) Per 31. l. 3.

Cor. 3. *Sit CAG aut ſemicirculus, aut ſegmentum ſemicirculo minus, a jungente CG terminatum: latera CB, GH, jungenti proxima, ad partem ſegmenti CAG, ſi ultra B, H, ſatis producantur, concurrent; & concurſu formabunt triangulum iſoſceles ſuper baſi CG, cujus vertex erit in aliquo diametri EA, ultra A productæ, puncto.*

Nam propter angulos BCG, CGH duobus rectis (k) *minores, rectæ CB, GH ultra B & H productæ,* (l) *concurrent. Et propter arcus BAHG, CBAH æquales; iidem anguli BCG, CGH erunt* (m) *æquales; & proinde latera CB, GH concurſu ſuo formabunt* (n) *triangulum iſoſceles ſuper baſi CG. Et quoniam baſis a rectâ AM bifariam & perpendiculariter* (o) *ſecatur; ipſa MA producta, per trianguli verticem* (p) *tranſibit.*]

(k) Per cor. 2.
(l) Per ſch. p. 31. l. 1.
(m) Per 29. l. 3.
(n) Per 6. l. 1.
(o) Per cor. 1.
(p) Per n. 4. ſchol. p. 26. l. 1.

PROPOSITIO XVII.

Fig. 17. *SEgmento circuli DAF, cujus baſis DF perpendicularis ſit diametro AOE, inſcribatur figura æquilatera & parilatera, ducaturque ut in præcedenti recta EB:*

Dico rectangulum ſub EB & parte diametri AO, quæ ſegmenti axis eſt, comprehenſum, æquari rectangulo ſub latere uno figuræ inſcriptæ, & omnibus jungentibus BH, CG, unà cum DO dimidio baſis DF ſimul ſumptis comprehenſo.

Demonſtratio eadem quæ præcedentis.

[*Eſt enim* $AB : BE :: AK : KB :: LK : KH :: LM : MC :: NM : MG :: NO : OD$. *Ergo* $AB : BE :: AK + KL + LM + MN + NO : BK + KH + CM + MG + DO$; *hoc eſt*, $AB : BE :: AO : BH + CG + DO$. *Ergo* $EB \times AO = AB \times \overline{BH + CG + DO}$.

Fig. 20. Scholium. *Si ſegmento DAF ejuſmodi figuram æquilateram & parilateram DHAGF inſcribi contigerit, ut latera duo oppoſita DH, FG ſint axi AO & ſibi invicem parallela; manifeſtum eſt illa circa eundem axem AO (ſecundùm lemmata ſubſequentia) circumacta, ſuperficiem cylindricam (non conicam) generatura. Et quamvis eo etiam in caſu valeret hæc propoſitio, & (ex p. 11. hujus cum p. 15. collata) ad prop. 19. demonſtrandam æque accommodari poſſet; ut tamen eadem ubique conſervetur demonſtrandi ratio ac forma, & quod in prop. 18, 20, & 22. de ſuperficiebus conicis aſſeritur, idem de ſolis conicis (& non de conicis cum cylinaricâ) affirmari poſſit in prop. 19, 21, & 23; præſtiterit fortè, quandocunque latera oppoſita DH, FG axi AO parallela ſunt, arcus omnes DH, HA; &c. biſecando, figuram duplo plurium laterum (ut DCHBA &c.) eidem ſegmento inſcribere, quo latera omnia figuræ, ſegmento DAF inſcriptæ, (cùm ad axem AO inclinentur,) ex circumvolutione ſegmenti ac figuræ inſcriptæ circa eundem axem, ſuperficies conicas generare valeant.*

Lemma 1. *ad ſequen.*

Fig. 16. INſcripta ſit ſphæræ maximo circulo figura regularis, cujus latera quaternarius metiatur, circa axem AE conſiſtens: Quo manente, circulus cum figurâ circumagatur:

Dico

Dico ſphæræ inſcriptum iri corpus conicis rectis ſuperficiebus contentum.

Quod BA, HA, item DE, FE deſcribant integras conorum rectorum ſuperficies, manifeſtum (*a*) eſt. Deinde quia lineæ CB, GH, & GF, CD concurrunt (*b*) productæ in eodem utrimque puncto diametri AE ſimiliter protractæ, quæ jungentes ſecat normaliter [*& biſariam*]: etiam liquet has deſcribere partes ſuperficierum rectarum conicarum; interceptas inter parallelos circulos, quorum peripherias in ſphæricâ ſuperficie deſcribunt vertices angulorum B, C, D. (a) *Vide def.* 2. *l.* 12. (b) *Per cor.* 3. *p.* 16. *huj.*

Lemma 2.

SEgmenti ſphæræ, cujus axis AO, ſectio maxima eſto DAF. Huic inſcripta ſit figura æquilatera [*& parilatera*] demptá baſi, [*ita tamen,* (*c*) *ut nullum figuræ inſcriptæ latus ſit axi AO parallelum,*] quæ [*cum ſegmento*] circa axem AO in orbem convertatur: *Fig.* 17. (c) *Vide ſch. poſt pr.* 17. *hujus.*

Dico ſegmento ſphærico inſcriptum iri corpus conicis ſuperficiebus contentum.

Probatur ut lemma præced.

PROPOSITIO XVIII.

P*Onantur eadem quæ in primo lemmate; & ducatur recta EB, ab extremitate diametri ad terminum lateris diametro proximi:* *Fig.* 16.

Dico omnibus ſuperficiebus conicis ſphæræ inſcriptis æqualem eſſe circulum, cujus radius (I) poteſt rectangulum AEB, comprehenſum videlicet, ſub diametro AE, & ſubtenſâ EB; [nimirum ut ſit Iq $=$ AE $+$ EB.]

Hoc eſt, cujus radius (I) eſt medius proportionalis inter AE & EB.

Quoniam rectæ BH, CG, DF æquantur rectis (*d*) BK, CM, DO bis ſumptis, erit (*e*) rectangulum ſub latere uno figuræ inſcriptæ maximo circulo, (videlicet ſub AB, vel BC, vel CD, vel DE) & ſub omnibus ſimul jungentibus BH, CG, DF, æquale rectangulo ſub AB & BK, ſub BC & compoſitâ ex BK & CM, ſub CD & compoſitâ ex CM & DO, ſub DE & DO; ſic enim rectæ BK, CM, DO ſingulæ fu- (d) *Per cor.* 1. *p.* 16 *huj.* (e) *Per* 1. *l.* 2.

(a) Per 16. hujus. (b) Per hyp. erunt bis acceptæ. Atqui rectangulum ſub AB & omnibus jungentibus BH, CG, DF ſimul ſumptis æquatur (*a*) rectangulo AEB, hoc eſt (*b*) quadrato I. Ergo quadratum I æquale eſt rectangulis ſub AB & BK, ſub BC & compoſitâ ex BK, CM, ſub CD & compoſitâ ex CM, DO, ſub DE & DO. Sint jam inter AB & BK, media proportionalis P; inter BC & compoſitam ex BK, CM, media Q; inter CD & compoſitam ex CM, DO, media R; inter DE & DO media S. Erunt igitur quadrata P, Q, R, S æqualia (*c*) rectangulis ſupradictis. Quare cùm quadratum I. jam oſtenderim iiſdem æquari rectangulis; etiam quadratis P, Q, R, S æquale erit. Cùm igitur circuli ſint inter ſe (*d*) ut quadrata radiorum; etiam circulus radio I deſcriptus, omnibus ſimul circulis quorum radii P, Q, R, S, æqualis (*e*) erit. Atqui circuli radiorum P & S, æquantur (*f*) ſuperficiebus conicis quas produxerunt latera AB, ED, ſiquidem P eſt media proportionalis inter AB coni latus, & BK radium baſeos; Si verò media eſt inter ED & DO: & circulus radii Q eſt æqualis ſegmento (*g*) ſuperficiei conicæ quæ intercipitur inter duos parallelos circulos diametrorum CG, BH, quia Q media eſt inter BC, & compoſitam ex BK, CM: & ob eandem cauſam circulus radii R æquatur ſegmento ſuperficiei conicæ inter parallelos circulos diametrorum CG, DF interceptæ. Ergo circulus radio I deſcriptus, æquatur omnibus ſimul conicis ſuperficiebus ſphæræ inſcriptis. Quod erat demonſtrandum.

(c) Per 17. l. 6. (d) Per cor. 2. p. 2. l. 12. (e) Patet ex cor. 2. p. 2. l. 12. & p. 24. l. 5. (f) Per 13. hujus. (g) Per 15. hujus.

PROPOSITIO XIX.

Fig. 17. *Ponantur eadem quæ in 2. lemmate, & ducatur recta EB ab extremitate diametri AE ad terminum lateris AB diametro proximi:*

Dico omnibus ſuperficiebus conicis ſegmento ſphærico DAF inſcriptis æqualem eſſe circulum, cujus radius eſt medius proportionalis inter EB & ſegmenti axem AO.

Demonſtratio plane eadem quæ præcedentis: ſed pro P. 16. citetur P. 17.

PRO-

PROPOSITIO XX.

Superficies conica ſphæra inſcripta, in ſphæra ſuperficiem deſinunt. Fig. 18.

Data ſit ſuperficies quantumvis parva X. Manifeſtum eſt intra ſphæricam ſuperficiem ACEG dari aliam poſſe concentricam, quæ ab hac deficiat quantitate minori quàm ſit X. Ambarum plano ſectarum per centrum, maximi circuli ſint ACEG, DPLM. Ducatur diameter ADE, & in D tangat NQ. Si arcus AE biſecetur in C, & reſiduum biſecetur rurſus, [*ſed in fig. 18. arcus quadrantalis AC triſecatur, quod etiam fieri poſſe patet ex cor. 3. p. 15. l. 4.*] & ſic deinceps, relinquetur (*a*) tandem arcus AB minor arcu AN: Huic ſi ſubtendatur recta AB, manifeſtum eſt eam non pertingere ad peripheriam PDML, eſſeque latus figuræ æquilateræ & parilateræ circulo CAGE inſcriptæ, [*cujus laterum quaternarius metiatur, &*] cujus nullum latus pertingat ad peripheriam PDML. Quare ſi circa diametrum AE in orbem agantur omnia; patet ſuperficiei ſphæricæ exteriori inſcribendas eſſe conicas ſuperficies, quæ includant ſuperficiem ſphæricam alteri concentricam, ac proinde illâ ſint (*b*) majores. Quoniam igitur ſphærica ſuperficies DPLM, deficit a ſuperficie ſphæricâ ACEG quantitate minori quàm ſit data X; multo magis ſuperficies conicæ ab eâdem ſphæricâ ACEG, deficient quantitate minori quàm ſit data X, ac proinde (*c*) in ACEG ſuperficiem deſinent. Quod erat demonſtrandum.

(a) *Patet ex lem. 2. ſchol. poſt 11. l. 6.*

(b) *Per axio. 3. hujus.*

(c) *Per def. 6. l. 12.*

PROPOSITIO XXI.

Conica ſuperficies ſegmento ſpharico DAF inſcripta, in ipſam ſegmenti ſphæricam ſuperficiem deſinunt. Fig. 20.

Demonſtrabitur eodem ferè ratiocinio quo præcedens.

PRO-

PROPOSITIO XXII.

Fig. 19. *Demonſtratum eſt propoſ.* 18. *circulum cujus radius eſt medius proportionalis inter diametrum AE, & rectam EB; quæ ab extremitate diametri ducitur ad terminum lateris AB diametro proximi, æqualem eſſe omnibus ſuperficiebus conicis ſphæræ inſcriptis.*

(a) Vide def. 6. l. 12. *Dico hunc circulum deſinere* (a) *tandem in circulum, cujus radius eſt AE ſphæræ diameter.*

Nam ſi plura ſemper ac plura in infinitum latera circulo maximo inſcribantur, (quæ deinde circa AE in orbem acta conicas producant ſuperficies,) patet latus AB fieri tandem quavis datâ rectâ minus, ac proinde ſubtenſam EB ad diametrum AE accedere ad intervallum etiam quovis dato minus; unde fit, ut differentia ipſarum AE, BE etiam fiat quavis datâ minor. Ergo multò magis media proportionalis inter AE & BE, quæ ſemper major eſt quàm BE, differet ab AE tandem defectu minor quocunque dato. Ergo etiam circulus cujus ſemidiameter eſt media inter AE & BE, a circulo cujus radius eſt AE, tandem differet defectu minori quocunque dato: hoc eſt, in (b) ipſum deſinet. Quod erat demonſtrandum.

(b) Per def. 6. l. 12.

Hæc per ſe ſatis clara, non eſt neceſſe operoſiùs demonſtrare.

PROPOSITIO XXIII.

Fig. 20. *Demonſtratum eſt propoſ.* 19. *circulum cujus radius eſt medius proportionalis inter EB & AO ſegmenti axem, æqualem eſſe omnibus ſuperficiebus conicis portioni ſphæricæ DAF inſcriptis.*

Dico hunc circulum deſinere in circulum, cujus radius eſt recta AD, a ſegmenti vertice ducta ad peripheriam circuli DQFN, qui baſis eſt ſegmenti.

Nam quia jam ex præced. demonſt. liquet EB deſinere tandem in AE, patebit quoque mediam proportionalem inter

ter EB & AO, deſinere tandem in mediam proportionalem inter AE & AO; hoc (*a*) eſt, in ipſam AD. Manifeſtum eſt igitur & circulum cujus radius eſt medius proportionalis inter EB & AO etiam deſinere in circulum radii AD. Quod erat demonſtrandum. (a) *Per cor.* 2. *p.* 1. *l.* 6.

Lemma ad ſequen.

SI diameter diametri dupla eſt, circulus circuli quadruplus erit.

Patet ex propoſ. 2. l. 12. & defin. 10. lib. 5. [*vel ex cor.* 3. *p.* 2. *l.* 12.]

PROPOSITIO XXIV.

CUjuſcunque ſphæræ ſuperficies quadrupla eſt maximi circuli ejuſdem ſphæræ. *Fig.* 19.

Hoc nobiliſſimum Archimedis theorema ex jam præmiſſis expeditè demonſtrabimus hunc in modum.

Circulo ſphæræ maximo circa diametrum AE intelligatur inſcripta eſſe figura ordinata, cujus latera quaternarius metiatur; quæ circa AE in orbem ducta, producat conicas ſuperficies ſuperficiei ſphæricæ inſcriptas, ducaturque EB. Demonſtratum jam ſupra (*b*) eſt, omnes conicas ſuperficies ſphæræ inſcriptas æquales eſſe circulo, cujus radius poteſt rectangulum AEB, hoc eſt, cujus radius eſt medius proportionalis inter AE & EB. Atque hoc ſemper eveniet, inſcriptionibus in infinitum continuatis. Quare cùm inſcriptæ conicæ ſuperficies (*c*) tandem deſinant in ſphæricam ſuperficiem, circulus verò cujus radius eſt medius inter AE & EB, deſinat (*d*) in circulum cujus radius eſt AE; ipſa quoque ſphærica ſuperficies (*e*) æqualis erit circulo radii AE, hoc eſt, (*f*) quadruplo maximi circuli ACEG. Quod erat demonſtrandum.

(b) *Per* 18. *hujus.* (c) *Per* 20. *hujus.* (d) *Per* 22. *hujus.* (e) *Per* 2. *hujus.* (f) *Per lem. præc.*

Viam, quâ in theoremate nobiliſſimo demonſtrando hactenus uſi ſumus, Archimedeâ multo breviorem & clariorem eſſe ſciet, qui Archimedem legerit.

Corollaria.

1. EX hoc præclaro atque admirabili theoremate, quo immortale nomen Archimedes apud omnes Geometras conſecutus eſt, exhibetur circulus æqualis ſuperficiei ſphæricæ, is nimirum cujus ſemidiameter eſt ſphæræ diameter, ſive cujus diameter dupla eſt diametri ſphæræ.

[Cor. 2.

[Cor. 2. *Hinc etiam*, & *e p.* 2. *l.* 12. *cum p.* 15. *l.* 5. *ſphærarum ſuperficies ſunt inter ſe in ratione duplicatâ radiorum qui in ſphæris ſunt.*]

Scholium.

EXpedita jam erit dimenſio ſuperficiei ſphæricæ, principis inter omnes curvas. Duplex eſt modus.

1. Menſuretur circulus ſphæræ maximus, (ut traditur in ſcholio poſt P. 6. hujus,) & multiplicetur per 4. Ut ſi maximus orbis terræ circulus inventus ſit continere quadrata milliaria unius horæ ſive Belgica 5,940000. hic numerus quadruplicatus exhibet quadrata milliaria Belgica 23,760000. quæ in ſuperficie orbis terræ continentur.

2. Diameter ſphæræ multiplicatæ per circumferentiam maximi circuli, exhibet ſphæræ ſuperficiem. Ut ſi terræ diametro dentur milliaria unius horæ $2750\frac{14}{71}$, atque inde maximi circuli circumferentia eliciatur milliariorum 8640; hi duo numeri, omiſſâ fractione, multiplicati per invicem, dabunt rurſum quadrata milliaria unius horæ, 23,760000. totam orbis terræ ſuperficiem conſtituentia.

Demonſtratio patet ex primo coroll. p. 5. hujus: rectangulum enim ſub diametro ſphæræ, & maximi circuli circumferentiâ, per dictum corol. eſt quadruplum maximi circuli.

[De *numeris in hoc ſcholio memoratis vide quæ monuimus in ſchol. poſt p.* 6. *hujus.*]

PROPOSITIO XXV.

Fig. 20. *CUjuſcunque portionis ſphæricæ* (*DAF*) *ſuperficies æqualis eſt circulo, cujus radius eſt recta* (*AD*) *a vertice portionis ducta ad circumferentiam circuli* (*DOFN*) *qui portionis eſt baſis.*

[1. *Pars.*] Portionis maximæ ſectioni inſcripta cogitetur circa axem AO, figura æquilatera & parilatera baſi demptâ, [*cujus nullum latus ſit axi* (a) *parallelum*;] quæ circa AO in orbem acta, portioni inſcribet conicas ſuperficies. Ducatur quoque recta EB, ut (*b*) ſupra. Omnes conicæ ſuperficies ſegmento ſphærico jam inſcriptæ æquantur (*c*) circulo, cujus radius eſt medius proportionalis inter EB, & ſegmenti axem AO. Atque hoc, multiplicatis in infinitum inſcriptionibus, ſemper continget. Quare, cùm & conicæ ſuperficies ſegmento inſcriptæ, deſinant (*d*) in ſphæricam ſegmenti ſuperficiem

(a) *Vide ſch. p.* 17. *hujus.*
(b) *In* 18. & 19. *hujus.*
(c) *Per* 19. *hujus.*
(d) *Per* 12. *hujus.*

perficiem, & circulus cujus radius inter EB & AO medius eſt, deſinat (*a*) in circulum radii AD; etiam (*b*) ſphæricæ portionis ſuperficies DAF, circulo radii AD æqualis erit. Quod erat demonſtrandum.

(a) Per 23. hujus. (b) Per 2. hujus.

[2. *Pars. Sit ED recta a vertice E portionis ſphæricæ minoris DEF ad circumferentiam baſeos ducta, & jungatur AD. Propter* (c) *angulum ADE rectum*, (d) *erit circulus radio AE æqualis ſummæ circulorum radiis AD, ED reſpective deſcriptorum. Sed circulus radio AE* (e) *æquatur toti ſuperficiei ſphæricæ, & circulus radio AD* (f) *æquatur portionis majoris DAF ſuperficiei. Ergo circulus radio ED, portionis minoris DEF ſuperficiei æquabitur.*]

(c) Per 31. l. 3. (d) Per cor. 8. p. 2. l. 12. (e) Patet ex dem. p. 24. hujus. (f) Per 1. partem hujus prop.

Hoc alterum eſt ex Archimedis inventis nobilioribus, quod perinde ac præcedens, via multò, quàm ipſe, breviori ac clariori jam demonſtravimus.

[Cor. *Hinc datis ſphæræ diametro AE, & portionis ſphæricæ DAF axe AO, (vel datis axe AO, & OD baſis radio,) habetur AD radius circuli, qui portionis ſphæricæ ſuperficiei æquatur, atque inde dabitur ſuperficiei portionis ſphæricæ dimenſio. Cùm enim ſint* (g) *AE, AD AO* ÷÷, *erit* (h) *AD* $=$ $\sqrt{AE \times AO}$; (*vel propter triangulum rectangulum AOD, erit* (i) *etiam AD* $=$ $\sqrt{AOq + DOq}$.) *Si igitur fiat* 113 *ad* 355, *ut AD ad terminum quartum; hic terminus per AD multiplicatus, dabit aream, portionis ſphæricæ ſuperficiei æqualem. Patet ex hac, & ſchol. p. 6. hujus, cum p. 15. l. 5.*]

(g) Per cor. 2. p. 8. l. 6. (h) Patet ex 17. l. 6. (i) Patet ex 47. l. 1.

PROPOSITIO XXVI.

Cylindri recti ſphæræ circumſcripti (HPSV) ſuperficies, æqualis eſt ſuperficiei ſphæræ. Fig. 21.

Et ſi cylindrus ac ſphæra ſecentur planis ad axem (BG) rectis, erunt ſingula ſuperficiei cylindricæ ſegmenta, ſegmentis ſingulis ſuperficiei ſphæricæ æqualia.

1. Pars. Quoniam cylindri latus HP æquale eſt (*k*) PS diametro baſis; erit cylindrica ſuperficies HS, quadrupla (*l*) baſeos, hoc eſt, maximi circuli ſphæræ cylindro inſcriptæ; cujus cùm etiam (*m*) quadrupla ſit ſphæræ ſuperficies, erit hæc æqualis cylindricæ. Quod erat demonſtrandum.

(k) Per hyp. (l) Per cor. p. 12. hujus. (m) Per 24. hujus.

2. Pars. Ducantur rectæ BO, GO. Quoniam angulus BOG (*n*) rectus eſt in ſemicirculo, ab eoque cadit OC perpendicularis ad BG, erit (*o*) BO media proportionalis inter GB &

(n) Per 31 l. 3. (o) Per cor. 2. p. 8. l. 6.

GB & BC, hoc eſt, inter IT & HI. Ergo circulus radii BO (*a*) æqualis eſt ſuperficiei cylindricæ HT. Sed idem circulus æqualis (*b*) eſt etiam ſegmento ſuperficiei ſphæricæ OBK. Æquales igitur ſunt ſuperficies, cylindrica HT, & ſphærica OBK.

(a) *Per* 11. *hujus.* (b) *Per præc.*

Deinde, quia eodem modo oſtenditur cylindrica HX æquari ſphæricæ QBR, etiam reliqua cylindrica IX, reliquæ ſphæricæ QOKR, inter duos parallelos circulos interceptæ, æqualis erit.

Ex his patet de ſegmentis omnibus.

[Coroll. *Hinc ſuperficies cylindri ſphæra circumſcripti, eſt dupla baſium.*]

PROPOSITIO XXVII.

Fig. 21.

SEgmenta ſuperficiei ſphærica parallelis circulis diviſa, eam inter ſe proportionem habent, quam ſegmenta diametri (BC, CD, DA, AE, EF, FG) ad circulos parallelos recta.

Sequitur ex præcedenti. Sunt enim ſphæricæ ſuperficiei ſegmenta OBK, QOKR, MQRN, &c. (*c*) æqualia cylindricis, HT, IX, LN, &c. Atqui hæc eandem inter ſe rationem habent, (*d*) quam axeos ſegmenta BC, CD, DA, &c. Ergo & illa. Quod erat demonſtrandum.

(c) *Per præc.* (d) *Per* 13. & 12.

Scholium.

EX hac innoteſcit proportio zonarum & climatum inter ſe. Sunt enim ad invicem ut ſegmenta axis, quæ nota fiunt ex tabulâ ſinuum.

Ex eâdem habetur dimenſio ſegmentorum ſuperficiei ſphæricæ. Nam quia & tota ſphæræ ſuperficies nota eſt ex ſcholio prop. 24. & ſegmentorum proportio, utpote eadem quæ partium axis, etiam datur; liquet ſegmenta ſingula innoteſcere.

Cæterum & quatuor præcedentia theoremata, & reliqua omnia quæ ſequuntur, omnia ſingularia atque admiranda ſunt, planeque digna, ad quæ intelligenda, Geometriæ ſtudioſi ardenti ſtudio incumbant.

Lemma ad ſequent.

Fig. 22.

SI ſphæram tangat planum (QN in O,) recta (AO) ex centro ad contactum ducta, eſt plano tangenti perpendicularis.

Secentur

Secentur planum tangens QN & ſphæra, per [*centrum A &*] tactum O, duobus planis [*quorum ſectio communis erit AO, &*] quæ in ſphærâ quidem producant circulos OG, OD, in plano autem QN rectas CO, IO, quæ circulos contingant (*a*) in O. Igitur per 18. l. 3. AO perpendicularis eſt ad utrumque IO, CO, ac proinde per 4. l. 11. recta plano QN. Quod erat demonſtrandum. (a) *Per def. 2. l. 3.*

[Coroll. *Hinc colligimus globum perfectè politum, in plano horizontali perfectè polito QN Tellurem in O tangente poſitum, quieſcere non poſſe, niſi in puncto contactûs O collocetur. Ex. gr. Globus ad I poſitus, ob gravitatem ſuam & plani declivitatem deſcendet verſus O. Nam ductâ AI, in triangulo rectangulo AOI, latus AI angulo recto oppoſitum, majus eſt* (b) *quàm AO, adeoque globus ad I magis diſtat a centro quàm ad O, & proinde globus ad I quieſcere nequit, ſed verſus O deſcendet: Neque aliter fluidorum deſcenſum, atque in ſuperficiem ſphæricam conformationem probamus.* (b) *Per. 19. & cor. 5. p. 32. l. 1.*

Lemma ad conſect. 3. in ſchol. ſeq. *Sint O, P, Q trium circulorum peripheriæ, & R, S, T eorum radii reſpectivè; ſitque R—S=T: Erit O—P=Q.*

Nam O:P::(c) *R:S; & P:Q::S:T.* (d) *Ergo O—P:Q::R—S:T. Sed R—S*(e)*=T. Ergo O—P*(f)*=Q.* (c) *Per 7. hujus.* (d) *Per cor. 2. p. 22. l. 5.* (e) *Per hyp.* (f) *Per def. 5. l. 5.*

Scholium. *Cùm plana per centrum terræ tranſeuntia, in quibus omnia ad horizontem recta conſiſtunt, circulos magnos & æquales in terræ ſuperficie generent, lauta nonnulla conſectaria ex authore noſtro in Aſtronomiâ ſuâ* (g) *apponemus, quæ ex circulorum naturâ facillimè poſſunt intelligi.* (g) *Lib. 1. cap. 2. num 6.*

1. *Si quâ ſui parte ſuperficies terræ eſſet perfectè plana, non magis poſſent homines in eâ recti conſiſtere quàm in clivo montis: excepto nimirum contactûs puncto.* *Fig. 27. l. 3.*

2. *Caput viatoris plus itineris conficit quàm pedes: item qui eques eandem viam proficiſcitur, plus quàm qui pedes. Item in navi, pars ſuprema mali plus viæ percurrit quàm inferior.*

3. *Si quis totum orbis circumductum peragraſſet, iter ejus a capite confectum ſuperaret iter confectum a pedibus peripheriarum differentiâ, quæ* (h) *æqualis eſt circumductui circuli cujus radius eſt ipſa hominis ſtatura.* (h) *Per lem. ad hoc conſ. 3.*

4. *Vas aquâ plenum ſi ad perpendiculum efferatur in altum, continuò aliquid ex eo effluet, & tamen manebit plenum; quia ſcilicet, ſuperficies aquæ in partem majoris ſphæræ continuò comprimetur. Imò ſi vas in altum* ſine termino *efferatur, ſuper-*

V *ficiei*

ficies aqua in eo contenta aeſcendet ſine termino *verſùs planum per margines ductum ; neque tamen unquam ad planum iſtud perveniet.*

5. *Si vas aquâ plenum rectà deorſum feratur, quamvis nihil effluat, tamen deſinet eſſe plenum: quia ſcilicet aqua ſuperficies in partem minoris ſphara continuò tumeſcet. Ex quo ſequitur,*

6. *Unum idemque vas plus aqua continere in pede montis quàm vertice; plus etiam in cellâ ſubterraneâ quàm in cubiculo. Quibus adde,*

Fig. 27. l. 3. 7. *Duos funiculos, de quibus duo globuli ferrei in perpendiculo penduli ſint, [& proinde adificiorum muros juxta perpendicula erectos] non eſſe inter ſe parallelos: ſed partes radiorum terra, in centro coeuntium.]*

PROPOSITIO XXVIII.

Fig. 23. 25. & 24. *OMnis ſphara aqualis eſt cono (ZO) cujus altitudo (KO) par eſt radio ſphara, baſis verò (Z) ſuperficiei ſphara aqualis.*

Intelligatur ſphæræ circumſcriptum eſſe corpus aliquod polyedrum, cujus ſolidi anguli novis planis ſphæram tangentibus abſcindantur. Quo facto, orietur aliud corpus polyedrum ſphæram continens, minus priore, & pluribus conſtans angulis, & ſuperficiem habens ex pluribus ac minoribus planis tangentibus compoſitam. Si polyedri hujus ſolidi anguli novis planis tangentibus iterum abſcindantur, & tertii polyedri inde nati ſimiliter; atque ita in infinitum: fiet tandem ut & polyedrum excedat ſphæram ſolido minori quocunque dato, & ſuperficies ejus ex planis tangentibus (quæ, ut dixi, ſine termino & minora, & plura erunt) compoſita, ſphæricam ſuperficiem excedat quoque, plano minori, dato quocunque. Quod utrumque, licèt demonſtrari poſſet, tamen quia per ſe ſatis clarum, poſtuletur ſtudio brevitatis. His ita conſtitutis, quæſitum ita concludemus.

Polyedrum jam expoſitum componitur ex pyramidibus, quarum vertex communis eſt centrum ſphæræ, baſes verò ſunt plana tangentia, quæ polyedri ſuperficiem conſtituunt. Et quia rectæ ex centro A ad ſingulorum planorum contactus ductæ, ad plana (*a*) ſingula perpendiculares ſunt; erunt omnium pyramidum, quibus conſtat polyedrum, æqualis altitudo, ipſe nimirum AB radius ſphæræ. Si jam igitur planum

(a) Per lem. præc.

rum X ponatur æquale ſuperficiei ipſius polyedri, ſuperque eo recta ſit pyramis ad altitudinem MN etiam æqualem ſphæræ radio AB, manifeſtum eſt (a) omnes pyramides ſupra dictas, hoc eſt, totum polyedrum, æquari pyramidi XN. Ad eundem modum reliqua omnia polyedra ſphæram includentia, quæ ex truncatione perpetuâ ſolidorum angulorum, alia atque alia naſcentur in infinitum, ſemper æqualia erunt pyramidibus (per XN repræſentatis) quarum altitudines (MN) ſunt radius ſphæræ, baſes verò (X) æquales ſuperficiebus polyedrorum, ſphæram ambientibus. Quare cùm tandem, & polyedra (ut dixi ſupra) in ſphæram; & pyramides XN (ut mox oſtendam) in conum ZO deſinant; etiam (b) ſphæra cono æqualis erit. Quod erat demonſtrandum.

(a) *Patet ex dem. p. 6. l. 12.*

(b) *Per 1. hujus.*

Quod autem pyramides XN (c) deſinant in conum, ſic oſtendo. Polyedrorum ſuperficies deſinunt in ſphæræ ſuperficiem, ut poſtulatum ſupra. Atqui baſes X pyramidum XN, ſemper æquales ponuntur ſuperficiebus polyedrorum; & Z baſis coni ZO per hyp. æqualis eſt ſuperficiei ſphæræ: ergo etiam baſes X deſinent in baſim Z; ac proinde, cùm pyramides XN ſint ad conum ex hyp. æquè altum, ut (d) baſis X ad baſim Z, etiam pyramides in conum deſinent.

(c) *Vide def. 6. l. 12.*

(d) *Per cor. p. 11. l. 12.*

Demonſtratio jam allata hujus propoſitionis & ſequentis, penitus diverſa eſt ab eâ, quâ uſus eſt Archimedes; quæ quidem valde ſubtilis & ingenioſa eſt, ſed prolixa & ardua; ad quam videlicet adhibentur duo manifeſta, & propoſitiones undecim, præter alias non paucas, à quibus illæ dependent. Ipſum verò theorema ab Archimede proponitur hunc in modum: Omnis ſphæra quadrupla eſt coni baſim habentis æqualem maximo circulo ſphæræ, altitudinem verò radium.

[Coroll. *Hinc hemiſphærium duplum eſt coni baſim habentis æqualem maximo ſphæræ circulo, altitudinem verò ejuſdem ſphæræ radio æqualem.*

Tacquetus hoc corollarium in prop. 30. exhibet; ſed in ejus demonſtratione aſſumit id quod ipſa propoſitione vix clarius eſſe videtur, nempe, hemiſphærium æquale eſſe cono, habenti pro altitudine radium, & pro baſi circulum ſuperficiei hemiſphærii æqualem. *Quod quidem ex hac prop. 28. facile deducitur: verùm tamen & ipſa prop. 30. ex eâdem hac pr. 28. pari facilitate deduci poterat. Aut igitur oportuit prop. 30. huc transferri, & in corollarium prædictum mutari, aut ſaltem, ſi propoſitio memorata locum ſuum teneat, paulo aliter demonſtrari debet.*]

Scholium.

EX hoc prænobili theoremate, figuræ inter corporeas nobiliſſimæ elicitur dimenſio. Nam ſi diametri ſexta pars, ſive tertia ſemidiametri, multiplicetur per ſphæræ ſuperficiem jam notam per ſcholium prop. 24. proveniet ſphæræ ſoliditas.

Inventa ſit ſphæræ terreſtris ſuperficies continere quadrata unius horæ milliaria 23, 760000. & ſemidiameter eſto milliarium horariorum 1375. cujus tertia pars eſt 458⅓. Multiplica 458. omiſſâ fractione, per 23, 760000. provenient 10882, 080000. cubica unius horæ milliaria pro ſoliditate orbis terræ. [*De hiſce verò numeris, vide notata ad ſchol. p. 6. hujus.*]

(a) *Per hanc 28.* (b) *Per ſch. p. 6. hujus.*

Cùm enim ſphæra ſit æqualis (*a*) cono, cujus altitudo eſt radius ſphæræ, baſis verò ſuperficies ſphæræ; coni autem ſoliditas (*b*) producatur ex parte tertiâ altitudinis, (hoc eſt, radii ſphæræ) ductâ in baſim, (hoc eſt, in ſphæræ ſuperficiem;) etiam ſphæræ ſoliditas obtinebitur ex tertiâ parte radii ductâ in ſuperficiem.

[*Datis autem diametro & circumferentiâ, habebitur ſphæræ ſoliditas, ſi pars ſexta circumferentiæ ducatur in diametri quadratum: vel aliter, ſi diviſo diametri quadrato per 6, quotiens per circumferentiam multiplicetur. Idem enim his modis oritur factum, ac ſi diametri ſexta pars in ſphæræ ſuperficiem duceretur.*]

PROPOSITIO XXIX.

Fig. 26.

OMnis ſector ſphæræ, æqualis eſt cono, cujus altitudo eſt radius ſphæræ, baſis verò ſectoris ſphærica ſuperficies.

Eſto primùm ſector (AECG) hemiſphærio minor. Intelligatur ſectori circumſcriptum eſſe polyedrum corpus rectilineum. Si cætera ratiocinatio omnis ad eundem modum inſtituatur ut in præcedenti, eodem modo concludetur quæſitum. Id ſolum oportebit oſtendere, ex quo diſcurſus totus dependet, ſuperficiem polyedri ex planis ſphæricam ſuperficiem ECG undequaque tangentibus compoſitam, eſſe majorem ſuperficie ECG. Quod ita fiet. Cogitetur ſuperficiei ECG apponi alia æqualis & ſimilis, planis tangentibus eodem

eodem prorſus modo cincta quo prior. Erit jam tota (*a*) ſuperficies ex planis compoſita, major totâ ſphæricâ. Ergo etiam dimidia ex planis compoſita, dimidiâ ſphæricâ E C G major erit. (a) *Patet ex ax. 3. hujus.*

Eſto deinde ſector (A E B G) major hemiſphærio. Uterque ſector ſimul ſumptus, æqualis (*b*) eſt cono cujus altitudo eſt radius ſphæræ, baſis autem tota ſuperficies; hoc eſt, (*c*) duobus conis, quorum altitudo eadem, baſes verò pares ſuperficiei ſphæricæ ſegmentis E C G, E B G. Atqui ſectorum unus AECG hemiſphærio minor, per 1. partem æquatur cono cujus altitudo eſt radius, baſis verò ſuperficies ECG. Ergo alter A E B G æquatur cono reliquo, cujus altitudo eſt radius, baſis verò ſuperficies reliqua E B G. Quod erat demonſtrandum. (b) *Per præc.* (c) *Patet ex 11. l. 12. & 24. l. 5.*

Corollarium.

CUM ſuperficies ECG ſit æqualis (*d*) circulo radii CG, & ſuperficies EBG æqualis circulo radii BG; erunt ſectores AECG, & AEBG æquales conis, quorum altitudo eſt radius ſphæræ, baſes verò circuli radiorum CG & BG. (d) *Per 25. hujus.*

Scholium.

EX his habetur dimenſio & ſectorum; & ſegmentorum ſphæræ; ſectorum quidem, ſi multiplicetur (*e*) tertia pars radii per ſphæricam ſectorum ſuperficiem, jam notam ex ſcholio prop. 27. [*vel ex cor. p. 25.*] ſive per circulum radii CG, vel BG: ſegmentorum verò, ſi menſuretur conus E A G, & a ſectore, ſi minor eſt hemiſphærio, auferatur; ſi major, eidem adjiciatur. *Fig. 26.* (e) *Patet ex ſchol. p. 6. hujus.*

Segmentum (MQRN) quod inter duos circulos ſive parallelos ſive non parallelos interjicitur, menſurabis, ſi ſegmenta QBR & MBN jam nota auferantur ab invicem. *Fig. 21.*

PROPOSITIO XXX.

HEmiſphærium (EOBD) coni (EBD) eandem ſecum baſim & altitudinem habentis, duplum eſt. *Fig. 27.*

Conus cujus baſis eſt ſuperficies hemiſphærica EOBD, altitudo autem radius AB, eſt ad conum EBD, (*f*) ut baſis ad (f) *Per 11. l. 12.*

ad baſim, hoc eſt, ut ſuperficies hemiſphærica EOBD ad maximum circulum PT. Ergo cùm ſuperficies hemiſphærica EOBD dupla (a) ſit maximi circuli, etiam conus pro baſi habens ſuperficiem EOBD, pro altitudine radium AB, duplus eſt coni EBD. Atqui hemiſphærium æquatur (b) cono habenti pro altitudine radium, pro baſi ſuperficiem hemiſphæricam EOBD. Ergo etiam hemiſphærium coni EBD duplum eſt. Quod erat demonſtrandum.

(a) Per 24. hujus.
(b) Sequitur ex 28. huj.

[Aliter. *Cùm coni æquè alti inter ſe* (c) *ſint ut baſes, erit conus cujus altitudo eſt radius ſphæræ, & baſis æqualis eſt ſuperficiei ſphæræ, ad conum ejuſdem altitudinis, ſuper circulo ſphæræ maximo pro baſi, ut* (d) *4 ad 1. Et cùm conus prior ſit ſphæræ* (e) *æqualis; erit ergo ſphæra ad conum poſteriorem, ut 4 ad 1; ac proinde eſt hemiſphærium ad conum poſteriorem, ut 2 ad 1. Sed conus poſterior eandem habet altitudinem & baſim cum dicto hemiſphærio.*

(c) Per 11. l. 12.
(d) Per 24. hujus
(e) Per 28. hujus.

Hemiſphærium igitur duplum eſt coni eandem ſecum baſim & altitudinem habentis.

Corol. *Conus EBD, hemiſphærium EOBD ac cylindrus EK, eandem baſim & altitudinem habentia, ſunt inter ſe ut 1. 2. 3. Nam per hanc prop. conus eſt ad hemiſphærium ut 1. ad 2. Et per 10. l. 12. eſt idem conus ad cylindrum ut 1. ad 3.*]

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 28.

Sphæra ſit diviſa in duo ſegmenta ILBG, ISKG plano IQGT, per centrum A non tranſeunte: diameter autem plano ſecanti recta, ſit BOK.

Ut altitudo OB ſegmenti ILBG eſt ad radium ſphæræ AB, ita OK altitudo ſegmenti ISKG fiat ad aliam KN.

Pari modo, ut OK altitudo ſegmenti ISKG eſt ad radium AK ſeu AB, ita altitudo OB ſegmenti alterius fiat ad aliam BD.

Dico 1. Coni ING & IDG quorum altitudines ſunt ON, OD, baſis verò communis IQGT, ſegmentis ſphæricis ſunt æquales.

2. Segmentorum eadem eſt proportio, qua rectarum DO, NO.

3. Segmentum ISKG eſt ad maximum ſibi inſcriptum

ſcriptum conum IKG, ut NO ad KO; & ſegmentum ILBG eſt ad ſibi inſcriptum conum maximum IBG, ut DO ad BO.

Pars 1. Sphæra & coni ſecentur plano per diametrum BK. Producentur in ſphærâ circulus maximus BLKG, in conis verò triangula BIG, IKG. Et quia BOK diameter (*a*) recta eſt circulo QT, erit angulus IOB (*b*) rectus. Angulus quoque BIK (*c*) in ſemicirculo rectus eſt. Quoniam igitur in triangulo BIK ab angulo recto ducta eſt IO perpendicularis in baſim BK, erit BI ad IO, ut (*d*) BK ad KI. Ergo ratio duplicata BI ad IO æqualis eſt rationi duplicatæ BK ad KI; hoc eſt, (quia BK, KI, KO (*e*) ſunt tres proportionales,) æqualis rationi BK ad KO.

Deinde quia eſt ut OK ad radium AB, ita (*f*) OB ad BD; erit quoque invertendo DB ad BO, ut AB ad OK: & permut. DB ad BA, ut BO ad OK: & compon. DA ad BA, ut BK ad OK. Quoniam igitur jam oſtendi rationem BK ad OK duplicatam eſſe rationis BI ad IO, ac proinde æqualem (*g*) rationi circulorum radiis BI, IO deſcriptorum; erit quoque DA ad BA, ut circulus radii BI ad circulum radii IO. Igitur conus ſub altitudine DA, & baſi circulo radii IO, hoc eſt circulo QT, æqualis eſt (*h*) cono ſub altitudine BA, & baſi circulo radii BI, hoc eſt (*i*) ſectori ſphærico AIBG. Quare ſi tam ſectori AIBG, quàm cono ſub DA & circulo QT, addatur idem conus IAG, tota erunt æqualia; videlicet ſegmentum ſphæricum ILBG æquabitur duobus conis, quorum unus eſt, qui fit ſub baſi QT & altitudine DA, alter IAG, ſub eâdem baſi QT, & altitudine OA. Sed hi duo coni (*k*) conficiunt conum IDG. Ergo ſegmentum ILBG cono IDG æquale erit. Quod erat demonſtrandum.

Eodem diſcurſu erit ſegmentum ISKG æquale cono ING, eo ſolùm mutato, ut conus IAG qui priùs addebatur, jam auferatur.

[*Quia enim eſt* (l) *KI : IO :: KB : BI;* (m) *erit KIq : IOq :: KBq : BIq* (n) *:: KB : BO. Sed per hypoth. eſt NK : (AB =) KA :: KO : OB. Et comp. NA : AK :: KB : BO ::* (o) *KIq : IOq ::* (p) *circ. rad. KI : circ. rad. IO = circ. QT. Ergo conus ſub altitud. NA & baſi QT,* (q) *æquatur cono ſub altit. AK & circ. rad. KI, hoc eſt,* (r) *ſectori ſphær. AIKG. Sed conus ſub alt. NA & baſi QT,* (ſ) *æqualis eſt duobus conis ſimul ſumptis, uni quidem ſub altit. NO & baſi QT, & alteri ſub alt, OA & eâdem baſi QT, hoc eſt, conis ING, IAG; Et ſector. ſph. AIKG æqualis eſt ſegm. ſphær. ISKG & cono IAG ſimul ſumptis. Au-*

(a) *Per hyp.*
(b) *Per def.* 3. *l.* 11.
(c) *Per* 31. *l.* 3.
(d) *Per cor.* 3. *p.* 8. *l.* 6.
(e) *Per cor.* 2. *p.* 8. *l.* 6.
(f) *Per hyp.*
(g) *Per cor.* 2. *p.* 2. *l.* 12.
(h) *Per* 15. *l.* 12.
(i) *Per cor. p.* 29. *hujus.*
(k) *Patet ex* 14. *l.* 12. & 24. *l.* 5.
(l) *Per cor.* 3. *p.* 8. *l.* 6.
(m) *Per* 34. *l.* 5. & *ſch. p.* 20. *l.* 6.
(n) *Per cor.* 2. *p.* 8 *l.* 6. & *def.* 10. *l.* 5.
(o) *Prius.*
(p) *Per cor.* 2. *p.* 2. *l.* 12.
(q) *Per* 15. *l.* 12.
(r) *Per cor. p.* 29. *hujus.*
(ſ) *Patet ex* 14. *l.* 12. & 24. *l.* 5.

feratur utrinque conus IAG, & relinquetur con ING = ſegm. ſphær. ISKG. Q. E. D.]

Pars 2. Patet ex primâ. Nam coni IDG & ING ſunt inter ſe (*a*) ut DO & NO. Ergo & ſegmenta ILBG, ISKG conis illis æqualia, ſunt inter ſe, ut rectæ DO, NO.

(a) *Per* 14. *l.* 12.

Pars 3. Patet ſimiliter ex primâ. Nam conus IDG eſt ad conum IBG, (*b*) ut DO ad BO. Ergo & ſegmentum ILBG, cono IDG æquale, eſt ad conum IBG, ut DO ad BO. [*Eodem modo oſtendetur eſſe ſegmentum* ISKG *ad conum* IKG, *ut* NO *ad* KO.]

(b) *Per eand.*

Scholium.

Ex primâ parte hujus theorematis, habetur alia, eaque facillima ſegmentorum ſphæricorum dimenſio; ſi nimirum coni IDG, ING menſurentur; quod fiet, ſi (*c*) tertiæ partes rectarum DO, NO ducantur in circulum QT.

(c) *Vide ſch. poſt* 6. *hujus.*

PROPOSITIO XXXII.

Fig. 27.

Cylindrus rectus (GK,) ſphæra, cui circumſcribitur, & ſoliditate & ſuperficie totâ ſeſquialter eſt.

Communis ſphæræ ac cylindri axis eſto BQ, conus verò maximus hemiſphærio EOBD inſcriptus ſit EBD. Quia cylindrus EK, (ſemiſſis totius GK) triplus (*d*) eſt coni EBD; hemiſphærium verò (*e*) ejuſdem coni duplum, patet cylindrum EK eſſe ad hemiſphærium, ut 3 ad 2. Ergo etiam totus cylindrus GK eſt ad totam ſphæram QEBD, ut 3. ad 2. Quod erat primum.

(d) *Per* 10. *l.* 12.
(e) *Per* 30. *hujus.*

Deinde quia cylindri latus KN eſt æquale baſis diametro GN, erit ejus ſuperficies abſque baſibus (*f*) quadrupla baſeos MI, ac proinde cum baſibus, hoc eſt tota cylindri ſuperficies erit ſextupla baſeos MI, quæ par eſt maximo ſphæræ circulo. Atqui ſphæræ ſuperficies quadrupla eſt maximi circuli. Ergo tota cylindri GK ſuperficies eſt ad ſphæræ ſuperficiem, ut 6. ad 4. ſive ut 3. ad 2. Quod erat alterum.

(f) *Per cor.* 1. 12. *hujus.*

Igitur cylindrus ſphæræ ſibi inſcriptæ & ſoliditate & totâ ſuperficie ſeſquialter eſt. Quod erat demonſtrandum.

[Cor. 1. *Cylindrus rectus ſphæra circumſcriptus, ipſa ſphæra, & conus ejuſdem cum cylindro baſis & altitudinis, ſunt inter ſe ut* 3. 2. 1. *Nam per hanc prop. cylindrus eſt ad ſphæram ut* 3. *ad* 2; *& per* 10. *l.* 12. *eſt cylindrus ad conum ut* 3. *ad* 1. *Ergo, &c. Atque in eâdem ratione ſunt, ſuperficies cylindri hemiſphærio conſcripti cum baſi hemiſphærium tangente, ſuperficies hemiſphærii, & baſis utrique communis. Cùm enim tam cylindrica ſuperficies quàm hemiſphærica, ſit* (g) *dupla baſeos;*

(g) *Per* 26. *hujus cum cor.* ...

erit

erit cylindrica cum baſi ad baſim alteram, ut 3. ad 1. Unde liquet propoſitum.

Cor. 2. *Hinc cylindrus GK demptâ ſphærâ, (ſive ſolidum cylindricum ſphæro cavum, ſuperficie totâ cylindri externè, & ſuperficie ſphæricâ concavâ internè terminatum,) æquatur cono inſcripto GBN. Cùm enim cylindrus ſit ad inſcriptam ſphæram ut 3 ad 2, erit ad ſolidum cylindricum ſphæro-cavum ut 3 ad 1, hoc* (a) *eſt, ut idem cylindrus ad conum GBN; ac proinde ſolidum illud cono GBN æquale erit.* (a) Per 10.l.12.

Cor. 3. *Solidum cylindricum hemiſphæro-cavum, (hoc eſt, cylindrus EK dempto hemiſphærio inſcripto EOBD) æquale eſt cono inſcripto EBD. Etenim tam ſolidum, quàm conus, pars eſt* (b) *tertia cylindri EK.* (b) Patet eodem modo quo cor. 2. Fig. 21.

Cor. 4. *Si conus HAV, cylindro NH inſcriptus, verticem habeat in centro A hemiſphærii MOBN, cylindro etiam inſcripti, & baſem HV hemiſphærii baſi parallelam, & hemiſphærium in ipſius vertice B tangentem; e cylindro autem eximatur hemiſphærium; relinquetur ſolidum cylindricum hemiſphæro-cavum, cono HAV ſuper eâdem cum cylindro baſi HV æquale. Patet ex cor. 3.*

Cor. 5. *Si ejuſmodi conus & ſolidum ſecentur plano quovis LX baſi HV parallelo; fient in cono circulus αι, in ſolido planum annulare QLXR, ſibi invicem ubique æqualia. Nam ducto ſphæræ radio AR, erit ARq* (c) $=$ *ADq* $+$ *DRq. Sed propter AB, BV æquales,* (d) *erunt AD, Dι æquales:* (e) *æquantur etiam AR, AN, DX inter ſe. Ergo DXq* $=$ *Dιq* $+$ *DRq; & circulus radio DX* (f) *æquatur circulis qui radiis DR, Dι reſpectivè deſcribuntur, ſimul ſumptis. Aufer utrinque circulum radio DR deſcriptum; & reſtabit planum annulare QLXR æquale circulo habenti radium Dι.* (c) Per 47.l.1. (d) Per cor. 1.p.4.l.6. (e) Per def. 5.l.12.& p.34.l.1. (f) Per cor. 2.p.2.l.12. & p.24.l.5.

Cor. 6. *Segmenta quævis coni HAV & ſolidi cylindrici hemiſphæro-cavi, planis baſi parallelis intercepta, ſunt æqualia. Nam conus ſolido æqualis eſt; & ſectio circularis αι coni, plano annulari QLXR ſolidi ſemper æquatur. Si igitur planum LX feratur ſurſum vel deorſum, motu baſi parallelo, generabit ubique coni & ſolidi cylindrici æqualia ſegmenta.*

Cor. 7. *Ex menſurâ* (g) *igitur coni HAV habetur dimenſio ſolidi hemiſphæro-cavi; & ex menſurâ* (h) *coni truncati OαιK, habetur dimenſio ſegmenti annularis QLIORXTK iiſdem planis IT, LX intercepti. Atque hinc etiam alia methodus exoritur ſegmenta quævis ſphærica dimetiendi.* (g) Per ſch. p. 6. hujus. (h) Per eand.

Sic ſi quæratur menſura ſegmenti QOKR parallelis planis QR, OK intercepti; e cylindro LT deducatur conus truncatus OαιK: & ſi quæratur ſegmentum MQRN a parallelis planis MN, QR terminatum; e cylindro MX ſubducatur conus αAι.]

Scholium.

QUanti hoc theorema fecerit Archimedes, argumento eſt, quòd tumulo ſuo ſphæram cylindro inſcriptam apponi voluerit. Atque idcirco fortaſſe, inter alia tam multa & præclara inventa ſua, hoc illi præ reliquis placuit, quòd & corporum & ſuperficierum corpora ipſa continentium eadem eſſet atque una rationalis proportio. Similem affectionum identitatem, annulos inter annulorumque ſuperficies demonſtravimus lib. 4. Cylindricorum & annularium, prop. 13, 14, 15. ſed & ipſa in ſphærâ aliud mihi hujus rei exemplum illuſtre ſeſe obtulit. Deprehendi ſiquidem, quemadmodum ſphæra ad cylindrum rectum ſe ambientem, (qui neceſſariò æquilaterus erit,) eſt tam ſoliditate quàm ſuperficie, ut 2. ad 3. ita ſphæram ad æquilaterum conum ſe ambientem & ſoliditate ſimiliter & ſuperficie eam habere proportionem, quam 4 ad 9. Ex quo deinde illud conſequitur, ſeſquialteram proportionem ab Archimede in cylindro & ſphærâ repertam, in tribus ſolidis, ſphærâ, cylindro, & cono æquilatero continuari. Utriuſque demonſtrationem, pluraque alia theoremata noſtra, quibus ſphæræ natura mirabilis amplius innoteſcet, tredecim ſequentibus propoſitionibus comprehenſa, ſubjungam.

PROPOSITIO XXXIII.

Fig. 29.

SUperficies ſphæræ dupla eſt ſuperficiei cylindri quadrati ſphæræ inſcripti.

Quadratum maximo ſphæræ circulo inſcriptum, a quo in orbem ducto deſcribitur quadratus cylindrus, eſto AKLD, ducaturque AL, diameter quadrato & ſphæræ communis. Quoniam quadratum AL par (*a*) eſt quadratis æqualibus AK, KL, erit duplum unius AK. Ergo etiam circulus diametri AL, duplus (*b*) eſt circuli, cujus diameter AK, circuli nempe CN. Atqui ſuperficies ſphæræ quadrupla (*c*) eſt circuli, cujus diameter AL: is enim eſt maximus ſphæræ circulus, cùm AL ſit ſphæræ diameter. Ergo ſphæræ ſuperficies octupla eſt circuli CN. Sed quia LK, KA, (*d*) æquales ſunt, cylindrica ſuperficies ACL quadrupla (*e*) eſt circuli CN. Ergo cùm ſphæræ ſuperficies ejuſdem circuli octupla ſit, cylindricæ ſuperficiei dupla erit. Quod erat demonſtrandum.

(a) *Per* 47. *l.* 1.
(b) *Patet ex cor.* 5. *p.* 2. *l.* 12.
(c) *Per* 24. *hujus.*
(d) *Per hyp.*
(e) *Per cor. p.* 12. *hujus.*

PROPOSITIO XXXIV.

Fig. 29.

SPhæræ ſuperficies ad totam cylindri quadrati ſibi inſcripti ſuperficiem eam proportionem habet, quàm 4. ad 3.

Ponan-

Ponantur eadem quæ demonſt. præced. Quoniam cylindri latus LK & baſis diameter AK (*a*) æquales ſunt, erit ſuperficies cylindrica CL (*b*) quadrupla baſis CN, ac proinde tota cylindri ſuperficies ad utramque baſim CN & SL eſt ut 6. ad 2. Atqui ſphæræ ſuperficies eſt ad utramque ſimul baſim CN, SL ut 8. ad 2. cùm in præced. oſtenſa ſit eſſe ad unam baſim, ut 8. ad 1. Ergo ſphæræ ſuperficies eſt ad totam cylindri CL ſuperficiem ut 8. ad 6. ſive ut 4. ad 3. Quod erat demonſtrandum.

(a) *Per hyp.* (b) *Per art. p. 12. hujus.*

Corollaria.

1. Tota cylindri recti ſphæræ circumſcripti ſuperficies eſt ad totam ſuperficiem cylindri æquilateri inſcripti, ut 2. ad 1. Nam circumſcripta eſt ad ſphæricam ut 6. ad 4. per 32. hujus. Sphærica autem eſt ad inſcriptam, ut 4. ad 3. per hanc. Ergo ex æquo circumſcripta eſt ad inſcriptam, ut 6. ad 3. ſive ut 2. ad 1.

[*Pari modo, ſphæra cylindro quadrato conſcriptæ ſuperficies dupla eſt ſuperficiei ſphæræ eidem inſcriptæ; ſicut & hæc dupla eſt circuli maximi ſphæræ conſcriptæ. Sunt enim* (c) *ſphærica circumſcripta, tota cylindrica, & ſphærica inſcripta, ad maximum ſphæræ circumſcriptæ circulum; ut 4, 3 & 2. ad* 1.

(c) *Per hanc & 32. cum 24. hujus.*

2. *Superficies tota cylindri recti ſphæræ circumſcripti, ſuperficies ſphæræ, & ſuperficies tota cylindri æquilateri ſphæræ inſcripti, ſunt inter ſe in proportione muſicâ, hoc eſt, ut* (d) 6. 4. 3.

(d) *Per 32. & hanc.*

Tres autem quantitates ſunt in proportione muſicâ, ſi fuerit prima ad tertiam, ut eſt differentia primæ ac ſecundæ ad differentiam ſecundæ & tertiæ. Sic quia 6. 3 :: 6 — 4. 4 — 3 (:: 2. 1;) *erunt* 6, 4, 3 *in proportione muſicâ.*

Scholium. *Cylindrus ſphæræ circumſcriptus eſt ad cylindrum ſimilem (nempe æquilaterum) eidem ſphæræ inſcriptum, ut in quadrato diameter ad lateris ſemiſſem; ſive (quod perinde eſt) ut circuli diameter ad ſinum graduum* 45. *Atque in eâdem ratione eſt ſphæra cylindro æquilatero circumſcripta ad ſphæram eidem inſcriptam.*

Fig. 23.

1. *Nam propter triangulum rectangulum æquicrure AKL, demiſſis perpendicularibus* KQ, QR, *triangula AQK, ARQ erunt* (e) *etiam rectangula & æquicrura. Unde* (f) *AL, AK, AQ, AR* $\div\!\!\div$, *&* (g) *AR* = $\frac{1}{2}$ *AK. Sed AL eſt diameter baſeos cylindri circumſcripti, & AK diameter baſeos inſcripti. Ergo, propter cylindrorum ſimilitudinem, erit* (h) *circumſcriptus ad inſcriptum in triplicatâ ratione AL ad AK, hoc* (i) *eſt, ut AL ad (AR* =) $\frac{1}{2}$ *AK. Sed AL eſt quadrati DK & circuli AGBK*

(e) *Per* 8. *l.* 6. (f) *Per cor.* 2. *p.* 8. *l.* 6. (g) *Per n.* 1. *ſchol. p.* 26. *l.* 1. (h) *Per* 12. *l.* 12. (i) *Per def.* 10. *l.* 5.

AGBK diameter, & AK eſt ejuſdem quadrati eidem circulo inſcripti latus, ſive in circulo GK chorda gr. 90; ac proinde (a) *½ AK eſt ſinus gr. 45. Ergo cylindrus circumſcriptus eſt ad inſcriptum, ut in quadrato diameter ad lateris ſemiſſem, ſive ut circuli diameter ad ſinum graduum 45.*

(a) Per cor. 1. p. 3. l. 3.

2. *Et in eâdem ratione eſt ſphæra cylindro æquilatero circumſcripta ad ſphæram eidem cylindro inſcriptam. Nam ſphæra GK cylindro æquilatero ADLK circumſcripta diameter eſt AL, & ſphæra inſcripta diameter æqualis eſt diametro baſeos cylindri, nempe ipſi AK. Sphæra igitur circumſcripta erit* (b) *ad inſcriptam, in triplicatâ ratione AL ad AK, hoc eſt, ut AL ad AR ſive ½ AK. Q. E. D.*

(b) Per 18. l. 12.

Cor. ad ſchol. præced. *Sphæra eſt ad cylindrum æquilaterum ſibi inſcriptum, ut in quadrato quadrupla diameter ad triplum latus; ſive, ut quadrupla circuli diameter ad triplum latus quadrati circulo inſcripti.*

Nam per ſchol. præced. eſt ſphæra cylindro æquilatero circumſcripta ad ſphæram eidem inſcriptam, ut in quadrato dupla diameter ad latus, ſive ut quadrupla diameter ad duplum latus. Sed ſphæra inſcripta eidem cylindro eſt ad cylindrum, (c) *ut 2 ad 3, ſive ut duplum latus quadrati ad triplum ejuſdem quadrati latus. Ergo* (d) *ſphæra circumſcripta cylindro æquilatero eſt ad eundem cylindrum, (hoc eſt, ſphæra eſt ad cylindrum æquilaterum ſibi inſcriptum,) ut in quadrato quadrupla diameter ad triplum latus, ſive (quod perinde eſt) ut quadrupla circuli diameter ad triplum latus quadrati eidem circulo inſcripti.*]

(c) Per 32. hujus.
(d) Per 22. l. 5.

PROPOSITIO XXXV.

Fig. 79. geom.

Cujuſcunque portionis ſphæricæ ſuperficies (ILBG) ad ſuperficiem coni maximi inſcripti (IBG,) eam rationem habet, quam coni latus (BG) ad baſis radium (GO.)

Quoniam portionis ILBG ſuperficies (*e*) æqualis eſt circulo radii BG, erit proportio ejus ad circulum QT, baſim nempe ſuam & coni, duplicata (*f*) rationis BG ad GO; hoc eſt, (*g*) rationis ſuperficiei conicæ IBG ad baſim eandem QT. Ergo liquet (*h*) ſuperficiem ILBG eſſe ad ſuperficiem conicam IBG, ut eadem conica IBG eſt ad baſim QT. Quare cùm conica IBG ſit ad baſim QT, (*i*) ut BG ad GO, etiam portionis ſuperficies erit ad conicam IBG ſibi inſcriptam ut BG ad GO. Quod erat demonſtrandum.

(e) Per 25. hujus.
(f) Per cor. 4. p. 2. l. 12.
(g) Per 24. hujus.
(h) Per def. 13. l. 5.
(i) Per 24. hujus.

[Cor.

[Cor: *Ex hujus prop. demonſtratione liquet, ſuperficiem coni maximi ſegmento ſphæræ inſcripti, eſſe mediam proportionalem inter ſuperficiem ſegmenti, & baſim utrique communem.*]

PROPOSITIO XXXVI.

Hemiſphærii ſuperficies (EOBD) ad coni maximi ſive recti inſcripti ſuperficiem (EBD) eam rationem habet, quam in quadrato diameter ad latus: ad ſuperficiem verò coni ſimilis circumſcripti, ut latus in quadrato ad diametrum. Fig. 10. l. 4.

1. Partis demonſtratio ex præcedenti eſt manifeſta. Eſt enim portionis cujuſcunque, ac proinde & hemiſphærii ſuperficies EOBD ad conicam inſcriptam, ut BD ad DA. Eſt autem BADK quadratum, cujus diameter eſt BD, latus DA.

2. Pars. Semiſſis quadrati circulo (cujus centrum A) circumſcripti, eſto EBC: quâ circa axem AB circumactâ, gignatur conus hemiſphærio conſcriptus. Quoniam quadratum EC duplum (*a*) eſt quadrati EB, ſeu GI, etiam circulus diametri EC duplus (*b*) eſt circuli cujus diameter GI, hoc eſt circuli HGDI. Atqui (*c*) ſuperficies hemiſphærii cono EBC incluſi, ejuſdem circuli dupla eſt. Ergo circulus diametri EC eidem ſuperficiei hemiſphæricæ æqualis eſt. Quare cùm ſuperficies conica EBC ſit ad (*d*) circulum diametri EC, baſim nempe ſuam, ut latus BE ad baſis radium EA; erit quoque ad ſuperficiem hemiſphæricam ſibi inſcriptam, ut BE ad EA, hoc eſt, ut diameter in quadrato ad ſuum latus; [*ac proinde, ſuperficies hemiſphærica erit ad circumſcriptam conicam, ut latus in quadrato ad diametrum.*] Quod erat demonſtrandum. Fig. 10. l. 4. (a) Per cor. 1. p. 47. l. 1. (b) Per dcr. 5. p. 2. l. 12. (c) Per 24. hujus. (d) Per 14. hujus.

Corol. *Si hemiſphærium cono rectangulo EBC circumſcribatur & inſcribatur; erit ſuperficies coni media proportionalis inter ſuperficiem hemiſphærii circumſcripti, & ſuperficiem inſcripti. Eſt enim, tam ſuperficies circumſcripta ad conicam, quàm conica ad inſcriptam, ut in quadrato diameter ad latus.*] Fig. 10. l. 4.

PROPOSITIO XXXVII.

Sphæra ad quadratum rhombum conicum ſibi circumſcriptum, & ſoliditate & ſuperficie eam proportionem habet quam in quadrato latus ad diametrum. Fig. eadem cum Fig. 13. l. 5.

Maxi-

Maximo ſphæræ circulo HGDI circumſcriptum eſto quadratum EBCF, a quo circa axem BF in orbem acto, rhombus conicus gignatur ſphæram ambiens.

Ut EB quadrati latus (inſpice Fig. 10. l. 4.) ad diametrum EC, ita fiat S ad R, (inſpice Fig. 13. l. 5.) quæ proportio per 4. terminos S, R, Q, O continuetur. Erit igitur ratio S ad O triplicata (*a*) rationis S ad R, hoc eſt, EB ad EC; & ratio O ad R erit duplicata rationis O ad Q, ſive R ad S, hoc eſt EC ad EB; ac proinde (*b*) O eſt ad R, ut quadratum EC ad quadratum EB: unde (*c*) O eſt dupla ipſius R. His ita conſtitutis, intelligatur rhombo conico ſphæra circumſcribi EBCF. Erit igitur ſphæra HGDI ad ſphæram EBCF in (*d*) ratione triplicatâ diametri GI (ſive EB) ad diametrum EC; hoc eſt, (quod jam oſtendi,) erit ut S ad O. Sphæra autem EBCF eſt ad rhombum conicum ſibi inſcriptum (*e*) ut 2 ad 1. hoc eſt, (quod oſtendi ſupra,) ut O ad R. Igitur ex æquo, ſphæra HGDI eſt ad eundem rhombum, qui ei eſt circumſcriptus, ut S eſt ad R, hoc eſt, ut in quadrato latus EB ad diametrum EC. Quod erat primum.

(a) *Per def.* 10. *l.* 5.
(b) *Per ſch. p.* 20. *l.* 6.
(c) *Ex ſch. p.* 6. & 7. *l.* 4.
(d) *Per* 18. *l.* 12.
(e) *Per* 30. *hujus.*

[*Idem etiam ex unica fig.* 10. *lib.* 4. *inſpectione demonſtrabitur. Nam propter triangula rectangula EGA, EAB, EBC, communem angulum E habentia, erunt* (f) *EG, EA, EB, EC* $\div\!\!\div$, *& ratio EG ad EC triplicata* (g) *erit rationis EB ad EC. Sed ſphæra rhombo conico inſcripta, eſt ad ſphæram eidem circumſcriptam, in triplicatâ* (h) *ratione diametrorum EB, EC, hoc eſt, ut EG ad EC. Et ſphæra circumſcripta, eſt* (i) *ad rhombum cui circumſcribitur, ut* 2 *ad* 1, *ſive ut EC ad EA. Ergo ex æquo,* (k) *ſphæra inſcripta eſt ad rhombum cui inſcribitur, ſeu, (quod idem eſt,) ſphæra eſt ad rhombum ſibi circumſcriptum, ut EG ad EA, hoc eſt, ut in quadrato HG, latus ad diametrum.*]

(f) *Per cor. poſt ſch. p.* 13. *l.* 6.
(g) *Per def.* 10. *l.* 5.
(h) *Per* 18. *l.* 12.
(i) *Per* 30. *hujus.*
(k) *Per* 22. *l.* 5.

Deinde ex ſecundâ parte præcedentis patet hemiſphærii ſuperficiem eſſe ad ſuperficiem coni [*circumſcripti*] EBC, ac proinde & totius ſphæræ [*HGDI*] ſuperficiem eſſe ad ſuperficiem totius rhombi EBCF, ut latus in quadrato ad diametrum. Ergo ſphæra tam ſoliditate quàm ſuperficie eſt ad rhombum quadratum [*conicum ſibi circumſcriptum*] EBCF, ut in quadrato latus ad diametrum. Quod erat demonſtrandum.

[Cor. 1. *Superficies ſphæræ rhombo conico quadrato circumſcriptæ, ſuperficies rhombi, & ſuperficies ſphæræ rhombo inſcriptæ, eandem rationem continuant, eam nempe quam in quadrato habet diameter ad latus. Patet ex præcedenti & hac.*

Cor. 2. *Superficies ſphæra rhombo conico quadrato circumſcripta, dupla eſt ſuperficiei ſphæra eidem rhombo inſcripta. Ac ſimiliter, ſuperficies rhombi conici quadrati ſphæra circumſcripti, dupla eſt ſuperficiei rhombi ſimilis eidem ſphæra inſcripti. Cùm enim per cor.* 1. *ſint ſuperficies ſphæra rhombo circumſcripta, ſuperficies rhombi, & ſpharica inſcripta, ut* EC, EB, EA; *& cùm ſimiliter ſint ſuperficies rhombi ſphæra circumſcripti, ſuperficies ſphæra, & ea rhombi inſcripti, ut* EC, EB, EA; *Liquet in utroque caſu, ſuperficiem corpori circumſcriptam eſſe ad eidem inſcriptam, ut* EC *ad* EA, *ſive ut* 2. *ad* 1. Fig. 10. l. 4.

Cor. 3. *Rhombus conicus quadratus, eſt duorum mediorum proportionalium prior, inter ſphæram inſcriptam & circumſcriptam, ut in demonſtratione prima partis hujus prop. oſtenſum eſt. Nam inſcripta, rhombus, & circumſcripta, ſunt inter ſe, ut* S, R, & O, *in fig.* 13. *l.* 5. *vel ut* EG, EA, & EC, *in fig.* 10. *l.* 4.

Cor. 4. *Patet quoque ex eâdem demonſtratione, (vel etiam ex p.* 30. *hujus,) ſphæram rhombi conici quadrati ſibi inſcripti duplam eſſe.* Fig. 10. l. 4.

Cor. 5. *Sphæra* EBCF *rhombo conico quadrato circumſcripta, eſt ad ſphæram* HGDI *eidem rhombo inſcriptam, ut in quadrato diameter* EC *ad lateris* EB *ſemiſſem* EG, *uti ex demonſtratione memoratâ liquet. Atque in eâdem ratione eſt rhombus conicus quadratus ſphæra circumſcriptus ad ſimilem rhombum conicum eidem ſphæra inſcriptum. Nam per hanc* 37. *eſt rhombus quadratus conicus ſphæra circumſcriptus ad ipſam ſphæram, ut* EC *ad* EB: *& per cor.* 4. *eſt ſphæra ad ejuſmodi rhombum ſibi inſcriptum, ut* 2. *ad* 1, *ſive ut* EB *ad* EG. *Ergo erit ex æquo* (a) *rhombus circumſcriptus ad inſcriptum, ut* EC *ad* EG. (a) P. 22. l. 5.

Cor. 6. *Eadem itaque proportio eſt inter rhombum conicum quadratum ſphæra circumſcriptum & rhombum ſimilem eidem ſphæra inſcriptum, ac inter cylindrum æquilaterum eidem cuivis alteri ſphæra circumſcriptum & inſcriptum; vel inter ſphæram eidem cylindro æquilatero, ſeu eidem rhombo conico quadrato circumſcriptam & inſcriptam. Ea nempe ratio, qua in quadrato eſt inter diametrum & lateris ſemiſſem. Patet ex cor. præced. hujus prop. & ex ſchol. poſt p.* 34. *hujus.*]

PROPOSITIO XXXVIII.

Fig. 30. *Superficies portionis (BGKD) conum æquilaterum (BKD) capientis, dupla eſt ſuperficiei ejuſdem coni.*

Patet ſimiliter ex 35. Nam ſuperficies portionis BGKD eſt ad inſcriptam conicam, ut (*a*) BK ad BA. Sed quia conus BKD æquilaterus ponitur, KB eſt æqualis BD, adeoque dupla BA. Ergo etiam ſuperficies BGKD dupla eſt inſcriptæ conicæ BKD. Quod erat demonſtrandum.

(a) Per 35. hujus.

Cor 1. *Eadem ratio dupla continuatur, inter ſuperficiem portionis ſphæricæ conum æquilaterum capientis, ſuperficiem coni, & baſim coni. Patet ex hac, & ex cor. p. 35. hujus.*

Cor. 2. *Superficies portionis ſphæricæ conum æquilaterum capientis, eſt ad ſuperficiem totam ejuſdem coni, ut 4 ad 3.*

Nam per cor. 1. ſuperficies portionis ſphæricæ, ſuperficies coni, & baſis coni ſunt inter ſe, ut 4. 2. 1. Unde liquet hoc cor.

Cor. 3, *Sphæræ ſuperficies eſt ad totam cylindri æquilateri ſibi inſcripti ſuperficiem, ut ſuperficies portionis ſphæricæ conum æquilaterum capientis eſt ad ſuperficiem totam ejuſdem coni. Nempe ut 4 ad 3. Patet ex p. 34. & ex cor. 2. hujus p. 38.*

Atque in eâdem ratione eſt ſuperficies tota cylindri recti hemiſphærio circumſcripti, ad ſuperficiem totam hemiſphærii. Cùm enim (b) *tam cylindrica ſuperficies, quàm* (c) *hemiſphærica, ſit dupla baſeos; erit tota cylindrica, baſeos quadrupla; & hemiſphærica cum baſi, ejuſdem baſeos tripla. Quare tota cylindri ſuperficies erit ad totam hemiſphærii, ut 4. ad 3.*]

(b) Patet ex cor. p. 26. hujus.
(c) Patet ex 24. hujus.

PROPOSITIO XXXIX.

Fig. 30. *Sphæræ ſuperficies ad totam coni æquilateri ſibi inſcripti ſuperficiem eam proportionem habet, quam 16. ad 9.*

Eſto Z ſphæræ centrum, & conus æquilaterus ſphæræ inſcriptus BKD, axis ſphæræ ac cono communis KZAO. Per hunc ſi ſecetur ſphæra ac conus; producetur in ſphæra circulus maximus OBKD, in cono autem triangulum æquilaterum BKD, cujus unum latus BAD erit diameter baſeos conicæ QT. Et quia axis coni KA rectus eſt baſi QT, erit angulus BAK (*d*) rectus. Igitur quadratum BA æquale eſt (*e*) rectangulo KAO. Jam quia latus æquilateri trianguli abſcindit (*f*) quartam axis partem AO, erit rectangulum KAO,

(d) Per def. 3. l. 11.
(e) Per cor. 1. p. 17. l. 6.
(f) Per cor. 3. p. 15. l. 4.

KAO, hoc eſt, quadratum BA, triplum quadrati (*a*) AO. Quare cùm quadratum radii ZO (*b*) quadruplum ſit quadrati AO, erit quadratum radii ZO ad quadratum radii BA, ut 4. ad 3. Ergo etiam (*c*) circulus OBKD eſt ad circulum QT ut 4. ad 3. Ergo ſunt quatuor circuli OBKD, hoc eſt (*d*) tota ſphæræ DG ſuperficies, ad circulum QT, ut 16 ad 3. Atqui (*e*) ſuperficies coni æquilateri BKD eſt ad circulum QT, baſim nempe ſuam, ut 2 ad 1. ac proinde coni BKD tota ſuperficies, unà cum baſi ſcilicet, eſt ad baſim, nempe circulum QT, ut 3. ad 1. ſive ut 9. ad 3. Ergo cùm oſtenderim ſphæræ ſuperficiem eſſe ad eundem circulum ut 16. ad 3. erit ſphæræ DG ſuperficies ad totam æquilateri coni ſuperficiem, ut 16. ad 9. Quod erat demonſtrandum.

(a) Per 1. l. 6. (b) Per cor. 3. p. 4. l. 2. (c) Per cor. 2. p. 2. l. 12. (d) Per 24. hujus. (e) Per cor. 1. p. 38. hujus.

[Cor. *Ex hujus demonſtratione liquet, coni æquilateri ſphæræ inſcripti baſem QT eſſe ad maximum ſphæræ circulum DG, ut 3. ad 4.*]

Aliter.

QUoniam æquilateri trianguli latus BD, abſcindit (*f*) quartam axis partem AO, erit quoque ſphærica ſuperficies BOD (*g*) quarta pars, ac proinde ſuperficies BGKD tres quartæ ſuperficiei totius ſphæræ. Quare ſi ſuperficies tota ſtatuatur eſſe 16; BGKD ſuperficies erit 12. Atqui ſuperficies BGKD (*h*) eſt dupla ſuperficiei conicæ BKD, ac proinde ad eam eſt ut 12. ad 6. Ergo tota ſphæræ ſuperficies eſt ad conicam BKD ut 16. ad 6. Deinde quia ſuperficies coni BKD, (utpote æquilateri,) dupla (*i*) eſt baſeos QT, liquet ſuperficiem conicam BKD (nimirum abſque baſi) eſſe ad totam coni ſuperficiem, ut 2. ad 3, hoc eſt, ut 6. ad 9. Igitur ex æquo tota ſphæræ ſuperficies eſt ad totam æquilateri coni inſcripti ſuperficiem, ut 16. ad 9. Quod erat demonſtrandum.

(f) Per cor. 5. p. 15. l. 4. (g) Per 27. hujus. (h) Per prac. (i) Per cor. 1 p. 38. huj.

PROPOSITIO XL.

SPhæræ ſuperficies ad æquilateri coni ſibi circumſcripti totam ſuperficiem, eam proportionem habet, quam 4. ad 9. Fig. 31.

Circulo ſphæræ maximo BPM circumſcriptum ſit triangulum æquilaterum DOF, a quo circa axem OAB in orbem ducto, productus ſit conus æquilaterus ſphæræ circumſcriptus. Æquilatero autem triangulo DOF circumſcriptus

(a) Per ſch. p. 13. & 14. l. 4. etiam ſit circulus, NDLOF, quem (a) patet eſſe concentricum priori; & axis OAB producatur in N. Quoniam BN eſt (b) quarta pars axis ON, patet ON eſſe duplam KB. Quare cùm circulorum ratio ſit (c) duplicata rationis diametrorum, erit circulus BPM ad circulum NDLOF ut 1. ad 4. Atqui oſtenſum jam eſt in demonſtratione primâ præcedenti, circulum NDLOF eſſe ad circulum QT, baſim coni æquilateri ſphæræ FL inſcripti, ut 4. ad 3. Ex (d) æquo igitur circulus BPM eſt ad circulum QT ut 1. ad 3. Atqui tota coni DOF ſuperficies, circuli QT (e) tripla eſt. Ergo tota coni ſuperficies circuli BPM noncupla eſt. Quare cùm ſphæræ TP ſuperficies ejuſdem circuli BPM (f) quadrupla ſit, erit tota coni æquilateri DOF ſuperficies ad ſuperficiem ſphæræ cui circumſcripta eſt, ut 9. ad 4. Quod erat demonſtrandum.

(b) Per cor. 5. p. 11. l. 4. (c) Per 2. l. 12. (d) Per 22. l. 5. (e) Per cor. 1. p. 14. hujus. (f) Per 24. hujus.

Coroll. 1. *Ex hac demonſtratione patet, coni æquilateri ſphæræ conſcripti axem BO ſeſquialterum eſſe diametri ſphæræ BK, ſeu ut 3. ad 2.*

2. *Ex eâdem demonſtratione liquet, coni æquilateri ſphæræ circumſcripti DOF baſim QT eſſe etiam ſeſquialteram baſium cylindri eidem ſphæræ circumſcripti. Nam QT eſt ad BPM, ut 3. ad 1. Ergo QT eſt ad BPM bis, ut 3. ad 2.*

3. *Superficies coni æquilateri DOF eſt ſuperficiei cylindri eidem ſphæræ circumſcripti ſeſquialtera. Illa enim* (g) *dupla eſt QT, hæc* (h) *quadrupla BPM. Ergo ſuperficies conica erit ad cylindricam, ut bis 3. ad quater 1; hoc eſt, ut 6. ad 4. ſeu ut 3. ad 2.*

(g) Per cor. 1. p. 14. hujus. (h) Per 26. & 24. hujus.

4. *Circulus maximus BPM ſphæræ cono æquilatero DOF inſcriptæ, ſuperficies ejuſdem ſphæræ, ſuperficies tota coni DOF, & ſuperficies ſphæræ NDLOF cono circumſcriptæ, ſunt* (i) *inter ſe, ut 1. 4. 9. 16; hoc eſt, ut numerorum 1. 2. 3. 4. quadrata.*

(i) Patet exp. 24. hac 40. & 39. hujus.

5. *Hinc dato ſphæræ inſcriptæ radio AB, facili negotio deſcribentur circuli dictis ſuperficiebus æquales. Nam* (k) *ejuſmodi circulorum radii erunt 2AB, 3AB, 4AB. Unde & ſuperficierum illarum menſura ſtatim innoteſcunt.*

(k) Per cor. 2. p. 2. l. 12.

6. *Cùm diameter ON ſphæræ cono æquilatero circumſcriptæ, dupla ſit diameter KB ſphæræ inſcriptæ; erit ſphæra circumſcripta inſcriptæ octupla; nempe in triplicatâ* (l) *ratione diametrorum, ſive ut* (m) *cubus numeri binarii ad cubum unitatis.*]

(l) Per 18. l. 12. (m) Per ſch. p. 33. l. 11.

PRO-

PROPOSITIO XLI.

Æ Quilateri coni ſphæræ circumſcripti tota ſuperficies, quadrupla eſt ſuperficiei totius coni inſcripti eidem ſphæræ. Fig. 31.

Æquilateri coni DOF circumſcripti tota ſuperficies eſt ad ſphæræ ſuperficiem, ut (a) 9. ad 4. & ſphæræ ſuperficies eſt ad coni inſcripti æquilateri SKT ſuperficiem totam, ut (b) 16. ad 9. Ergo ex (c) æqualitate perturbatâ, circumſcripti æquilateri coni tota ſuperficies eſt ad totam ſuperficiem æquilateri inſcripti, ut 16. ad 4. ſive ut 4. ad 1. Quod erat demonſtrandum. (a) Per præc. (b) Per 39. hujus. (c) Per 23. l. 5.

[*Atque eodem modo, ſphæra cono æquilatero circumſcriptæ ſuperficies, quadrupla eſt ſuperficiei ſphæra eidem cono inſcriptæ. Patet ex cor. 4. præced.*]

PROPOSITIO XLII.

Sphæra ad inſcriptum ſibi conum æquilaterum (BKC) eam rationem habet quam 32 ad 9. Fig. 32.

Sphæra & conus BKC ſecentur plano per axem communem KO, faciente in ſphærâ circulum maximum OFKI, in cono autem triangulum æquilaterum BKC. Ducto deinde plano per centrum A ad OK recto, abſcindatur hemiſphærium FGKI, cui inſcriptus intelligatur conus maximus FKI. Quoniam trianguli æquilateri latus BC abſcindit OP (d) quartam partem axis OK, erit PK ad AK ut 3. ad 2. hoc eſt ut 9. ad 6. Baſis verò QT eſt ad circulum OFKI, hoc eſt, ad baſim ND, ut 3. ad 4. hoc eſt, ut 6 ad 8. uti patet ex demonſtratis prop. 39. Quare cùm ratio coni BKC ad conum FKI componatur (e) ex ratione altitudinis PK ad altitudinem AK (hoc eſt ex ratione 9. ad 6.) & ex ratione baſis QT ad baſim ND (hoc eſt ex ratione 6 ad 8.) erit conus BKC ad conum FKI ut 9. ad 8. Quare cùm ſphæra CG quadrupla (f) ſit coni FKI, erit conus æquilaterus BKC ad ſphæram CG, ut 9. ad 32. Quod erat demonſtrandum. (d) Per cor. 5. p. 15. l. 4. (e) Per n. 2. in ſchol. p. 15. l. 12. (f) Per 30. hujus.

[Aliter. *PK eſt ad AK ut 3 ad 2, ſive ut 9. ad 6. Et cùm ſit* (g) *QT ad CG ut 3 ad 4, ſive ut 6 ad 8; erit QT ad 4CG ut 6 ad 32. Ergo conus altitudinis PK & baſeos QT; (hoc eſt, conus BKC) erit ad conum altitudinis AK & baſeos 4CG, (hoc* (h) *eſt, ad ſphæram CG) in ratione* (i) *compoſitâ ex 9 ad 6, & 6 ad 32, ſive* (k) *ut 9. ad 32.* (g) Per cor. p. 39. hujus. (h) Per 28. hujus. (i) Per n. 2. in ſchol. p. 15. l. 12. (k) Per def. 5. l. 6.

PROPOSITIO XLIII.

Fig. 31. *Conus æquilaterus ſphæra circumſcriptus, coni æquilateri eidem ſphæræ inſcripti octuplus eſt.*

Coni æquilateri ſphæræ inſcripti & circumſcripti ſint SKT & DOF, & axis communis eſto OKB. Secentur deinde plano per axem tam conus uterque quàm ſphæra; eruntque ſectiones triangula duo æquilatera, & circulus BPM maximus. Circa triangulum quoque DOF intelligatur deſcriptus eſſe circulus NDOF; & axis OKB producatur in N. Quonium verò æquilateri trianguli latus DF abſcindit axis ON quartam (*a*) partem NB, patet NO eſſe duplam BK. Similiter quia æquilateri alterius trianguli latus ST abſcindit axis BK (*b*) quartam partem BC, erit NO ad BO, ut BK ad CK: & permutando ut NO ad BK, ſic BO ad CK. Sed NO dupla eſt BK. Ergo etiam BO dupla eſt CK. Igitur ob ſimilitudinem triangulorum DOF, SKT, etiam (*c*) DF & ST, diametri videlicet baſium conicarum, ſunt inter ſe in proportione duplâ. Quare cùm coni DOF, SKT ſint (*d*) ſimiles ac proinde eorum proportio (*e*) triplicata ſit proportionis diametrorum DF & ST, quæ eſt 2. ad 1; erit conus DOF ad conum SKT, ut 8 ad 1. Quod erat demonſtrandum.

(a) Per cor. 5. p. 15. l. 4.
(b) Per idem coroll.
(c) Per 4. l. 6.
(d) Per def. 4. l. 12.
(e) Per 12. l. 12.

[Aliter. *Ductis rectis DN, SB; ob angulos DOF, SKT* (f) *æquales, æquantur eorum dimidii, DON, SKB; & anguli ODN, KSB ſunt* (g) *recti, & proinde* (h) *triangula DON, SKB ſimilia ſunt: unde DO : SK :: ON : KB ::* (i) 2 : 1. *Ergo & DF (= DO) : ST (= SK) :: 2 : 1. Et cùm coni æquilateri DOF, SKT ſimiles ſint, erunt* (k) *ut* 8. *ad* 1. *Sunt enim* 8, 4, 2, 1 ÷.

Corol. *Conus æquilaterus ſphæra circumſcriptus, eſt ad conum æquilaterum eidem ſphæræ inſcriptum, ut ſphæra cono æquilatero circumſcripta ad ſphæram eidem cono inſcriptam; nempe ut* 8. *ad* 1. *Patet ex hac, & cor.* 6. *p.* 40.

Et univerſaliter; cùm corpora quæcunque ſimilia ſphæris circumſcriptibilia & inſcriptibilia, diametros vel latera habeant, ſphærarum circumſcriptarum diametris proportionalia; ſintque corpora ſimilia ad ſe invicem in triplicatâ (eorumque ſuperficies in duplicatâ) ratione diametrorum vel laterum homologorum: quam (l) *igitur rationem habet ſphæra corpori cuicumque circumſcripta ad ſphæram eidem corpori inſcriptam eandem rationem habebit corpus illud ſphæra circumſcriptum ad corpus ſimile*

(f) Per cor. p. 5. l. 1.
(g) Per 31. l. 3.
(h) Per cor. 9. p. 32. l. 1. & p. 4. l. 6.
(i) Patet ex dem. pr. 40. hujus.
(k) Per 12. l. 12.
(l) Per 34. & 16. l. 5.

ſimile eidem ſphæræ inſcriptum ; (quam rationem habet ſuperficies ſphærica circumſcripta corpori cuilibet ad ſuperficiem ſphæricam eidem inſcriptam, eandem habebit corporis illius ſphæræ circumſcripti ſuperficies ad ſimilis corporis eidem ſphæræ inſcripti ſuperficiem.)]

PROPOSITIO XLIV.

Sphæra ad circumſcriptum ſibi conum æquilaterum (DOF) & ſoliditate & ſuperficie totâ, eam proportionem habet, quam 4. *ad* 9. Fig. 31.

Sphæra TP eſt ad inſcriptum (*a*) ſibi conum æquilaterum SKT, ut 32 ad 9. Inſcriptus autem SKT conus æquilaterus eſt ad conum æquilaterum circumſcriptum DOF ut (*b*) 1. ad 8. hoc eſt: ut 9 ad 72. Igitur ex æquo ſphæra TP eſt ad conum æquilaterum circumſcriptum DOF, ut 32. ad 72. hoc eſt, [*utrumque numerum dividendo per* 8.] ut 4. ad 9.

(a) *Per* 42. *hujus.*

(b) *Per præc.*

[Aliter. *Sphæra eſt ad inſcriptum conum æquilaterum* (c) *ut* 32. *ad* 9. *Inſcriptus verò eſt ad circumſcriptum* (d) *ut* (1. *ad* 8, *hoc eſt, ut*) 4. *ad* 32. *Ergo ex æquo* (e) *perturbate, ſphæra eſt ad circumſcriptum conum æquilaterum ut* 4 *ad* 9.]

(c) *Per* 42 *hujus.*

(d) *Per* 43. *hujus.*

(e) *Per* 23. *l.* 5.

Propoſitione autem 40. demonſtravimus etiam ſphæræ ſuperficiem eſſe ad totam æquilateri coni circumſcripti ſuperficiem ut 4. ad 9. Ergo ſphæra & ſoliditate & ſuperficie eſt ad æquilaterum conum ſibi circumſcriptum ut 4. ad 9. Quod erat demonſtrandum.

Quod igitur in ſphærâ & cylindro ſphæram ambiente miratus eſt Archimedes, id ipſum in ſphærâ & æquilatero cono ambiente ſphæram jam demonſtravimus, ut videlicet & ſoliditatum inter ſe eadem proportio rationalis, quæ ſuperficierum exiſtat. Quemadmodum enim ille reperit ſphæram ad cylindrum eſſe tam ſoliditate quàm ſuperficie, ut 2. ad 3. ita nos docuimus ſphæram & ſoliditate & ſuperficie eſſe ad conum æquilaterum ſe ambientem, ut 4. ad 9.

Hinc verò illam ipſam proportionem, nempe ſeſquialteram, quam exiſtere ſphæram inter ac cylindrum Archimedes tradidit, ab æquilatero cono circumſcripto & ſoliditate etiam ac ſuperficie continuari nullo negotio jam demonſtrabimus, atque ita huic pariter opuſculo finem imponemus.

PROPOSITIO XLV.

Vide Fig. quæ huic Tractatui præfixa eſt.

Conus æquilaterus ſphæræ circumſcriptus, & cylindrus rectus ſphæræ ſimiliter circumſcriptus, & ipſa ſphæra, eandem proportionem continuant, nimirum ſeſquialteram, tam quoad ſoliditatem, quàm quoad ſuperficiem totam.

Nam per 32. hujus, cylindrus rectus GK ſphæram ambiens, tam ſoliditate quàm totâ ſuperficie eſt ad ſphæram ut 3 ad 2. ſive ut 6. ad 4. Per præcedentem verò circumſcriptus ſphæræ conus æquilaterus B A D, tam ſoliditate, quàm ſuperficie eſt ad ſphæram ut 9. ad 4. Ergo idem conus eſt ad cylindrum tam ſoliditate quàm ſuperficie, ut 9. ad 6. Quare hæc tria corpora, conus, cylindrus, ſphæra ſunt inter ſe ut hi numeri 9. 6. 4. ac proinde continuant proportionem ſeſquialteram. Quod erat demonſtrandum.

[*PROPOSITIO XLVI.*

Vide Fig. eandem.

Inter conum æquilaterum & cylindrum eidem ſphæræ circumſcriptos, eadem obtinet ratio ſeſquialtera, quoad ſuperficies totas, ſuperficies ſimplices, ſoliditates, altitudines & baſes.

Hæc propoſitio patet, quoad ſuperficies totas & ſoliditates, ex præcedenti; quoad ſuperficies ſimplices, ex coroll. 3. *prop.* 40. *hujus; quoad altitudines & baſes, ex coroll.* 1. *&* 2. *ejuſdem prop.* 40.]

Ad majorem Dei Gloriam.

APPEN-

APPENDIX

Quâ demonſtratur ex falſo poſſe directè deduci verum.

IN theſibus Mathematicis, quas Lovanii ſeſqui abhinc anno Illuſtriſ. D. Theodorus D'Imerſelle, Comes de Bouchove & S. Imperii, magnâ ingenii commendatione & auditorum plauſu publice propugnavit, inter cæteras propoſui aſſertionem hujuſmodi: *ex falſis poſſe verum directè elici, novis exemplis Geometricis confirmamus.* Hanc aſſertionem ſibi oppugnandam ſuſcepit vir Clariſſimus Daniel Lipſtorpius in Appendice, quam Operi ſuo pererudito, quod Specimina Philoſophiæ Carteſianæ inſcripſit, hac de cauſâ adjunxit. Id verò eâ modeſtiâ & humanitate præſtitit, ut facile appareat, hoc illi unum fuiſſe propoſitum, ut veritatem aſſequeretur. Ne autem videar doctiſſimi viri judicium parvi facere, hîc illi breviter reſpondebo, & Appendici Appendicem reponam.

Concluſionem igitur oppugnatam ſic demonſtro.

Datur aſſertio quæ directè ex ſuâ contradictoriâ inferatur. Talis in prop. 12. l. 9. Eucl. eſt hæc: *numerus E metitur numerum A*, quæ demonſtratione affirmativâ infertur ex ſuâ contradictoriâ: *E non metitur numerum A*. Quod quidem eſt æque certum ac demonſtrationem illam eſſe legitimam. Talis in Elementis hiſce noſtris prop. 4. l. 11. eſt hæc: **Recta BQ non eſt perpendicularis plano CAF*, quæ affirmativè deducitur ex ſuâ contradictoriâ: *recta BQ eſt perpendicularis plano CAF*. Talis in propoſitione noſtrâ 35. l. 5. eſt hæc: † *A eſt ad B, ut E ad F*, quæ directè infertur ex ſuâ contradictoriâ: *A non eſt ad B, ut E ad F*. Tales denique reperiuntur apud Cardanum l. 5. de proport. p. 201. apud Theodoſium (commentante Clavio) l. 1. ſph. p. 12. & nos plures ſimiles poſſumus exhibere tum Geometricas tum alias.

**Fig. 12 l. 11.*

†*Fig. 20 l. 5.*

Ecce tibi coſmographicam unam, quam in iiſdem theſibus diſputandam propoſui. *Maris, omniſque adeo humidi ſuperficies eo ipſo concluditur eſſe ſphærica, quo id negas.* Ponatur vera eſſe ejus contradictoria: *Maris ſuperficies ſphærica non eſt.* Quoniam igitur maris ſuperficies ſphærica non eſt; omnes ſuperficiei maritimæ partes non diſtant æqualiter à centro. Ergo

una eſt altior alterâ, (altiorem enim eſſe non aliud eſt, quàm longiùs à centro recedere.) Ergo eæ quæ altiores ſunt, defluunt verſùs minùs altas ſeu decliviores; hanc enim eſſe humidi naturam experientiâ conſtat. Ex tali autem defluxu neceſſariò oritur omnium partium ſuperficiei maritimæ æqualis altitudo, ſeu diſtantia a centro. Æqualis verò omnium partium ſuperficiei maritimæ a centro diſtantia infert ſphæricitatem ejus perfectam. *Ergo maris ſuperficies ſphærica eſt.*

Habemus igitur hanc: *Maris ſuperficies ſphærica eſt*, directè & affirmativè deductam ex ſuâ contradictoriâ, *maris ſuperficies ſphærica non eſt*.

Maneat igitur, extra omnem controverſiam eſſe, dari aſſertiones, quæ directè ex ſuis contradictoriis inferantur. Atqui aſſertio, quæ ex ſuâ contradictoriâ directè infertur, neceſſariò vera eſt, (cùm ſit axioma per ſe clariſſimum, id neceſſariò verum eſſe, quod ſuum contradictorium deſtruit; deſtruit autem ſuum contradictorium, quod ex ſuo contradictorio directè ſequitur.) Ergo & aſſertionis contradictoria, ex quâ videlicet deducta eſt aſſertio, falſa eſt. Ergo ex falſo directè & affirmativè deductum eſt verum. Demonſtrata igitur eſt concluſio in theſibus propoſita.

Quòd verò ejuſmodi demonſtratio, quâ aſſertio ex ſuâ contradictoriâ falſâ directè infertur, verè ſcientiam pariat, ſic ut abſque ulteriori ullâ deductione ad impoſſibile, de aſſertionis veritate ſecuri eſſe debeamus, ex jam dictis manifeſtum eſt, cùm lumine naturæ notiſſimum ſit, id neceſſariò verum eſſe, quod ſuum contradictorium deſtruit, hoc eſt, quod ex ſuo contradictorio ſequelâ legitimâ & neceſſariâ infertur. Quòd ſi verum deducatur ex falſo quopiam ſibi non contradictorio, nequaquam talis ratiocinatio ſcientiam pariet, neque enim de veritate aſſertionis ſic deductæ ſecuri eſſe poſſumus, cùm in eo ratio jam allata deficiat, & proprium falſo ſciamus eſſe, ut ex eo falſa deducantur.

His ritè perceptis, facile eruditus Lector perſpiciet, nihil opus eſſe, ut ſingulis Clariſſimi Viri objectionibus & argumentis refellendis immoremur, quæ vel contra me nihil faciant, vel ex jam dictis ſoluta intelligantur. Quia tamen non omnibus ad manum erit opus clariſſimi Viri, viſum eſt ſingula breviter attingere.

Primum ſupponit ex Dialecticâ quædam de conſequentiâ directâ; & dicto (ut vocant) de omni & de nullo. Tum ſententiam exponit ſuam noſtræ oppoſitam. Subjungit deinde: *hanc ſententiam meam ſtabilio everſione omnium illorum quæ in contrarium afferri poſſe videntur.*

Primum

Primum (inquit) *quod ex falſis verum concludere videatur, conſtituit hujuſmodi ſyllogiſmus: Omnis leo eſt lapis: Omnis adamas eſt leo. Ergo omnis adamas eſt lapis. In quo* &c. Tali ſyllogiſmo ad probandam aſſertionem meam ego non utor, in quo videlicet verum deducitur ex falſo non contradictorio, qui proinde etiam, ut oſtendi ſupra, ſcientiam non parit. Primum iſtud igitur me non tangit.

Secundum genus objectionum (inquit) *conſtituunt hypotheſes Aſtronomica, &c. Quæ licèt fictitiæ tantùm ſint & falſæ; tamen juxta eas calculum eclipſibus, & aliis obſervationibus cæleſtibus convenientem Aſtronomi exhibent.* Deinde poſtquam multis contendit, hinc non probari verum ex falſo directè elici: *Progredior* (inquit) *ad tertiam inſtantiam, quam ex regulâ falſi depromere licet*, &c. contenditque rurſum hîc non elici ex falſo verum. Quo quidem in utroque, cùm illi ego planè aſſentiar, neque ullum inde pro aſſertione meâ argumentum petam: non me magis illa tangunt, quàm primum.

Ultimas denique objectiones (inquit) *nobis faceſſunt, modi demonſtrandi ab Euclide 9. elem. p. 12. Cardano l. 5: de proport. p. 201. & Theodoſio l. 1. ſph. p. 12. adhibiti*, quo me digitum intendiſſe putat, & verè. Ex his ſiquidem demonſtrandi modis, evidenter jam demonſtravi ſupra, ex falſo elici directè verum; neque affertur quidquam a Clariſſimo Viro, quod demonſtrationem noſtram infirmet. Verbis Clavii ad p. 12. l. 9. recitatis, ſubjungit ex eodem Clavio demonſtrationem p. 12. l. 1. ſph. Theodoſii: Tum (inquit) *ut verum fatear, neſcio ſanè quid Clavio in mentem venerit, uti & Cardano, quare inſolitum hunc & mirabilem argumentandi modum eſſe putaverint: qui tamen Logicis valde familiaris eſt, & duobus principiis omnium evidentiſſimis & naturâ notiſſimis nititur, hiſce nempe; quod idem non poſſit ſimul eſſe & non eſſe; item, quodlibet aut ſit aut non ſit.* Quid Clavio, Cardano, & cum iſtis aliiſque etiam mihi, in hac argumentandi formâ ſit viſum mirabile, dicere in promptu eſt; hoc nimirum, quòd aſſertio probanda (G eſt centrum ſphæræ,) directè ex ſuâ contradictoriâ, (G non eſt centrum ſphæræ) conſequentiis legitimis ac neceſſariis deducatur. Quod quidem quotieſcunque evenit, admiratione dignum eſt. Tantum verò abeſt, ut hæc ratio demonſtrandi Logicis valde familiaris ſit, ut etiam non defuerint doctiſſimi viri, quibus ea impoſſibilis videretur. Ut deinde oſtendat vir Clariſſ. hoc diſcurſu verum ex falſo non deduci, repetit demonſtrationem propoſitionis Theodoſianæ, ſed formâ planè diverſâ a Clavianâ illâ, quam priùs recitaverat, in quâ vis argumentationis inter nos controverſæ clariſſimè cernitur. Subjungit

 deni-

denique; *neque ego tam lynceus ſum ut exinde videre queam, quo pacto ex falſo verum directè ſequatur. Illud tamen video, quod ſi G demonſtretur non eſſe centrum ſphæræ,* (vult, credo, dicere, *ponatur*, cùm demonſtrari nequeat quod falſum eſt) *neceſſariò ſit admittenda contradictoria ejus affirmativa, quòd G ſit centrum ſphæræ.* Ad hæc verba repetam compendio demonſtrationem ſuperiùs datam, quâ, opinor, fiet ut V. C. tametſi, quod eſt maxime, lynceus non eſſet, clarè perſpiciat elici directè ex falſo verum.

Quoniam admittit (id quod etiam eo non dante evinceret Claviana demonſtratio) ſi G ponatur non eſſe centrum, ſequi neceſſitate abſolutâ & formali G eſſe centrum; manifeſtum eſt, G eſſe centrum, directè ſequi ex ſuâ contradictoriâ, G non eſt centrum. Ergo ex vi deductionis conſtat verum eſſe quod G ſit centrum, cùm lumine naturali notum ſit id eſſe neceſſariò verum, quod ſuum contradictorium deſtruit, hoc eſt, quod ex ſuo contradictorio directè ſequitur. Habemus igitur, quod ex hac, (G non eſt centrum, directè deducta ſit hæc vera, (G eſt centrum.) Atqui hæc (G non eſt centrum) falſa eſt, cùm jam oſtenderim veram eſſe hanc (G eſt centrum.) Ergo verum directè deductum eſt ex falſo.

Hæc ſunt, Erudite Lector, quæ ſuper hac quæſtione breviter hîc putavi apponenda. Cæterum nihil dubito quin Clariſſimus Lipſtorpius eâdem animi æquitate reſponſionem hanc noſtram ſit accepturus, quâ dedit oppugnationem ſuam, & ego illam accepi.

P. AN-

P. ANDREÆ TACQUET E SOCIETATE JESU

Trigonometriæ liber unicus.

CAPUT PRIMUM.

Sinuum Definitiones.

Quid Sinus, Tangentes, Secantes, & quomodo inveniantur.

SInus, Tangentes, Secantes ſunt rectæ quædam lineæ, quarum in analyſi triangulorum in Geometriâ practicâ, in Aſtronomiâ, aliiſque uſus eſt maximus.

Sinuum Definitiones.

ESto quadrans circuli ACE, cujus circumferentia CE diviſa ſit in partes 90 æquales, quas Gradus vocant, & ſinguli gradus in partes æquales 60, quæ vocantur Minuta, ſic ut totus arcus CE diviſus ſit in partes æquales, ſeu minuta 5400. Ex centro A ad ſingulos gradus, & minuta emittantur rectæ, quarum unam deſigno litteris AF. Conſtituentur hoc facto anguli 5400, quibus ſubtenduntur arcus totidem uno ſeſe invicem minuto excedentes. Ex his unum deſigno litteris CAF. Primus angulus erit minuti unius, ſecundus duorum minutorum, & ſic porrò; ſexageſimus minutorum 60; hoc eſt gradûs unius, & ſic deinceps: poſtremus EAC eſt graduum 90, adeoque rectus. Tandem per minuta ſingula ducantur rectæ ad ſemidiametrum AC perpendiculares, quæ proinde etiam ipſæ numero erunt 5400 computando radium AE, quarum unam deſigno litteris FX. Hæ appellantur ſinus arcuum, & angulorum uno minuto ſeſe mutuò ſuperantium. Fig. 1.

1. Igi-

1. Igitur arcus ex gr. FC, & anguli FAC ab ipſo ſubtenſi ſinus eſt recta F X, quæ ab F termino arcûs perpendicularis eſt radio AC.

2. Pars radii X C inter arcum, & ſinum intercepta eſt ſinus verſus ejuſdem arcûs FC, & anguli FAC.

3. Sinus complementi, ſive ſinus ſecundus arcûs F C, & anguli FAC eſt F I ſinus illius arcûs, nempe F E, qui quadrantem complet, adeoque & ſinus illius anguli, nempe FAE, qui cum priore FAC complet rectum CAE.

4. Sinus totus, ſive radius eſt. ſemidiam. AE.

5. Arcus Q F quadrante major eundem habet ſinum F X, quem arcus minor CF, qui cum eo ſemicirculum conſtituit: & angulus recto major FAQ eundem habet ſinum FX, quem angulus acutus FAC, qui cum eo efficit duos rectos.

Fig. 2. 6. In omni triangulo rectangulo BAC, latus BC recto angulo oppoſitum, eſt ſinus totus, ſive radius: reliqua verò latera ſunt ſinus angulorum, quibus opponuntur; latus nimirùm AB eſt ſinus anguli O, latus AC ſinus anguli R.

Nam ſi centro C intervallo CB deſcribatur quadrans FBL, quia latus angulo recto oppoſitum CB, eſt jam radius quadrantis, erit CB ſinus totus per definit. 4; latus verò AB per defin. 1. erit ſinus anguli O, ſeu F C B. Rurſum centro B intervallo BC deſcripto quadrante Q C I patet per eandem defin. 1. A C eſſe ſinum anguli R, ſive Q B C. Ex quo jam nunc apparet, quantus ſinuum futurus in Trigonometria ſit uſus.

Definitiones Tangentium, & Secantium.

Fig. 3. ESto circulus B X Z, cujus quadrans BX intelligatur, ut ſupra, diviſus in gradus, & minuta. Hunc tangat recta infinita BR, & ex centro A ad contactum B ducatur radius AB, qui (a) cum tangente conſtituet angulum rectum. Cogitentur deinde per quadrantis gradus ſingulos, & minuta ex centro A emitti rectæ AF, AL &c. quo facto conſtituentur anguli FAB, L A B &c. ad 5400, ut ſupra, quibus ſubtenduntur totidem arcus BC, BO, &c.

(a) Per 18. l. 3.

7. Arcûs igitur B C, & anguli BAF tangens eſt recta B F, ſecans verò A F, ſinus totus A B: ſimiliter arcûs B O, & anguli BAL tangens eſt BL, ſecans AL. & ſic deinceps.

8. Arcus quadrante minor B O, & arcus quadrante major ZO cum priore BO faciens ſemicirculum eandem habent tangentem BL, & ſecantem AOL.

9. In omni triangulo rectangulo FBA reſpectu acuti anguli FAB tangens eſt FB ipſi oppoſitum, latus alterum AB ipſi adjacens

adjacens eſt ſinus totus, ſeu radius; hypotenuſa verò AF, ſeu latus recto angulo oppoſitum eſt ſecans. Patet ex definit. 6. & propoſ. 16. lib. 3. ſi centro A per B deſcribatur circulus.

Pari modo reſpectu alterius acuti anguli AFB tangens eſt AB, ſinus totus, ſeu radius eſt FB, ſecans FA. Patet ex defin. 8., & prop. 16. lib. 3. ſi centro F per B circulum deſcripſeris.

Hypotenuſa igitur utriuſque acuti ſecans eſt, ac proinde cùm hi anguli inæquales ſunt, diverſis numeris in tabulis ſinuum hypotenuſa exprimitur.

Cæterùm notandæ in primis ſunt, ac probè intelligendæ definitiones 6, & 9. ut Sinus, Tangentes, Secantes ad uſum deducantur.

Sinuum, Tangentium, Secantium inventio.

INvenire Sinus, Tangentes, Secantes, eſt earum proportionem ad radium circuli aut veram, aut a verâ inſenſibiliter aberrantem numeris exprimere. Ad eum finem intelligitur circuli radius in plurimas æquales partes diviſus, ut in 100000, aut 1000, 0000. Tum Geometrico ratiocinio inquiritur, quot ex illis radii partibus ſinguli Sinus, Tangentes, Secantes contineant, quæ inventio, ut poſtea oſtendam, eò accuratior futura eſt, quò plures in partes radius circuli diviſus aſſumetur. Hoc ſinuum artificium primi excogitarunt Hipparchus, & Menelaus, horum inventa deinde contraxit, & expolivit Ptolomæus, & noviſſimè Joannes Regiomontanus perfecit, qui ad radium 10000000. Sinus omnium graduum, ac minutorum quadrantis ſupputavit. Denique horum omnium conatus egregios Clavius noſter, Pitiſcus, Rheticus, aliique complures illuſtrarunt. Quamvis autem ab iis omnibus præclarè hoc in genere laboratum ſit, quia tamen prolixa hujus doctrinæ tractatio eſt, optandum ſanè videtur, ut facilior ea ſtudioſis, atque expeditior, ſi fieri poteſt, efficiatur. Quare animus mihi eſt, artificium, quàm utile, tam pulchrum, & clariùs, quàm cæteri fecerunt, & breviùs exponere. Rem omnem tribus Poriſmatis, & ſex Problematibus abſolvam. Sit ergo

Po-

Poriſma I.

Fig. 4. D*Ato ſinu (FC,) cujuſvis arcûs (FB,) complementi ſinum (FO) invenire.*

Ducto radio AF, quadratum AF (a) æquatur quadratis FC, AC. Quare ſi ex quadrato radii, ſeu ſinûs totius auferas quadratum ſinûs dati FC, remanet quadratum AC, hoc eſt quadratum FO. Igitur radix quadrata inde extracta dabit rectam FO ſinum complementi quæſitum.

(a) Per 47. l. 1.

Poriſma II.

Fig. 5. D*Ato ſinu (CF,) cujuſdam arcûs (IC,) ſinum ſemiſſeos ejuſdem arcûs invenire.*

Arcui IC ſubtende rectam IC, ad quam e centro perpendicularis ſit AL, quæ tam (b) rectam IC, quàm arcum (c) ILC biſſecabit, ac proinde IO eſt ſinus arcûs LI ſemiſſeos arcûs ILC.

Ex ſinu dato CF per præcedentem inveniatur ſinus complementi CQ, ſeu FA, quo ablato ex ſinu toto AI, nota ſit FI. Nota igitur eſt ſumma quadratorum IF, CF, hoc eſt (d) quadrati IC. Ex quo eliciatur radix quadrata dabit ea rectam IC, ejuſque ſemiſſis ſinum quæſitum IO.

(b) Per 3. l. 3. (c) Per 3. l. 3. (d) Per 47. l. 1.

Poriſma III.

Fig. 6. D*Atis ſinibus (LX, FR) duorum arcuum (LB, FB,) quorum differentia non ſit major 45 minutis, ſinum (IS) arcus cujuſdam medii invenire.*

Ducatur perpendicularis FOQ. Erunt LQ, IO differentiæ ſinuum LX, IS ad ſinum FR. Et quia arcus LF eſt non major 45 minutis, adeoque parvus, non different arcus LF, IF ſenſibiliter a rectis lineis, ac proinde LFQ, IFO aſſumi poſſunt ut rectilinea triangula. Quia ergo IO eſt parallela LQ erit (e)

(e) Per Coroll. 1. prop. 4. l. 6.

ut

ut datorum arcuum maximi, & minimi differentia	ad arcûs medii, & minimi differentiam
LF	IF
ita ſinuum datorum maximi, & minimi differentia	ad ſinûs medii, & minimi differentiam
LQ	IO

Quare cùm hujus analogiæ tres primi termini ſint noti, etiam quartus IO innoteſcet, quem ſi addamus ſinui dato minori FR, notus erit medius quæſitus IS.

Lemma.

Semiſſis ſubtenſæ (CB) alicujus arcûs (CFB) eſt ſinus ſemiſſeos ejuſdem arcûs. Fig. 7.

Ex centro A ducatur radius AGF ad CB perpendicularis. Erit ergo CG per defin. 1. ſinus arcûs CF. Atqui per 3. lib. 3. CG eſt ſemiſſis CB, & per 30. lib. 3. CF ſemiſſis CFB. Ergo &c.

Problema I.

Sinum arcûs 45 graduum invenire.

Quadrantem CFB ſubtendat recta CB, ad quam ex centro A ſit perpendicularis AGF. Quoniam igitur arcus CB 90 grad. (*a*) biſectus eſt in F, erit FB arcus graduum 45, cujus ſinus eſt BG. Deinde ergo ob æqualitatem laterum AC, AB anguli (*b*) quoque ACB, ABC æquales ſunt, qui verò ad A rectus erit. Ergo (*c*) ABC, ſeu ABG ſemirectus. Eſt autem (*d*) AGB rectus; reliquus ergo BAG (*e*) ſemirectus eſt, ideoque par ipſi ABG. Ergo latera BG, AG (*f*) æqualia ſunt. Ergo, quia quadratum AB æquatur (*g*) utrique quadrato BG, AG, unius quadrati BG duplum erit. Semiſſis ergo quadrati ſinûs totius AB æquatur quadrato ſinûs 45 graduum BG. Fig. 7.

Quare ſi ex ſemiſſe quadrati ſinûs totius eliciatur radix quadrata, dabit ea ſinum 45 grad. qui, quarum partium ſinus totus ponitur 10000000, reperietur earundem eſſe 7071068 ferè.

(a) Per 30. *l.* 3.
(b) Per 5. *l.* 1.
(c) Per Coroll. 11. prop. 32. *l.* 1.
(d) Per hyp.
(e) Per 32. *l.* 1.
(f) Per 6. *l.* 6.
(g) Per 47. *l.* 1.

Pro-

Problema II.

Arcuum 60, *&* 30 *graduum ſinus invenire.*

Fig. 8.

ESto quadrans BC; arcus BF graduum 60, & ſinus ejus DF. Erit ergo arcus FC graduum 30, cujus ſinus ſit FG; ducatur autem BF, & ex centro AF. Quoniam arcus BQF eſt grad. 60. hoc eſt ſexta pars circumferentiæ circuli, erit BF latus hexagoni, ideoque (*a*) æquale radio AF. Anguli (*b*) igitur ad A, & B in triangulo AFB æquales ſunt. Cùm igitur in triangulis X, Z æquales ſint anguli FBD, FAD; item anguli FDB, FDA utpote recti; latus verò FD commune, erunt (*c*) quoque latera BD, AD æqualia: ac proinde quadratum BD eſt quarta pars quadrati ſinûs totius AB, ſeu FB; ſed quadratum FB æquatur (*d*) quadratis BD, FD. Auferatur ergo quarta pars quadrati ſinûs totius, ſive quadratum ſemiſſeos AD ſinûs totius à quadrato ſinûs totius FB, remanebit quadratum FD, cujus radix quadrata dabit rectam FD, ſinum 60. graduum. Poſito igitur ſinu toto 10000000 ſinus grad. 60. eſt 8660254.

(a) *Per coroll.* 1. *p.* 15. *lib.* 4.
(b) *Per* 6. *lib.* 1.
(c) *Per* 27. *lib.* 1.
(d) *Per* 47. *lib.* 1.

Sinus porrò FG grad. 30. *eſt ſemiſſis ſinûs totius*, utpote æqualis ipſi DA. Idem patet ex lemmate. Poſito igitur ſinu toto 10000000 ſinus grad. 30. eſt 5000000.

Problema III.

Sinum 36 *graduum invenire.*

Fig. 9.

ESto ſemicirculus FBG, cujus baſi radius AB rectus inſiſtat. Tum radio AG biſecto in D ducatur recta DB, quæ transferatur ex D in C. Recta BC erit (*a*) latus pentagoni circulo inſcripti.

Ex ſummâ quadratorum AB radii, ſive ſinûs totius, & AD ſemiſſeos radii extrahe radicem quadratam, dabit ea (*b*) rectam DB, hoc eſt DC. Ex DC aufer DA ſemiſſem radii fiet nota AC, cujus quadratum adde quadrato radii AB, notum fiet (*c*) quadratum CB, ex quo radix elicienda dabit BC latus pentagoni ſubtendens gradus 72. Illius ergo ſemiſſis (*d*) dabit ſinum 36 graduum. Poſito ſinu toto 10000000, ſinus grad. 36. reperietur partium 5877852.

(a) *Ptolem. l.* 1. *almag.*
(b) *Per* 47. *lib.* 1.
(c) *Per* 47. *lib.* 1.
(d) *Per lem.*

Corol-

Corollarium.

EX ſinu grad. 36. reperietur (*a*) ſinus complementi, nempe grad. 54. partium 8090170. (a) *Per Poriſ.* 1.

Problema IV.

Sinum graduum 12 invenire.

IN quadrante CB ſit arcus BF graduum 30, KB grad. 54, & eorum ſinus DF, GK. Igitur erit eorum differentia KF grad. 24. complementa verò erunt FC, grad. 60, KC grad. 36, quorum ſinus ſint PF, NK. *Fig.* 10.

Sinus NK grad. 36. inventus per Probl. 3. auferatur ex ſinu PF grad. 60. invento per Probl. 2. remanebit OF nota. Tum ſinus FD grad. 30. inventus per Problema 2. dematur ex ſinu KG grad. 54. invento per Coroll. præced. remanebit OK nota. Radix ſumma quadratorum OF, OK dabit (*b*) KF ſubtenſam 24. grad. illius verò ſemiſſis dabit (*c*) ſinum graduum 12. (b) *Per* 47. *lib.* 11. (c) *Per lem.*

Problema V.

Sinus omnium arcuum quadrantis ſeſe ordinatim uno minuto ſuperantium invenire.

EX quatuor ſinibus per præcedentia quatuor Problemata graduum videlicet 45, 60, 36, 12 reliquos ſinus omnes adminiculo trium Poriſmatum præmiſſorum inveniemus hunc in modum.

Ex ſinu graduum 45 inveniuntur ſinus ſeptem.

PRoblemate 1. inventus eſt ſinus arcûs grad. 45, ſumatur graduum 45 ſemiſſis grad. 22, 30. & ſemiſſis horum grad. 11, 15. quæ amplius biſecàri nequit, ſinus harum ſemiſſium reperiuntur per poriſma 2, nimirum ex ſinu grad. 45. reperitur ſinus grad. 22, 30. & ex hoc ſinus grad. 11, 15.

ex 45 gradibus

ſemiſſes 22, 30, 11, 15.

Accipiantur deinde harum ſemiſſium complementa; comple-

plementum arcûs totius grad. 45, quia ipſi æquale, tanquam inutile omittitur.

ex ſemiſſibus 22, 30. 11, 15.
Complementa 67, 30. 78, 45.

horum complementorum ſinus reperiuntur per Poriſ. Rurſum ex his complementis ſumantur ſemiſſes ſemiſſium, quoties poſſunt; tum complementa ſemiſſium, donec complementum occurrerit, quod biſecari nequeat.

Ex compl. 67, 30. 78, 45.
Semiſſ. 33, 45. nulla.
Compl. 56, 15.
Semiſſ. nulla.

Complementa poſtrema erant grad. 67, 30. & grad. 78, 45. Ex poſteriori, quia biſecari nequit, nihil ultra eruitur. Prioris, nempe grad. 67, 30. ſemiſſis eſt grad. 33, 45. cujus ſinus per Poriſ. 2. obtinetur. Hujus complementum eſt grad. 56, 15, cujus ſinus reperitur per Poriſ. 1. Quia verò complementum hoc ultimum non poteſt biſecari, hic terminus erit inveniendi ex ſinu graduum 45. Igitur ex ſinu graduum 45. inventi jam ſunt ſinus ſeptem, quorum inventionis ſeries in tabellá appoſitá exhibetur.

	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.
	o	l	o	l	o	l	o	l
	90	0	45	0				
Semiſſ.					22	30	11	15
Compl.					67	30	78	45
Semiſſ.					33	45		
Compl.					56	15		

Ex ſinu graduum 60 inveniuntur ſinus 16.

ARcus 60 graduum biſecetur quoties poteſt, & accipiantur ſemiſſium complementa, quæ iterùm biſeca, quoties potes, tum ſemiſſium rurſùm accipe complementa, quæ denuò biſeca, & biſectionis complementum aſſume. Ex hac alterna acceptione, quæ ſexies repetita eſt, habentur arcus 16, quorum ſinus per Poriſma 2, & 1 alternatim accepta inveniuntur.

Sinus

Sinus grad. 60 ejuſque ſemiſſes		Complementa		Semiſſes Complementorum.		Compl.		Semiſſ.		Compl.	
G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.
o	l	o	l	o	l	o	l	o	l	o	l
60	0										
30	0										
15	0	75	0	{37 {18	30 45	52 71	30 15	26	15	63	45
7	30	82	30	41	15	48	45				
3	45	86	15								

Alternam ſemiſſium, & complementorum ſeriem exhibet tabella hìc appoſita; atque ita ſi hactenus inventi ſinus ordinentur adnumerato ſinu toto grad. 90, habebimus 24. ſinus arcuum ſeſe gradib. 3 $\frac{1}{45}$ ſuperantium.

Ex ſinu graduum 36. habentur ſinus 3[illegible]

SI enim arcûs gradi 36. accipiatur ſemiſſis, & ſemiſſis ſemiſſeos, & ſic deinceps. Deinde ipſius ſinûs 36, & omnium ſemiſſium complementa, ac rurſum ſemiſſes complementorum; eaque alterna ſemiſſium, ac complementorum acceptio octies repetatur, provenient arcus 32. quorum ſinus per Poriſma 2. & alternatim reperientur. Seriem inventionis horum 36. arcuum exhibet tabella ſubjecta.

Sinus grad. 36. cum ſuis ſemiſſ.		Comple-menta.		Semiſſ. Comple-mento-rum.		Comple-menta.		Semiſſ.		Comple-menta.		Semiſſ.		Compl.	
G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.
o	l	o	l	o	l	o	l	o	l	o	l	o	l	o	l
36	o	54	o	27	o	63	o	31	30	58	30	29	15	60	45
								15	45	74	15				
				13	30	76	30	38	15	51	45				
				6	45	83	15								
18	o	72	o												
9	o	81	o	40	30	49	30	24	45	65	15				
				20	15	69	45								
4	30	85	30	42	45	47	15								
2	15	87	45												

Ea-

Ex ſinu 12. *graduum inveniuntur ſinus* 64.

HUnc in modum. Ex ſinu 12 accipiatur ſemiſſis, & ſemiſſis ſemiſſeos, & ſic porro, tum ipſius 12, & omnium ſemiſſium complementa ſumantur deni ſemiſſes complementorum, ac rurſus ſemiſſium complementa &c. Hæc alterna ſemiſſium, ac complementorum acceptio, ſi duodecies repetatur, provenient arcus 64, quorum ſinus invenientur per Poriſma 2, & 1. Seriem inventionis dictorum 64 arcuum exhibet tabella hìc adjecta.

Sinus grad. 12 ejuſque ſemiſſ.		Complementa.		Semiſſ. Complementorum.		Complementa.		Semiſſ.		Compl.		Semiſſ.		Compl.		Semiſſ.		Compl.		Semiſſ.		Compl.	
G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.
o	l	o	l	o	l	o	l	o	l	o	l	o	l	o	l	o	l	o	l	o	l	o	l
12	0	78	0	39	0	51	0	25	30	64	30	32	15	57	45								
								12	45	77	15												
				19	30	70	30	35	15	54	45												
				9	45	80	15																
6	0	84	0	42	0	48	0	24	0	66	0	33	0	57	0	28	30	61	30	30	45	59	15
																14	15	75	45				
												16	30	73	30	36	45	53	15				
												8	15	81	45								
				21	0	69	0	34	30	55	30	27	45	62	15								
								17	15	72	45												
				10	30	79	30	39	45	50	15												
				5	15	84	45																
3	0	87	0	43	30	46	30	23	15	66	45												
				21	45	68	15																
1	30	88	30	44	15	45	45																
0	45	89	15																				

Quòd ſi ſinus omnes hactenus inventos ſinu toto adnumerato ſimul in ordinem redigamus, ſinus habebimus 120 arcuum ſeſe mutuò 45 minutis ſuperantium, quorum primus eſt 45 minutorum, ultimus grad. 90.

G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.
o	l	o	l	o	l	o	l
0	0	3	0	6	0	9	0
0	45	3	45	6	45	9	45
1	30	4	30	7	30	&c.	&c.
2	15	5	15	8	15	90	0

Ex his 120 *Sinibus.*

RElìquos omnes intermedios ope tertii Poriſmatis per regulam proportionum reperiemus hoc ordine.

Primò quæremus inter ſingulos horum 120 ſinuum duos medios duorum arcuum minutis 15 differentium, quibus ad priores 120 adjunctis, habentur ſinus arcuum 358, 15 minutis invicem excedentium.

Deinde inter ſingulos jam inventos duo quærentur medii duorum arcuum minutis 5 differentium, quibus additis ad priores 358 proveniunt ſinus arcuum 1076 ſe minutis 5 ſuperantium.

Denique inter illos ſingulos quæremus medios quatuor arcuum uno ſe minuto excedentium, quos ſi addamus illis 1076, habentur ſinus 5400, omnium videlicet arcuum quadrantis uno ſe minuto ſuperantium.

Problema VI.

Secantes, & Tangentes quaſcunque invenire.

EX ſinibus jam inventis hæ lineæ nullo negotio innoteſcent. *Fig.* 3.

Arcûs cujuſcunque BS ex. gr. 70, 15. ſecans eſto AR, tangens BR, ſinus totus AB. Oporteat ſecantem AR invenire. Duc Sk ſinum arcus SB, & SN ſinum complementi SX. Per prop. 4. lib. 6. ut Ak (ſeu NS) eſt ad AS, ita AB, (ſeu AS) eſt ad AR. Sunt ergo tres proportionales.

NS	AB	AR
Sinus compl. arcûs dati grad. 70, 15.	Sinus totus 10000000.	Secans quæſita

Quare ſi quadratum ſinûs totius dividatur per NS ſinum complementi arcûs dati, quotiens dabit ſecantem quæſitam AR, ut patet ex 18. lib. 9.

Oporteat deinde dati cujuſcumque arcûs BS tangentem reperire BR. Per prop. 4. lib. 6. ut Ak (ſeu NS) eſt ad kS, ita AB ad BR. Sunt ergo ptoportionales.

NS	kS	AB	BR
Sinus compl. arcûs dati	Sinus arcûs dati	Sinus totus 10000000	Tangens quæſita

Quare cùm tres primi termini ſint noti, per regulam trium innoteſcet quartus.

Habent igitur ſtudioſi, quod ſuprà promiſeram, Sinuum, Tangentium, & Secantium theoriam tribus poriſmatis, & problematis ſex comprehenſam. Scio, plures alias eſſe ſinuum reperiendorum vias, ſed ea, quam propoſui, cæteris explicatu, ac demonſtratu mihi eſt viſa facilior.

Problema VII.

Sinum unius, vel plurium Secundorum Minutorum invenire.

Fig. 4. REpræſentet PB arcus unius minuti, ſeu 60 ſecundorum, kB verò arcum 26 ſecundorum ex. gr. ſinus verò iſtorum arcuum ſint PM, kN. Quoniam hi arcus inſenſibiliter differunt a rectis lineis, aſſumi poſſunt triangula PBM, kBN tanquam rectilinea. Igitur per 4. lib. 6.

Ut PB 1 Min. ſeu 60 ſecun,	ad kB 26 ſecun.	ita PM ſinus 1 Min.	ad kN ſinum 26 ſecun.

Quare per regulam trium reperietur ſinus kN 26 ſecundorum, multiplicando videlicet ſecundum 26 per tertium, nempe 2909 ſinum 1 minuti, & productum dividendo per primum, nempe 60 ſecun.

Hoc

Hoc opere reperitur ſinus unius minuti ſecundi 49 $\frac{29}{60}$ poſito ſinu toto 10000000. licebitque eadem methodo reperire ſinum unius tertii, & ſic in infinitum.

Problema VIII.

Invenire ſinum arcûs, qui præter gradus, & minuta prima, etiam ſecunda contineat.

INveniendus ſit ex. gr. ſinus graduum 36. 20′, 16″. Arcum grad. 36. 20′. proximè minorem dato repræſentet FB; arcum verò dato proximè majorem, nempe grad. 36. 21′ referat LB. Arcum datum grad. 36. 20′ 16″, qui inter hos medius eſt, referat IB. Sinus autem horum trium arcuum ſint LX, FR, IS, & ducatur perpendicularis FOQ. Arcus igitur LF eſt 1′, ſeu 60″ arcus IF, 16″, LQ differentia Sinuum LX grad. 36, 21′ & FR grad. 36, 20′. Quoniam igitur arcus LF, utpote 1′, inſenſibiliter differt a rectâ lineâ, & multò adhuc minùs arcus IF, 16″, erit per propoſ. 4. l. 6. *Fig. 6.*

Ut LF	ad IF	ita LQ differentia	ad IO diff.
60″	*16″*	Sinuum &c.	ſinûs &c.

Quare cùm tres primi termini ſint noti, etiam innoteſcet quartus, differentia IO, quæ addita FR ſinui grad. 36. 20′. dabit ſinum quæſitum 15. gra. 36. 20′, 16″.

Problema IX.

Dato Sinui arcum aſſignare.

SInum datum quære in tabulis. Si eum reperies, arcum illi debitum habes adſcriptum, ſi non reperies, quære eo proximè & majorem, & minorem, quos referat LX, FR, datum verò repræſentet IS. Ductâ perpendiculari FOQ, erit per 4. lib. 6.

LQ exceſſus.
Ut ſinus LX proximè majoris
dato ſupra minorem FR
ad
IO exceſſum
ſinûs dati IS
ſupra minorem FR

ita
arcus LF
60. ſecund.
ad
numerum ſecundorum,
quæ debentur arcui IF.

Quare cùm tria prima ſint nota, etiam quartum innoteſcet, numerus nempe ſecundorum debitus arcui IF, qui additus gradibus, ac minutis arcûs noti FB dabit arcum debitum ſinui dato IS.

Atqui hæc quidem hactenus de Sinuum, Tangentium, & Secantium inventione. Reliquum eſt, ut quædam ad plenam hujus rei theoriam facientia ſequenti Scholio declaremus.

Scholium.

Quæſtio eſt, cur radius circuli in tot partes diviſus aſſumatur.

UT hujus aſſumpti cauſa intelligatur, meminiſſe debemus, omnes Sinus, Secantes, & Tangentes inventas eſſe vel per radicis extractionem, vel per Regulam proportionum, Et quidem illi 120 ſinus arcuum ſe invicem 45 minutis ſuperantium per extractionem radicis reperti ſunt, ut patet ex Problem. 1, 2, 3, 4, 5. Cæteri verò omnes inter hos medii ex illis 120 per proportionis regulam innotuere, ut ex Problematis 5 poſtremâ parte conſtat. Tangentes autem, & Secantes ex ſinibus jam notis per regulam eandem repertæ ſunt, quemadmodum Problem. 6. oſtenſum eſt. Jam verò numeri, è quibus radix fuit elicienda, ut plurimùm ſunt non quadrati, ex quibus ſi radicem educas, ea ſemper a verâ, quæ (ut lib. 3. Arith. cap. 6. demonſtravi) impoſſibilis eſt, differet exceſſu, defectuve aliquo, minore tamen, quam ſit unitas. Hæc porro differentia, quæ ob fractionum in ſupputando moleſtiam negligitur; eò minoris momenti erit, quò major fuerit numerus ille, e quo radix educta fuit. Erit autem ille numerus eò major, quò radius in partes plures diviſus aſſumetur. Exemplum ſtatuamus in ſinu 45 graduum, quem Probl. 1. docuimus obtineri, ſi ex ſemiſſe quadrati ſinûs totius radicem extraxeris. Si numerus radii, ſeu ſinûs totius aſſumatur magnus, qualis hic eſt 10000000, illius etiam quadratus, adeoque & quadr. ſemiſſis 50000000000000 multò erit major. Porro radix integra, quæ elici poteſt ex 50000000000000, eſt 7071067, quæ quia ex maximo numero elicita eſt, etiam ipſa magnus eſt numerus.

merus. Unde ſit, ut ipſius à radice vera impoſſibili defectus, qui ſemper unitate minor eſt, ad ipſam proportionem habeat inſenſibilem, proindeque tutò, & abſque ſenſibili errore ullo negligatur. Hanc igitur ob cauſam tantus numerus partium ſinûs totius aſſumi debet. Verùm, ut hujus rei cauſa manifeſtior evadat, omnia errorum capita exactiùs erunt colligenda. Primum caput erroris eſt in ſinibus illis primis 120, *quos reperire oportuit per eductionem radicis ex numeris non quadratis. In reliquis deinde, qui ex his per regulam prop. eliciuntur, idemque proinde vitium participant, alii duo inſunt errores proprii, videlicet quòd in triangulis LFQ, IFO arcus LF* 45, *& arcus IF* Fig. 6. 15, *aut* 5 *aſſumantur tanquam recta linea; atque inſuper, cùm regula proportionum exercetur, quòd fractio ex diviſione reſidua negligatur. Quo vitio poſtremo etiam Tangentes, & Secantes, quæ omnes ex ſinibus per prop. reg. obtinentur, laborent neceſſe eſt. Denique cùm ſinus perpauci tantùm immediatè reperiantur, cæteri verò ſinus omnes deducantur ex invicem, ex ſinibus autem Tangentes, & Secantes, manifeſtum eſt, ſingulos præter errores ſibi proprios contrahere etiam vitia eorum, e quibus ipſi derivantur; unde ſit, ut error, qui in ſinu immediatè invento ſimplex erat, in ſecundo quaſi duplicetur, in tertio triplicetur, & ſic deinceps. Unde conſequens eſt, eò ſinus eſſe accuratiores, qui ex paucioribus derivantur; exactiſſimos verò eſſe eos, qui immediatè, hoc eſt ex aliis nullis inventi ſunt. Ex his ergo capitibus Sinuum, Tangentium, Secantium defectus oriuntur, qui ne eſſent notabiles, ſed quodammodo evaneſcerent, radium maximo partium numero diviſum aſſumere oportuit; & quamvis defectus illi ſint non unus, ſed (ut jam oſtendi) plures, tamen quòd ſinguli nullius ferè momenti ſint, etiam ſimul juncti errorem vix ſenſibilem inducunt, ſi aſſumatur ſinus totus partium admodum multarum; qua enim proportione augetur numerus radii, eadem creſcunt numeri ſinuum, ac proinde errores, qui in iis ſupputandis committi debent, magis evaneſcunt.*

Deinde iſtud etiam tyrones intelligant, ſi Sinus, Tangentes, Secantes accipiantur ad ſinum totum 10000000. *quales paſſim in tabulis reperiuntur abjectis duabus primis notis haberi Sinus, Tangentes, Secantes ad radium* 100000, *totidem videlicet cyfris multatum. Ex. gr. poſito radio* 10000000 *Sinus* 8 *grad. eſt* 1391731, *ſi cupiam minorem ad radium* 100000, *omiſſis duabus primis notis, is erit* 13917; *talis enim Sinûs, Tangentis, Secantis differentia a majori ſolùm erit fractio, cujus numerator ſint notæ abjectæ, denominator verò ſinus totus duobus cyfris multatus. Itaque ſinûs* 8. *grad.* 13917 *minoris a majori*

ri 1391731, differentia erit $\frac{31}{100000}$ *diametri. Ratio pendet ex naturâ logiſtica decimalis, quam expoſui Arithm. Practica lib. 2. cap. 9. & ſeq. præſertim ex Theor. 1. & 2. c. 10. Poſtremò hoc imprimis hic obſervabitur, cùm Sinus, Tangentes, Secantes expetuntur reſpectu radii ex. gr. 100000, exactiores fore eas lineas, ſi ſupputentur reſpectu ſinûs 10000000 datum excedentis duobus cyfris, & ab iis ita ſupputatis totidem prima nota, ut jam dictum eſt, abjiciantur. Ratio eſt. quia errores ſinuum multis notis conſtantium, non verſantur niſi in primis notis. Ita Regiomontanus, cùm ſinus cuperet ad partes radii 600000, aſſumpſit radium 600000, 00000, & a ſinibus ad eum radium ſupputatis primas quatuor notas ſuſtulit. Similiter Rheticus, ut haberet ſinus ad radium 10000000000 aſſumpſit radium 100000, 00000, 00000, & à ſinibus per hunc repertis præſcidit quinque notas primas. Quo artificio obtinetur, ut notæ reſidua omnes veræ exiſtant, ac proinde ſinus ita reperti a veris non deficiant per unam integram earum partium, quarum radius in tabulis, ſive canone aſſumitur. Et tales ſunt ii omnes, qui in tabulis paſſim deſcripti ſunt.*

CAPUT II.

Triangulorum rectilineorum Analyſis.

TRiangulum omne, quod per ſe manifeſtum eſt, tria latera habet, & angulos tres, quæ ſimul juncta ſenarium numerum efficiunt. Ex his tria ſemper nota ſint oportet, ut tria reliqua, quæ ſunt ignota, cognoſcantur. Scientia igitur ea, quæ ex tribus datis, ſive cognitis docet tria reliqua incognita invenire, *Analyſis Triangulorum* ab aliis *Trigonometria* appellatur. Hoc invento vix aliud, ſeu præſtantius, ſeu utilius. Quod ex nunc tyrones, ut vel eminus perſpiciant, non ea ſolùm triangula contemplari debent, quæ in cartâ, vel tabulâ delineantur; ſed ab his cogitationes ſuas transferre ad ea oportet, quæ in campis, atque in aere, imo & in ipſo cœlo per radios viſuales, & ipſas rerum diſtantias, longitudineſque deſcribuntur. Opportunum erit ex iis, quæ poſteà erunt uberiùs explananda, exemp. unum, alterumve quaſi ad rei totius ſpecimen aliquod afferre. Inter Problemata Trigonometriæ hoc erit inter cætera unum, qui dato uno latere trian-

trianguli rectanguli, & angulo acuto uno, reliqua latera quanta ſint, inveniri poſſint.

Ex hoc Problemate montis, aut turris altitudinem metiri poteris. Turris alicujus altitudinem referat recta QF; diſtantiam verò oculi ab eadem rectâ AQ horizontalis, cum quâ rectum angulum conſtituit altitudo FQ; radium viſualem extentum a turris apice F ad oculum in A repræſentet recta FA. Habemus triangulum rectangulum intelligibile in aere deſcriptum, cujus unum latus eſt AQ diſtantia oculi à turre, alterum QF ipſa turris altitudo, tertium radius viſualis AF. In hoc triangulo angulus QAF (ut ſuo loco oſtendam) fit notus inſtrumento; latus AQ diſtantia jam ſupponatur nota. Ex his duobus cognitis angulo videlicet acuto QAF, & diſtantia AQ, per univerſale Problema jam dictum invenietur quanta ſit altitudo turris QF. Adjungamus & alterum. Inter cætera Problemata Trigonometrica etiam iſtud occurrit: datis in triangulo quolibet duobus angulis, quæ ſit laterum inter ſe proportio, invenire. *Fig. 121*

Ex hoc Problemate ad diſtantiam Lunæ à Terrâ dimetiendam via aperitur. Centrum Lunæ eſto C, centrum terræ A, oculus in ſuperficie terræ in B; ſemidiameter orbis Terræ AB. Cogitentur tam ex terræ centro A, quàm ab oculo B extendi rectæ ad Lunæ centrum C. Quo facto conſtituitur triangulum à Terrâ ad Lunam pertingens, cujus unum latus eſt ſemidiameter Terræ AB, reliqua duo ſunt diſtantiæ tam centri Terræ, quàm ipſius oculi à centro Lunæ. In hoc triangulo angulus ACB aſtronomico artificio innoteſcit, angulus verò ABC fit notus per inſtrumentum. Itaque ex his duobus angulis jam cognitis per univerſale Problema jam dictum innoteſcet, quæ ſit proportio lateris CB, vel AC ad latus AB; hoc eſt, quoties diſtantia lunæ à terrâ ſemidiametrum terræ contineat: ac proinde cum alio jam artificio, quot milliaria radius terræ contineat, innotuerit, ipſa etiam diſtantia Lunæ à terrâ in milliaribus innoteſcit. Ad tantæ rei notitiam nos deduxit problema hujuſmodi, quod tyro fortè aliquis nullius eſſe uſûs judicaſſet. Hæc ergo dicta ſint in gratiam eorum, quibus illud in ore ſemper, cui uſui, ut ex his etiam cætera, quorum uſum non perſpiciunt, æſtimare diſcant. *Fig. 122*

Anno-

Annotationes quædam pro Tyronibus.

PRiuſquam ultro tendamus, expediet hìc in memoriam revocare nonnulla, quæ in Elementis traduntur, in quibus ſub hæc initia hærere plerumque tyrones ſolent. Prætereant iſta, qui his non indigent.

1. Datum, & notum idem ſignificant in hac materiâ.

2. Circumferentiam circuli partiri ſolent Mathematici in partes æquales 360, quas gradus appellant, & harum ſingulas rurſus in 60 æquales, quas minuta vocant.

3. Arcus circuli, ſeu pars circumferentiæ nota dicitur, cùm ſcitur, quot gradus contineat, tunc enim arcus ille, quanta ſit totius circumferentiæ pars, innoteſcet.

Fig. 13. 4. Angulorum menſuræ ſunt arcus circuli, qui ex vertice anguli tanquam centro inter ejus crura deſcribuntur. Sic anguli C menſura eſt arcus OQ centro C deſcriptus inter anguli crura CA, CB. Patet ex ultimâ lib. 6. Hac de cauſâ angulus C dicitur eſſe tot graduum, quot graduum eſt ille arcus OQ, ut ſi arcus OQ eſt grad. 32, etiam angulus C erit graduum 32.

5. Angulus ille C dari, ſeu notus eſſe dicitur, quando ſcitur, quot graduum ſit, hoc eſt, quot graduum ſit arcus OQ inter ejus crura ex vertice, ut centro deſcriptus.

6. Angulus rectus dicitur 90 graduum, quia arcus inter ejus latera centro vertice deſcriptus eſt 90 grad. ſeu quarta pars circumferentiæ totius.

Et duo recti dicuntur grad. 180; quia arcus inter eorum crura deſcriptus, eoſque ſubtendens, eſt grad. 180, ſemiſſis nempe circumferentiæ.

Et quatuor recti dicuntur efficere 360 grad. quia ſubtenduntur a totâ circumferentiâ.

Fig. 14. 7. Si ex anguli vertice ut centro inter ejus latera plures deſcribantur arcus OQ, SV, minor æque eſt menſura anguli, ac major; quia minor æquè magna pars eſt ſuæ circumferentiæ totius, ac major ſuæ, ac proinde ſi arcus major OQ eſt ex. gr. 32. graduum, quorum tota circumferentia major OQLH eſt 360, etiam minor arcus SV eſt graduum 32, quorum minor circumferentia SVRT eſt 360. Patet ex Corol. 3. prop. 33. lib. 6.

Fig. 14. 8. Cujuſcunque trianguli tres anguli ſimul ſumpti efficiunt grad. 180. Quia per 32. lib. 1. tres illi anguli ſimul ſumpti ſemper efficiunt duos rectos, ac proinde, ſi ex angulorum verticibus A, B, C tanquam centris inter trianguli cujuſvis crura

crura deſcribantur, eodem intervallo circini, tres arcus F G, XZ, OQ ſimul ſumpti ſemper conſtabunt ſemicirculum, hoc eſt arcum 180 graduum. Nam ſi centro C perficiatur ſemicirculus OQP, & arcus FG tranſcribatur ex Q in L; tertius arcus X Z æqualis erit reſiduo L P, adeoque tres ſimul arcus OQ, FG, XZ conficiunt integrum ſemicirculum OQLP.

9. Cùm in triangulo ABC quocunque, noti ſint duo anguli A grad. 125, B grad. 34. etiam C tertius innoteſcit, ſi utriuſque dati gradus 159 ſubtrahantur a 180 gradibus. Remanent enim gradus 21 tertii anguli C. Patet ex annotatione 8, & ex 32 lib. 1. Atque hac de cauſâ datis duobus angulis, etiam tertius dicitur eſſe datus.

10. Pari ratione, ſi in quovis triangulo (ABC) notus ſit unus angulus (B grad. 39.) innoteſcit etiam ſumma reliquorum (C, A) ſi gradus anguli noti (B grad. 39.) ſubtrahantur à 180 gradibus; remanent enim gradus (141) ſummæ duorum reliquorum (C, A.) Patet ex annotat. 8, & 32. lib. 1. Et hac de cauſâ dato uno angulo, dicitur & ſumma reliquorum dari. *Fig.* 15.

11. In triangulo rectangulo (BAC) dato acuto uno (C grad. 31.) etiam acutus alter (B) innoteſcet, ſi acuti dati (C grad. 31.) ſubtrahantur à gradibus 90, remanent enim grad. (59.) pro acuto altero B. Patet ex annotat. 8, & 32. lib. 1. Et hac de cauſâ in triangulo rectangulo, cùm datur acutus unus, dari dicitur etiam alter. *Fig.* 16.

12. Quatuor termini A, B, C, Z dicuntur proportionales, cùm primus A eſt ad ſecundum B, ut tertius C ad quartum Z

ut A ad B,
ita C ad Z

13. Termini noti ſunt, qui numeris exprimuntur, hoc eſt, quando ſcitur, quot partes alicui certæ æquales contineant.

14. Cùm e quatuor proportionalibus tres termini ſunt noti, quartus verò incognitus, is ſemper innoteſcet, ſi ſecundus multiplicetur per tertium, & productus numerus dividatur per primum, quotiens enim diviſionis erit quartus, qui latebat.

Atque hæc eſt regula, quæ vulgò proportionum, ſive trium, & ob ſummam utilitatem Aurea appellatur, demonſtrata eſt prop. 19. lib. 9. de quâ vide plura lib. 4. Arithm. cap. 1.

Dato angulo, datur ex tabulis ſinus ejuſdem: & dato ſinu datur angulus; ut ſi detur angulus grad. 40, 16. gradus quære in vertice tabulæ, minuta autem 16 in columnâ primâ ad lævam.

His

His adſcriptum reperies non ſolùm ſinum illis debitum 6463460, ſed etiam tangentem 8470620, & ſecantem 13105396. Contra ſi detur ſinus ex. gr. 6563460, cujus angulum ignores, quære in columnâ ſinuum numerum datum; vel ſi non reperiatur, ei proximè æqualem, in columnâ primâ ad lævam reperies minuta, & in vertice gradus anguli quæſiti.

Denique hoc obſerva: in analyſi trianguli rectanguli quamvis ſolùm duo data exprimantur; ut duo latera, vel unum latus cum uno acuto; tamen datum tertium ſemper eſt ipſe angulus rectus, qui, quia per ſe notus eſt, & triangulo rectangulo nominato ſatis ſubintelligitur, ulteriùs exprimi non ſolet.

ANA-

ANALYSIS TRIANGULI RECTANGULI.

PROBLEMA PRIMUM.

Datis omnibus angulis laterum proportionem invenire.

BAſi AC adſcribe totum ſinum, lateri AB ſinum oppoſiti anguli C, lateri CB ſinum anguli oppoſiti A. Eadem erit laterum proportio, quæ ſinuum. Fig. 15

Demonſtratio patet ex defin. 6. cap. 2. Itaque ſi cupiam ſcire, quanto latus unum ſit altero majus ex. gr. BC quàm AC: ſinum 10000000 divide per ſinum 5150381. Quotiens 1 $\frac{4849619}{10000000}$ hoc indicabit; ſicut enim quotiens eſt ad 1, ita AC eſt ad BC.

Vel alterutri lateri circa rectum, puta BC, cui adſcribe ſinum totum, lateri BA tangentem acuti C, baſi AC ſecantem ejuſdem anguli C: Ita patebit laterum proportio, ut patet ex definit. 9. cap. 2.

Problema II.

DAtis baſi (BC pedum 100,) & acuto uno (B grad. 59) reliqua latera (AC, AB) invenire. Fig. 18.

IN triangulo rectangulo hypotenuſa, ſive baſis dicitur, quæ recto angulo opponitur, latera verò, quæ rectum angulum continent.

Inventio lateris AC.

Ut data baſis BC, prout eſt ſinus totus 10000000	ad latus AC, prout eſt ſinus anguli B grad. 59. 8571673

ita eadem baſis B C, prout eſt pedum 100.	ad	ejuſdem lateris A C pedes quæſitos....

In quo analogiſmo, quia tres primi termini ſunt noti, etiam quartus incognitus, numerus nempe pedum lateri A C debitorum innoteſcet per regulam proportionum multiplicando videlicet ſecundum 8571673 per tertium 100, & productum 857167300 dividendo per primum 10000000, quotiens enim $\frac{857167300}{10000000}$ ex eâ diviſione proveniens, eſt quartus, qui latebat, numerus pedum ſcilicet, quos continet latus quæſitum A C.

Non aſſimilis inventio lateris AB. Nam quia datur acutus B grad. 59. etiam per 32. lib. 1. ſeu annotat. 11. datur acutus alter C grad. 31; unde etiam utriuſque dantur. Jam

Ut baſis BC, prout eſt ſinus totus 10000000	ad	latus ignotum AB, prout eſt ſinus ang. gr. 31. 5150381
ita baſis BC, prout eſt pedum 100.	ad	lateris ignoti AB pedes quæſitos.....

Cùm ergo tria prima ſint nota, etiam quartum, numerus videlicet pedum lateri A B debitorum per regulam trium innoteſcet.

Demonſtratio.

HOc unum tum hìc; tum ferê etiam in ſequentibus erit demonſtrandum, quatuor ſupradictos terminos eſſe proportionales. Id verò ex definitione 6. cap. 2. manifeſtum eſt. Nam baſis BC, latus nempe recto angulo A oppoſitum eſt ſinus totus, ſeu radius, latus verò AC eſt ſinus anguli oppoſiti B ex. gr. 59. grad. qui ex tabulis datur 8571673. Igitur quarum partium ſinus totus, nempe baſis B C eſt 10000000. earum ſinus anguli B, nempe latus AC eſt 8571673; ac proinde ut baſis BC prout eſt ſinus totus 10000000 eſt ad AC 8571673 ſinum anguli B, ita eadem baſis B C ex hyp. 100 pedes ad idem latus AC quæſitum, ſive ad numerum pedum in latere AC contentorum. Quod erat demonſtrandum.

Pari modo per defin. 6. B C eſt ſinus totus 10000000, & A B ſinus anguli C 31 grad. qui ex tabulis datur 5150381. Ergo

Ergo ut BC ſinus totus 10000000 ad BA ſinum 5150381, ita eadem BC ex hyp. pedes 100. ad eandem BA incognito pedum numero conſtantem. Quod erat demonſtrandum.

N O T A.

Fundamentum hujus, & omnium ſequentium operationum, ac demonſtrationum eſt, quòd quando duæ quantitates A, & Z notæ ſunt ſecundùm quamvis earum menſuram, & una earum A etiam nota eſt in aliâ menſurâ ex. gr. in pedibus, tum etiam altera Z in pedibus neceſſariò innoteſcet per regulam auream, vide cap. 1. lib. 4. Arithmeticæ noſtræ, ubi id demonſtratum eſt.

Problema III.

Datis latere uno (AC milliariorum 1000,) & acuto uno, latus reliquum (BA,) & baſim (BC) invenire. Fig. 17.

Ex uno acuto dato notus fiat alter: ut ſi B detur grad. 54. his ſubductis a 90. erit C gr. 36.

Inventio lateris AB.

Ut latus datum AC, prout eſt ſinus totus 10000000	ad	latus ignotum AB, prout eſt anguli C dato lateri adjacentis tangens 7265426
ita latus datum AC, prout eſt milliariorum 1000	ad	lateris ignoti AB milliaria quæſita.

Inventio baſis BC.

Ut latus datum AC, prout eſt ſinus totus 10000000	ad	baſim ignotam BC, prout eſt acuti C dato lateri adjacentis ſecans 12360680
ita latus datum AC, prout eſt milliariorum 1000	ad	ignotæ BC baſeos milliaria quæſita.

 Quare

Quare cùm in utroque analogiſmo tria prima ſint cognita, etiam quartum utrobique per regulam proportionum innoteſcet: eritque latus AB milliariorum $726\frac{5426}{10000}$ baſis verò BC milliariorum $123\frac{6068}{10000}$.

Demonſtratio.

PEr defin. 9. cap. 2. latus AB eſt tangens anguli C grad. 36, quæ ex tabulis datur 7265426, latus verò AC eſt ſinus totus 10000000, hoc eſt, quarum partium latus AC eſt 10000000, earum eſt AB latus 7265426. Ergo ut AC 10000000 eſt ad AB 7265426, ita eadem AC ex hyp. 1000 milliar. ad milliaria quæſiti lateris AB, hoc eſt ad numerum milliariorum in AB contentorum, ergo &c.

Pari modo per defin. 9. cap. 2. reſpectu anguli C grad. 36 AC eſt ſinus totus 10000000 & BC ſecans, quæ ex tabulis datur 12360680. Ergo ut AC ſinus totus 10000000 eſt ad BC ſecantem 12360680, ita eadem AC ex hyp. 100. milliarium ad eandem BC ignotum numerum milliariorum continentem, ergo &c.

Problema IV.

Fig. 18. *BAſi (CB 1000 perticarum) & uno latere (AC 891 perticarum) datis, invenire acutos angulos, & latus alterum (AB.)*

Ut baſis data CB perticarum 1000	ad	latus datum AC perticarum 891
ita baſis eadem CB, prout eſt ſinus totus 10000000	ad	anguli ignoti B, qui dato lateri AC opponitur, ſinum.

Qui proinde per regulam proportionum reperitur 8910000; huic in tabulâ invenitur proximè æqualis 8910065, cui adſcriptus eſt angulus gr. 63, qui per probl. 9. cap. 2. adhuc reperitur exactiùs 15. ergo eſt angulus B, qui latebat, invento autem acuto B datur etiam acutus alter C grad. 27.

Quoniam verò jam in triangulo rectangulo nota eſt baſis CB cum angulo C, latus quæſitum BA invenietur per probl. 2.

Idem latus independenter ab angulis reperitur per probl. 3. in Scholio prop. 47. lib. 1. elem.

De-

Demonſtratio.

Per defin. 6. cap. 2. CB eſt ſinus totus 10000000, & CA eſt ſinus anguli B. ergo ut baſis BC 1000 pertic. ad latus AC 891 pertic. ita baſis eadem BC prout eſt ſinus totus 10000000. ad idem latus AC prout eſt ſinus ignoti anguli B.

Aliter.

Ut latus CA datum pertic. 891	ad	baſim CB pertic. 1000
ita ſinus totus 10000000	ad	ſecantem ignoti ang. C datis CB, CA comprehenſi.

Demonſtratio eadem, ſed eſt defin. 9. cap. 2.

Problema V.

DUobus lateribus datis (BA pedum 79, CA pedum 100) *acutos angulos, & baſim invenire.* Fig. 19.

Inveniendus ſit angulus acutus C.

Ut datum latus AC adjacens quæſito ang. C	ad	alterum latus datum AB.
ita ſinus totus 10000000	ad	anguli quæſiti C tangentem.

Quæ per regulam prop. reperitur 7900000; huic proximè æqualis invenitur in tabulâ 6156615, cui adſcriptum reperies angulum 38 graduum, qui probl. 9. cap. 2. adhuc reperietur exactiùs. Tantus ergo eſt acutus C, qui latebat, quo ex grad. 90 ſubtracto datur & alter B grad. 52, quia verò noti jam ſunt acuti anguli, & ex hyp. etiam latera per probl. 2. etiam baſis BC fiet nota.

Alia baſis inventio ab angulis independens traditur probl. 2. Scholii prop. 47. lib. 1. elem.

Demonſtratio.

Per defin. 9. cap. 2. reſpectu anguli C ſinus totus eſt CA, tangens BA. Ergo ut CA ex hyp. pedum 100 ad BA ex hyp. pedum 79. ita eadem CA, prout eſt ſinus totus 10000000 ad eandem BA, ut eſt tangens quæſiti anguli C.

ANALYSIS TRIANGULI OBLIQUANGULI.

Triangulum, in quo nullus angulus rectus eſt, obliquangulum voco.

Problema VI.

Fig. 20. 21. *Datis omnibus lateribus lateris ſegmenta (BF, CF) facta a perpendiculari (AF) ex oppoſito angulo ducta, & ipſam perpendicularem invenire.*

Centro A intervallo lateris minoris AB deſcribatur circulus ſecans reliqua latera in O, & Q, & producatur CA in L: manifeſtum eſt LC eſſe ſummam laterum AC, AB; & OC differentiam eorundem; item patet ex prop. 3. lib. 3. BQ biſectam eſſe in F. His ita conſtitutis rectangula BCQ, & LCO (a) æqualia ſunt. Ergo per 14. vel 16. lib. 6.:

(a) *Coroll. 1. prop. 36. l. 3.*

Ut BC latus, in quod perpendicularis cadit.	ad	LC ſummam laterum reliquorum BA, AC
ita OC differentia reliquorum laterum.	ad	rectam CQ

Quare cùm tria prima ſint nota, etiam quartum nempe CQ innoteſcet, hæc, ſi perpendicularis intra triangulum cadit, (ut in fig. 20) ablata à latere noto BC notam relinquet BQ, cujus ſemiſſis BF eſt ſegmentum quæſitum minus, quo ſubtracto a latere BC, etiam majus ſegmentum CF innoteſcet.

Quòd ſi perpendicularis cadat extra (ut in Fig. 21) tunc ex quartâ proportionali CQ ſubtrahe latus BC, ut innoteſcat re-

reſiduum BQ, hujus enim ſemiſſis BF dabit ſegmentum minus ad quod adjecto latere BC habetur ſegmentum majus CF.

Ipſa verò perpendicularis AF fiet nota, ſi ex quadrato lateris BA adjacentis minori ſegmento ſubtrahatur quadratum minoris ſegmenti BF, & ex reſiduo extrahatur radix, ea enim erit AF, patet ex p. 47. lib. 1.

Porro ipſa quarta proportionalis CQ indicat quando perpendicularis intra triangulum cadat, quando extra; cùm enim minor eſt latere dato BC, in quod incidit perpendicularis, ea cadet intra triangulum, cùm major, extra.

Hoc problema, quod ſanè proinde pulchrum, atque utile eſt, expeditur etiam per prop. 13. & 12. lib. 2. ut tradidi in ſcholio ibidem; ſed modus hic traditus aliquantò facilior eſt.

Problema VII.

D*Atis omnibus angulis, laterum proportionem invenire.* Fig. 22. 23.

In quovis triangulo eadem eſt inter latera proportio, quæ inter ſinus angulorum lateribus oppoſitorum.

Demonſtratio.

Eſto triangulum obliquangulum ABC latera habens inæqualia (aliàs enim res per ſe eſſet manifeſta). & ex majori CB abſcindatur CI æqualis minori AB, ducanturque IL, BF ad AC perpendiculares, quæ quia ſunt inter ſe parallelæ, erit (*a*) CI (hoc eſt AB) ad CB, ut IL ad BF. Sed poſito ſinu toto CI eſt IL ſinus (*b*) anguli C, & poſito ſinu toto AB, (hoc eſt eodem, quo ante, cùm AB, CI æquales ſint) BF eſt (*c*) ſinus anguli BAC, ergo latus AB eſt ad latus CB, ut ſinus anguli C ad ſinum anguli BAC, eadem erit in reliquorum comparatione laterum demonſtratio.

(a) *Per cor. 1. p. 4. lib 6.*
(b) *Per def. cap. 1.*
(c) *Per eand.*

Tantùm nota. Cùm perpendicularis BF extra triangulum cadit, eam nihilominus eſſe ſinum anguli BAC, quia (*d*) ſinus eſt anguli BAF, cum quo (*e*) eundem habet ſinum angulus BAC, ejus complementum ad duos rectos.

(d) *Per eand.*
(e) *Per def. 5.*

Problema VIII.

Fig. 24. D*Atis omnibus lateribus, angulos invenire.*

Concipiatur in aliquod latus ex oppoſito angulo demiſſa perpendicularis AF, & per probl. 6 nota fiant ſegmenta BF, CF. Tum, quia in triangulo rectangulo BFA dantur BA, BF, per probl. 4. ſimiliter innoteſcet angulus B. Rurſum, quia in triangulo rectangulo CFA dantur CA, CF, per probl. 4. ſimiliter innoteſcet angulus C, & per prop. 32. lib. 1. ſeu annot. 9. etiam tertius BAC.

Problema IX.

Fig. 25. D*Ato latere (AC,) & duobus angulis, reliqua latera (AB, CB) invenire.*

Per Problema 7.

Ut anguli B, qui dato lateri AC opponitur, ſinus 6293204.	ad	anguli C oppoſiti quæſito lateri AB ſinum 2756374.
ita latus datum AC 1000 paſſuum	ad	lateris quæſiti AB paſſus.

Rurſus per Problema 7.

Ut anguli B dato lateri AC oppoſiti ſinus 6293204	ad	anguli A oppoſiti quæſito lateri CB ſinum 8195521
ita latus datum AC 1000 paſſuum	ad	lateris quæſiti CB, paſſus.

In utroque analogiſmo tria prima nota ſunt, quartum igitur utrobique, nimirum latera AB, CB innoteſcent per regulam proportionum.

Pro-

Problema X.

D*Atis duobus lateribus* (*CA ped.* 216, *BA ped.* 112) *& angulo* (*A gr.* 113) *iis comprehenſo, reliquos angulos* (*C*, *B*,) *& latus reliquum* (*CB*) *invenire.* Fig. 26.

Quoniam CA, BA latera dantur, etiam datur eorum ſumma 328. ped. & eorundem differentia ped. 104. Rurſum, quia datur angulus A grad. 113, datur & reliquorum ignotorum C, B ſumma (67 grad.) adeoque & ſemiſſis ſummæ (grad. 33, 30.) cujus proinde tangens 6618856 datur ex tabulis; his poſitis

Ut lat. datorum CA; BA ſumma 328. ped.	ad	laterum CA, BA differentiam 104. ped.
ita tang 6618856 ſemiſſeos ſummæ incognitorum ang.	ad	tangentem...., ſemiſſeos differ. ignotorum ang. CB

Cùm ergo tria prima ſint nota, per reg. prop. innoteſcet quartum, nempe tangens ſemiſſeos differentiæ angulorum ignotorum C, B... huic in columnâ tangentium proximè reperitur æqualis..., cui adſcripti ſunt grad,.... pro angulo ſemiſſeos differentiæ angulorum C, B, quam ſi addas ad ſemiſſem ſummæ grad. 33, 30, angulorum C, B, habetur B major quæſitus. Si ſubtrahas, proveniet minor C: latus reliquum CB reperitur per præced. jam enim præter latus, dantur & anguli.

Demonſtratio.

Analogiſmi ſupra poſiti eſt ejuſmodi: fiant anguli HPF, FPG æquales angulis ignotis B, C: centro P deſcripto circulo, qui latera angulorum ſecet in H, F, G, ducantur ad FP perpendiculares HR, GL, quæ per defin. 1, & 6, & 5 erunt ſinus angulorum HPF, FPG, poſito ſinu toto, ſeu radio PH, PG, ducatur deinde recta HOG, & fiat HX par ipſi GO jungaturque PX, erit XO differentia ipſarum HO, HX, hoc eſt ipſarum HO, OG, denique ex centro Fig. 27. 26.

P ducatur ad HG perpendicularis PQ, (*a*) quæ biſecabit HG, quoniam igitur æquales ſunt HQ, GQ; & HX, GO, etiam XQ, OQ æquales erunt. Unde QO eſt ſemiſſis differentiæ XO rectarum HO, OG, ex quo facilè etiam oſtenditur, angulum HPQ eſſe ſemiſſem ſummæ angulorum HPO, OPG, hoc eſt (*b*) angulorum B, C: & QPO eſſe ſemiſſem differentiæ angulorum HPO, OPG; hoc eſt B, C: his poſitis differentia laterum CA, AB eſto Z.

Quia HR eſt ſinus anguli HPF, hoc eſt B, & GL ſinus anguli FPG, hoc eſt C, erit latus (*c*) CA ad latus BA ut HR ſinus anguli B ad GL ſinum anguli C, hoc (*d*) eſt (quia æquiangula ſunt triangula HRO, GLO) ut HO ad OG. Ergo CA (*e*) eſt ad Z differentiam laterum CA, BA, ut HO ad ipſarum HO, OG differentiam XO; & invertendo laterum differentia Z eſt ad CA, ut differentia XO ad HO: atqui (ut jam oſtendi) CA eſt ad BA, ut HO ad OG, igitur (*f*) ex æquo Z differentia laterum eſt ad BA, ut XO differentia ad OG. Ergo invertendo BA eſt ad Z, ut OG ad XO; quoniam ergo (ut oſtenſum ſupra) CA eſt ad AB, ut HO ad OG, ac proinde (*g*) componendo ſumma CA, AB eſt ad AB, ut HG ad OG; AB verò (ut jam oſtendi) ſit ad Z, ut OG ad XO, ex æquo (*h*) erit ſumma laterum CA, AB ad Z laterum differentiam; ut HG ad XO. Sed ut HG ad XO, ſic ſemiſſis HG nempe HQ, quæ (*i*) tangens eſt anguli HPQ, ad ſemiſſem XO, nempe QO tangentem (*k*) anguli QPO. Ergo ſumma laterum CA, AB, eſt ad Z differentiam laterum, ut HQ tangens anguli HPQ (qui, ut oſtendi ſupra, eſt ſemiſſis ſummæ angulorum BC) ad QO tangentem anguli QPO, qui eſt ſemiſſis differentiæ angulorum B, C. Quod erat demonſtrandum.

(a) Per 3. l. 3.
(b) Per conſtr.
(c) Per Probl. 7.
(d) Per 4. l. 6.
(e) Per cor. 2. p. 18. l. 5.
(f) Per 22. l. 5.
(g) Per 18. l. 5.
(h) Per 22. l. 5.
(i) Per Def. 9.
(k) Ibidem.

Alia Problematis ſolutio.

Fig. 28. 29.

Ex alterutro angulo incognito, ex. gr. ex B in latus oppoſitum ducta concipiatur perpendicularis BF.

In triangulo rectangulo BFA, cùm detur baſis BA, & acutus angulus BAF, per prob. 2. inveniantur BF, & AF, quæ ſubtractâ ex datâ CA in Fig. 28. additâ verò ad CA in Fig. 29. nota fiet etiam CF.

Rurſum ergo in trigono rectangulo CFB cùm dentur duo latera

latera BF, CF per probl. 5. innoteſcet BC latus quæſitum, & angulus C, quem unà cum dato A ſubtrahe a 180. grad. remanebit B alter quæſitorum.

Problema XI.

Datis duobus lateribus AB, CB, & angulo una C iis non comprehenſo, reliquos angulos, & latus reliquum AC invenire. Fig. 30, 31.

Per Problema VII.

Ut AB latus datum dato angulo C oppoſitum	ad	alterum latus datum CB.
ita ſinus anguli dati C.	ad	ſinum ignoti anguli A, qui alteri lateri dato CB opponitur.

Quare cùm tria prima ſint nota, etiam quartum, nempe ſinus anguli ignoti A, innoteſcet, & per ſinum invenietur in tabulis angulus ipſe A, ſi acutus ſit; ſi verò A obtuſus, tunc angulus per ſinum inventus ſubtractus a 180 gradibus relinquet quæſitum A. Ratio patet ex defin. 5.

Neceſſe igitur hic eſt ad inventionem anguli, ut ejus ſpecies aliundè nota ſit.

Inventis angulis, latus ignotum AC innoteſcet per Probl. 9.

Aliter.

Ex angulo B datis lateribus comprehenſa ducta intelligatur BF perpendicularis ad latus ignotum AC. Fig. 32, 33.

In triangulo rectangulo BFC, cùm detur baſis BC, & unus acutus C, innoteſcent per Problema ſecundum CF, & BF. Rurſus in trigono rectangulo BFA cùm dentur baſis AB, & latus BF, innoteſcent per Problema quartum angulus BAF, & latus FA.

Quòd ſi angulus ignotus BAC, qui datis lateribus AB, CA comprehenditur, ſit acutus, ac proinde perpendicularis BF, ut in Fig. 32. intra triangulum cadat, angulus Fig. 32.

gulus BAF jam inventus eſt ipſe BAC quæſitus, & tunc F A jam nota addenda eſt ad CF ante repertam, ut innoteſcat totum latus quæſitum AC.

Fig. 33. Si verò BAC ſit obtuſus, adeoque perpendicularis B F, ut in Fig. 33. extra triangulum cadat, angulus inventus B A F ſubtrahendus eſt a' 180 gradibus, ut innoteſcat quæſitus BAC: & tunc F A jam nota demenda ex notâ F C, ut innoteſcat latus quæſitum AC.

Rurſum igitur ad inventionem anguli B AC, & lateris AC neceſſe eſt, ut aliundè anguli BAC nota ſit ſpecies.

DE

DE DIMENSIONE
TRIANGULORUM SPHÆRICORUM
Ex Encyclopædiâ P. Gaſparis Schotti E Societate Jeſu.

DE ELEMENTIS SPHÆRICIS.
§. I.

Elementa ſphærica appello, quæ neceſſaria ſunt tum ad trigonometriam ſphæricam, tum ad univerſam ſphæricam ſcientiam intelligendam, cujuſmodi ſunt ſuppoſitiones nonnullæ, & definitiones.

Quæ ſequuntur, voco ſuppoſitiones, non quòd nullâ demonſtratione egeant, ſed quòd demonſtrata ſumantur à Theodoſio, & aliis.

SUPPOSITIONES.

I.

Sphæra eſt figura ſolida comprehenſa unicâ ſuperficie convexâ, ad quam ab uno eorum punctorum, quæ intra figuram ſunt, omnes rectæ lineæ ductæ ſunt inter ſe æquales. *Theod. l. 1. ſphær. def. 1. 2. 3. 4.* Centrum ſphæræ eſt prædictum punctum. Axis ſphæræ eſt recta quædam linea per centrum ſphæræ ducta, & utrimque terminata in ſphæræ ſuperficie, circa quam quieſcentem circumvolvitur ſphæra. Poli ſphæræ ſunt extrema puncta ipſius axis. *In appoſitâ figurâ (quam globoſam fingere oportet) centrum eſt E; axis AC, & BD; poli A, & C, B, & D. Melius intelligentur hæc, & ſequentia, ſi ante oculos habeatur globus materialis.* *Fig. 36.*

II.

Polus circuli in ſphærâ deſcripti eſt punctum in ſuperficie ſphæræ, a quo omnes lineæ ad circuli circumferentiam ten- *Idem def. 5.*

Fig. 36. dentes rectâ ſunt inter ſe æquales. *Circuli AFCG polus unus eſt B, alter D; circuli verò BFDG polus unus eſt A, alter C.*

III.

Circuli ſphæræ aut ſunt maximi, aut non maximi: Maximi ſunt, qui dividunt ſphæram in duas æquales partes. Et hi habent idem centrum cum ſphærâ. Ex quo ſequitur, circulos ſphæræ habentes idem cum ipſâ centrum eſſe maximos. Non maximi ſunt, qui non dividunt ſphæram in duas partes æquales. Et hi non habent idem centrum cum ſphærâ. Unde circuli non habentes idem cum ſphærâ centrum, non ſunt maximi. *In figurâ circulus AFCG eſt maximus; HIKL verò non maximus. Prioris centrum eſt E, idem quod ſphæra.*

Theod. p. 6. l. 1.

Fig. 36.

IV.

Theod. l. 1. prop. 11. 12. Fig. 36.

In ſphærâ maximi circuli ſe mutuò ſecant bifariam: & è contrario in ſphærâ circuli, qui ſe mutuò bifariam ſecant, ſunt maximi. *Duo circuli, ABCD, & AFCG ſecant ſe bifariam in A, & C.*

V.

Omnes maximi circuli ejuſdem ſphæræ ſunt inter ſe æquales, quia eorum diametri ſunt æquales, cùm omnes per idem centrum tranſeant, *ut patet in diametris AC, BD.*

Fig. 36.

VI.

Theod. prop. 13. l. 1.

Si in ſphærâ maximus circulus circulum quempiam ad rectos angulos ſecet, & bifariam eum ſecat, & per polos ipſius tranſit. Ad rectos angulos (ſcilicet ſphæricos) ſecare ſe dicuntur, quando unus tranſit per polos alterius, & conſequenter non inclinat magis ad unam ejus partem, quàm ad alteram. *Sit AFCG ſecat circulum ABCD ad angulos rectos in punctis A, & C. Sic etiam BFDG ſecat circulum ABCD ad angulos rectos in B, & D. Utrobique autem bifariam ſe mutuò ſecant.*

Fig. 36.

VII.

Idem prop. 15. l. 1.

Si in ſphærâ maximus circulus eorum, qui in ſphærâ ſunt circulorum, aliquem per polos ſecet, bifariam, & ad angulos rectos eum ſecat. *Explicatio patet ex proximè dictis.*

VIII.

VIII.

Si in ſphærâ maximus circulus per polos alterius cujuſpiam maximi circuli tranſeat, tranſibit viciſſim hic per polos illius. *Sic circulus maximus ABCD tranſit per polos B, & D circuli maximi AFCD, & hic viciſſim per polos A, & C alterius.* *Vide Theor. 1. additam. ad prop. 15. l. 1. Theod. apud Clav. Fig. 36.*

IX.

Si in ſphærâ circulus circulum per polos ſecet, circulus maximus eſt, & biſariam eum ſecat, & ad angulos rectos. *Sic quia circulus ABCD ſecat tam HIKL, quàm AFCG per polos ipſorum B, & D, ſignum eſt eſſe maximum circulum, & utrumque biſariam ſecat, & ad angulos rectos ad H, & K, item ad A, & C.* *Vide Theor. 2. ibid. Fig. 36.*

X.

Si in ſphærâ circulus circulum biſariam, & ad angulos rectos ſecat, circulus maximus eſt, & per polos eum ſecat. *Explicatio patet ex proximè dictis.* *Ibidem Theor. 3.*

XI.

Omnis circulus maximus diſtat undique per quadrantem maximi circuli à ſuo polo, ideoque omnis quadrans à polo maximi circuli in ipſum ductus eſt ei ad angulos rectos. *Sic AFCG diſtat a ſuis polis B, & D per quadrantes AB, CB, AD, CD &c.* *Per coroll. prop. 16. l. 1. Theod. Fig. 36.*

XII.

Si duo, aut plures maximi circuli maximum circulum ad rectos ſecent angulos, concurſus ipſorum erit ipſiuſmet circuli polus. *Patet ex globo materiali, ſi in illo deſcribantur plures circuli maximi ſecantes alium maximum perpendiculariter.*

DEFI-

DEFINITIONES.

Clavius l. de Triang. Sphæricor. defi. 1. Fig. 37.

ANgulus ſphæricus eſt, quem in ſphæræ ſuperficie duo arcus circulorum maximorum ſeſe mutuò ſecantes continent. *Tales ſunt anguli AEC, CEB &c*; *Dixi*, arcus circulorum maximorum, *quia anguli ab aliis ſphæra circulis effecti in ſuperficie ſphæra à Trigonometris non conſiderantur. Dixi præterea*, ſeſe mutuò ſecantes, *quia omnes circuli maximi in ſphærá ſe mutuò ſecant, & nunquam ſe mutuò tangunt*, per Suppoſit. 4.

II.

Idem def. 2.

Angulus ſphæricus rectus eſt, quem in ſphæræ ſuperficie duo arcus circulorum maximorum ſeſe ad angulos rectos ſecantium continent. *Tunc autem duo circuli ſecant ſe ad angulos rectos, quando unus ad alterum rectus eſt, hoc eſt, quando unus ſecans alterum non inclinat magis ad unam partem, quàm ad alteram, ut ſuprà dicebam Suppoſit. 6.*

III.

Idem def. 3.

Angulus ſphæricus obtuſus eſt, qui recto major eſt; acutus verò, qui minor eſt recto. *Explicatione non eget.*

Vide Clav. l. de triang. ſphærica. prop. 10.

Conſtituitur angulus ſphæricus ad punctum datum in dato arcu circuli maximi in ſuperficie ſphæra, ſi per illud punctum, & per polum dati arcûs deſcribatur circulus maximus; hujus enim circuli circumferentia cum arcu dato angulum rectum conſtituet, cùm circulus hic ad circulum illius arcus ſit rectus per Suppoſit. 7. & 9. *Sic ſi arcus ADB ſit circuli maximi arcûs, & polus ejus ſit E; ſi ex puncto A per E ducatur circulus maximus AEB &c, erit angulus A rectus. Si per datum punctum deſcribatur arcus circuli maximi non per polos dati arcûs, conſtituet circumferentia hujus circuli cum dato arcu angulos inæquales, obtuſum unum, alterum acutum. Sic circuli maximi arcus FHG cum circuli maximi arcu ADB ad punctum F conſtituit angulum AFH obtuſum, & HFD acutum.*

Fig. 37.

IV.

Æquales ſphærales anguli ſunt, qui ſub arcubus circulorum ad æquales angulos inclinatorum continentur.

V.

V.

Triangulum ſphæricum eſt, quod tribus arcubus circulorum maximorum ſphæræ ſuperficie continetur. *Itaque latera trianguli ſphærici ſunt arcus maximorum circulorum ſingulatim ſemicirculo minores. Triangulum ſphæricum eſt vel æquilaterum, ſi nimirum omnes tres arcus fuerint æquales: vel iſoſceles, ſi duo tantùm arcus fuerint æquales: vel ſcalenum, ſi omnes inæquales inter ſe fuerint. Item vel rectangulum eſt, ſi nimirum aliquem angulum habuerit rectum: vel obtuſangulum, ſi aliquem obtuſum habuerit: vel acutangulum, ſi omnes acuti fuerint. In rectangulo, & obtuſangulo triangulo ſphærico, ſi unus angulus eſt rectus, vel obtuſus, poſſunt alii duo etiam eſſe recti, vel obtuſi, vel alter ſaltem, quod in rectilineis non contingit.* *Idem def. 5.*

VI.

Arcus anguli ſphærici eſt arcus circuli maximi, cujus polus eſt in ipſo angulo inter duos arcus angulum ſphæricum comprehendentes interceptus. *Sic arcus anguli AEC eſt AC &c; non omnis ergo arcus angulo ſphærico oppoſitus eſt illius anguli arcus. Quia verò polus circuli maximi abeſt ab eo quadrante circuli maximi, fit ut uterque arcuum angulum comprehendentium inter angulum, & anguli poſiterum ſit quadrans. Quare ſi angulus fuerit rectus, arcus anguli erit quadrans: ſi acutus, quadrante minor; ſi obtuſus, major quadrante.* *Clav. def. 6. Fig. 37.*

VII.

Complementum arcûs eſt exceſſus, quo quadrans eum ſuperat, ſi arcus minor eſt quadrante: vel ab eo ſuperatur, ſi eſt quadrante major. *Clav def. 7.*

VIII.

Complementum anguli ſphærici eſt exceſſus, quo quadrans arcum ipſius anguli ſuperat, vel ab eo ſuperatur. *Clav. def. 8.*

IX.

Sinus, Tangens, & Secans anguli ſphærici eſt ſinus, tangens, & ſecans illius arcûs, qui arcus anguli dicitur. *Clav. def. 9.*

§. II.

DE PROPRIETATIBUS angulorum, & triangulorum ſphæricorum.

I.

Fig. 34. SI anguli ſphærici crura, ſive latera continuantur, concurrunt, & ſemicirculos efficiunt. *Sic anguli BAC crura AB, AC continuata concurrunt in D, & efficiunt ſemicirculos ABD, ACD. Ratio eſt, quia* per 1. Definit. *duo arcus BA, & CA ſunt arcus maximorum circulorum ſeſe mutuò ſecantes;* per 4 verò ſuppoſit. *in ſphærâ maximi circuli ſe mutuò bifariam ſecant.*

II.

Clavius l. de triang. ſph. prop. 13. Fig. 34. Si anguli ſphærici crura continuata concurrunt, & ſemicirculos efficiunt, fiunt duo anguli oppoſiti inter ſe æquales. *Tales ſunt anguli BAC, BDC. Ratio eſt, quia habent eandem menſuram, nempe arcum GH* juxta Definit. 6.

III.

Clav. ibid. prop. 5. Fig. 34. Cùm arcus circuli maximi in ſphærâ ſuper arcum circuli maximi conſiſtens angulos facit, aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficit. *Sic arcus circuli maximi IG conſiſtens ſuper arcum AGD facit duos angulos AGI, DGI. Si igitur circulus arcûs IG tranſit per polum circuli arcûs AGD, ſecetur hic ab illo ad angulos rectos* per 11. Suppoſit. *ſi non per polum tranſit, fit unus angulus obtuſus, alter acutus: æquivalentes tamen duobus rectis.*

IV.

Clav. ibid. prop. 8. Iſoſcelium triangulorum ſphæricorum duo anguli ſupra baſim ſunt æquales, & productis æqualibus arcubus etiam anguli infra baſim fiunt æquales. Hinc ſequitur, omne triangulum ſphæricum æquiangulum eſſe etiam æquilaterum.

V.

Si trianguli ſphærici duo anguli ſunt inter ſe æquales, etiam latera ſub æqualibus angulis ſubtenſa ſunt inter ſe æqualia. Hinc ſequitur, omne triangulum ſphæricum æquiangulum eſſe etiam æquilaterum. *Clav. prop. 9.*

VI.

Æquilateri trianguli ſphærici ſingula latera poſſunt eſſe quadrantes maximorum circulorum, & ſingula quadrantibus vel majora, vel minora. Quando ſingula ſunt quadrantes, omnes anguli ſunt recti: quando majora quadrantibus, omnes ſunt obtuſi: quando minora, acuti. E contrario, quando in triangulo ſphærico æquiangulo ſinguli anguli ſunt recti, ſingula latera ſunt quadrantes: quando obtuſi, majora ſunt quadrante: quando acuti, minora. *Clav. in cor. prop. 25.*

VII.

Iſoſcelis trianguli ſphærici æqualia duo latera poſſunt eſſe quadrantes, & majora, aut minora quadrantibus. Quando ſunt quadrantes, anguli ſunt recti: quando majora, obtuſi: quando minora, acuti. E contrario, quando duo anguli æquales ſupra baſim ſunt recti, latera æqualia ſunt quadrantes: quando obtuſi, majora ſunt quadrante: quando acuti, minora. *Clav. prop. 25.*

VIII.

In omni triangulo ſphærico iſoſcele, cujus duo latera æqualia ſunt quadrantes, ſi angulus ſub ipſis comprehenſus eſt rectus, baſis eſt quadrans: ſi acutus, quadrante minor: ſi obtuſus, major. Et viciſſim, ſi baſis eſt quadrans, angulus oppoſitus eſt rectus: ſi major quadrante, obtuſus: ſi minor, acutus. Semper autem polus baſis eſt in angulo ſub lateribus comprehenſo. *Clav prop. 26.*

IX.

In omni triangulo ſphærico, cujus omnes arcus ſunt quadrante majores, vel unus quadrans, & reliqui duo quadrante majores, omnes tres anguli ſunt obtuſi. *Clav. prop. 27.*

X.

Clav. prop. 28. In omni triangulo ſphærico rectangulo, cujus omnes arcus ſunt quadrante minores, reliqui duo anguli ſunt acuti. Et ſi reliqui duo ſunt acuti, erunt ſinguli arcus quadrante minores.

XI.

Clav. prop. 29. In omni triangulo ſphærico; cujus omnes anguli ſunt acuti, arcus ſinguli ſunt quadrante minores.

XII.

Clav. prop. 30. In omni triangulo ſphærico, cujus unus quidem arcus quadrante major ſit, reliquorum verò uterque quadrante minor, nullus angulorum rectus eſt.

XIII.

Clav. in cor. pro. 38. Fieri non poteſt, ut in triangulo ſphærico rectangulo unus tantùm arcus ſit quadrans. *Quare, qui concedit in triangulo unum quadrantem, concedere debet & alterum, & ſaltem duos angulos rectos.*

§. III.

§. III.

DE DIMENSIONE, TRIANGULORUM

Sphæricorum rectangulorum, in quibus unus tantùm eſt rectus.

SI triangulum ſphæricum habet tres rectos, datis, ſeu cognitis illis, data ſunt etiam latera ipſorum, utpote quadrantes, & viciſſim *per* 6. *Propriet.* Si habet duos rectos, datis illis, dantur & latera rectis oppoſita, nempe duo quadrantes *per* 6. *Propriet.* Si datur etiam latus tertium, datur angulus tertius; & viciſſim, quia tunc latus tertium eſt menſura anguli *per* 6. *Defin.* In his igitur caſibus nullâ trigonometriâ eſt opus, ſed ſolùm, quando triangulum habet unicum rectum, & reliquos obliquos, cujuſmodi eſt triangulum appoſitum rectangulum ad B. Sexdecim variationes in hoc caſu occurrere poſſunt, pro quibus ſexdecim regulas præſcribimus. In omnibus nomine baſis intelligimus arcum recto angulo oppoſitum, ut hic arcum AC. *Fig.* 35.

Propoſitio I. Problema.

Angulum ex baſe, & latere, quod angulo quæſito opponitur, invenire.

IN præcedenti triangulo ſit data baſis AC 60°. & latus AB 20°, ſitque inveniendus angulus C oppoſitus lateri dato. Fiat, ut ſinus totus ad ſinum lateris AB dati, ita ſecans complementi baſis AC ad ſinum anguli C quæſiti, EXEMPLUM. Sinus totus eſt 10000000, ſinus lateris AB 20° eſt 3420202; ſecans complementi baſis AC 60°, eſt 11547005. Ductâ ſecante prædictâ per ſinum lateris AB, fit ſumma 3949308959010, qua diviſa per radium 10000000, provenit quotiens 3949308 $\frac{9595}{10000}$ pro ſinu anguli C, cui reſpondent *Fig.* 35.

 23°.

23°. 15'. 42". *Juxta hanc normam etiam reliquæ operationes inſtitui debent. Brevitatis cauſâ omitto exempla in ſequentibus.*

Propoſitio II. Problema.

Angulum ex baſe, & latere, quod angulo quæſito adjacet, invenire.

Fig. 35. IN præcedenti triangulo data baſis AC ſit 60°. 30', latus BC 30°, ſitque inveniendus angulus C lateri dato adjacens. Fiat, ut radius ad tangentem lateris BC dati, ita tangens complementi baſis AC, ad ſinum complementi anguli C quæſiti.

Propoſitio III. Problema.

Angulum ex baſe, & altero angulo non recto invenire.

Fig. 35. BAſis AC ſit 60°, 30', angulus A datus ſit 13°. 30' & quæratur angulus C. Fiat, ut radius ad ſinum complementi baſis AC, ita tangens anguli A dati ad tangentem complementi anguli C quæſiti.

Propoſitio IV. Problema.

Angulum ex latere quæſito angulo oppoſito, & altero angulo non recto invenire.

Fig. 35. ANgulus inveſtigandus ſit C, latus datum AB, & angulus datus A. Fiat, ut radius ad ſinum anguli A dati, ita ſinus complementi lateris AB dati ad ſinum complementi anguli C quæſiti.

Pro-

Propoſitio V. Problema.

Angulum ex latere quæſito angulo adjacente, & altero angulo non recto invenire.

D*Ummodò conſtet, num angulus quæſitus ſit major recto, aut minor, vel an baſis, aut latus alterum non datum ſit quadrante majus, aut minus.* Angulus inveſtigandus ſit C, latus datum BC, angulus datus A. Fiat, ut radius ad ſecantem lateris dati, ita ſinus complementi anguli dati ad ſinum anguli quæſiti. *Fig.* 35.

Propoſitio VI. Problema.

Angulum ex utroque latere circa angulum rectum invenire.

ANgulus inveſtigandus ſit C, latera data AB, & BC circa angulum rectum. Fiat, ut ſinus totus ad ſinum lateris BC, cui angulus quæſitus adjacet, ita tangens complementi alterius lateris AB quæſito angulo oppoſiti ad tangentem complementi anguli C quæſiti. *Fig.* 35.

Propoſitio VII. Problema.

Latus ex baſe, & altero latere invenire.

BAſis data ſit AC, latus datum BC, latus, quod inveſtigatur, AB. Fiat, ut ſinus totus ad ſecantem dati lateris BC, ita ſinus complementi baſis AC ad ſinum complementi lateris AB quæſiti. *Fig.* 35.

Propoſitio VIII. Problema.

Latus ex baſe, & angulo, qui lateri quæſito opponitur, invenire.

Fig. 35. BAſis data ſit AC, angulus datus C, latus quod quæritur, AB. Fiat, ut ſinus totus ad ſinum baſis AB, ita ſinus anguli dati C ad ſinum lateris AB quæſiti.

Propoſitio IX. Problema.

Latus ex baſe, & angulo, qui lateri quæſito adjacet, invenire.

Fig. 35. BAſis data ſit AC, angulus datus A, latus, quod quæritur, AB. Fiat, ut ſinus totus ad ſinum complementi anguli A dati, ita tangens baſis AC ad tangentem lateris AB quæſiti.

Propoſitio X. Problema.

Latus ex altero latere, & angulo, qui quæſito lateri adjacet, invenire.

Fig. 35. *DUmmodò conſtet, an quæſitum latus ſit quadrante majus, aut minus; vel an alter angulus non rectus ſit acutus, aut obtuſus; vel denique, an baſis ſit quadrante minor, vel major.* Latus quæſitum ſit AB, angulus datus A, latus datum BC. Fiat, ut radius ad tangentem complementi anguli A dati, ita tangens lateris BC dati ad ſinum lateris AB quæſiti.

Pro-

Propoſitio XI. Problema.

Latus ex altero latere, & angulo, qui lateri quæſito opponitur, invenire.

LAtus quæſitum A B, latus datum BC, angulus datus C. Fiat, ut radius ad ſinum lateris BC dati, ita tangens anguli C dati ad tangentem lateris AB quæſiti.

Propoſitio XII. Problema.

Latus ex utroque angulo non recto invenire.

LAtus quæſitum AB, anguli dati A, & C. Fiat, ut ſinus totus ad ſecantem complementi anguli A, ita ſinus complementi anguli C ad ſinum complementi lateris A B quæſiti. *Fig.* 35.

Propoſitio XIII. Problema.

Baſim ex latere, & angulo ei adjacente invenire.

BAſis quæſita AC, angulus datus A, latus datum AB. Fiat, ut ſinus totus ad ſinum complementi anguli A dati, ita tangens complementi lateris A B dati ad tangentem complementi baſis AC quæſitæ. *Fig.* 35.

Propoſitio XIV. Problema.

Baſim ex latere, & angulo ei oppoſito invenire.

BAſis quæſita AC, angulus datus A, latus datum BC. Fiat, ut ſinus totus ad ſecantem complementi anguli A dati, ita ſinus lateris BC dati ad ſinum baſis AC quæſitæ. *Fig.* 35.

Propoſitio XV. Problema.

Baſim ex utroque latere invenire.

Fig. 35. BAſis quæſita A C, latus unum datum AB, alterum BC. Fiat, ut ſinus totus ad ſinum complementi lateris A B, ita ſinus complementi alterius lateris BC ad ſinum complementi baſis AC quæſitæ.

Propoſitio XVI. Problema.

Baſim ex utroque angulo non recto invenire.

Fig. 35. BAſis quæſita A C, anguli dati A, & C. Fiat, ut ſinus totus ad tangentem complementi anguli A, ita tangens complementi alterius anguli C ad ſinum complementi baſis AC quæſitæ.

§. IV.

§. IV.

DE DIMENSIONE TRIANGULORUM

Sphæricorum obliquangulorum.

AD quatuordecim caſus reduci poſſunt cum *P. Joanne Baptiſta Ricciolo* omnia, ad quæ obliquangulorum triangulorum ſphæricorum dimenſiones pertinent quæ totidem Problematibus cum eodem ſolvo, ut ſequitur.

Propoſitio XVII. Problema.

Angulum ſpecie præcognitum ex datis duobus lateribus, & angulo uni eorum oppoſito invenire.

A*Ngulus ſpecie præcognitus dicitur, quando ſcitur utrùm ſit acutus, vel obtuſus.* Fiat, ut ſinus lateris oppoſiti angulo dato ad ſinum anguli dati, ita latus reliquum datum ad ſinum anguli quæſiti, ſi acutus eſt. Si obtuſus eſt, ſubtraho angulum prædicto modo inventum à gradibus 180, eritque reſiduum angulus quæſitus.

Propoſitio XVIII. Problema.

Angulum verticalem ex datis duobus lateribus ſingulatim quadrante minoribus, & angulo uni eorum oppoſiti, & ſpecie anguli oppoſiti reliquo lateri invenire.

ANgulum verticalem appello, qui a datis lateribus comprehenditur. Fiat, ut radius ad tangentem anguli dati, ita ſinus complementi lateris adjacentis angulo dato ad tangentem complementi *anguli primò inventi*. Deinde fiat, ut tangens lateris adjacentis angulo dato ad tangentem complementi reliqui lateris dati, ita ſinus complementi anguli primò inventi ad ſinum complementi *anguli ſecundò inventi*. Jam, ſi angulis datis lateribus oppoſitis ſunt ejuſdem ſpeciei, ſumma inventorum angulorum primi, & ſecundi erit angulus verticalis quæſitus; ſin minùs, differentia inventorum angulorum erit quæſitus angulus verticalis.

Propoſitio XIX. Problema.

Angulum utrumque ad baſim ex datis lateribus duobus ſimul ſemicirculo minoribus, & angulo verticali invenire.

FIAt, ut ſinus complementi ſemiſummæ laterum ad ſinum complementi ſemidifferentiæ eorundem, ita tangens complementi ſemianguli verticalis ad tangentem ſemiſummæ angulorum quæſitorum. Deinde fiat, ut ſinus ſemiſummæ laterum ad ſinum ſemidifferentiæ eorundem, ita tangens complementi ſemianguli verticali ad tangentem ſemidifferentiæ, addendæ ipſi ſemiſummæ angulorum, ut fiat angulus major, demendæ, ut fiat angulus minor quæſitorum.

Pro-

Propoſitio XX. Problema.

Angulum quemvis ad baſim ex datis lateribus duobus, quorum alterum ſaltem ſit quadrante minus, & angulo verticali acuto invenire.

Fiat, ut radius ad ſecantem anguli verticalis, ita tangens complementi lateris oppoſiti angulo quæſito ad tangentem complementi primi caſûs. Deinde fiat, ut tangens complementi anguli verticalis, ad ſecantem complementi anguli primò inventi, ita ſinus differentiæ inter primum caſum, ac latus alterum ad tangentem complementi anguli quæſiti.

Propoſitio XXI. Problema.

Angulum tertium ex datis duobus angulis acutis, & latere oppoſito uni eorum, ac ſpecie lateris oppoſiti alteri angulo dato invenire.

Fiat, ut radius ad ſinum complementi lateris dati, ita tangens anguli adjacentis eidem lateri ad tangentem complementi primi anguli. Deinde fiat, ut ſinus complementi anguli adjacentis dato lateri ad ſinum complementi reliqui dati anguli, ita ſinus primi anguli ad ſinum ſecundi anguli ſpecie conformis lateri non dato. Jam, ſi latus datum eſt minus quadrante, ſumma primi, & ſecundi anguli inventi conflabit angulum tertium quæſitum; ſi verò eſt majus quadrante, ſumma facta ex ſecundo angulo, & primi anguli complemento ſubtracta ex gradibus 180 eundem dabit.

Propoſitio XXII. Problema.

Angulum baſi oppoſitum ex datis duobus angulis, quorum unus ſaltem ſit acutus, & ex baſi iis adjacente, quæ ſit minor quadrante, invenire.

Fiat, ut radius ad ſinum anguli datorum minoris, ita ſinus reliqui anguli dati ad inventum primum. Deinde fiat, ut

radius

radius ad inventum primum, ita ſinus verſus, baſis ad inventum ſecundum. Tertiò addatur inventus ſecundus ſinui verſo differentiæ inter utrumvis datorum angulorum, & reliqui ſupplementum ad gradus 180, & fiet ſinus verſus anguli verticalis quæſiti.

Propoſitio XXIII. Problema.

Angulum quemlibet tanquam verticalem ex datis tribus lateribus quærere.

Fiat, ut radius ad ſecantem complementi lateris unius continentis angulum quæſitum, ita ſecans complementi lateris alterius eundem continentis ad inventum primum. Deinde fiat, ut radius ad inventum primum, ita differentia ſinuum verſorum anguli quæſiti.

Propoſitio XXIV. Problema.

Baſim ex duobus datis lateribus ſingulatim quadrante minoribus, & angulo uni eorum oppoſito, ac ſpecie anguli oppoſiti reliquo dato lateri invenire.

Fiat, ut radius ad ſecantem anguli dati, ita tangens complementi lateris adjacentis angulo dato ad tangentem complementi primi arcûs. Deinde fiat, ut ſinus complementi lateris adjacentis angulo dato, ad ſinum complementi reliqui lateris dati, ita ſinus complementi arcûs primi ad arcum ſecundum addendum arcui primo, ſi anguli lateribus datis oppoſiti ſint ejuſdem ſpeciei, ut habeatur baſis; alioquin differentia inventorum arcuum dabit baſim.

Propoſitio XXV. Problema.

Baſim ex datis lateribus duobus, quorum ſaltem unum ſit quadrante minus, & ex dato angulo verticali acuto, invenire.

Fiat, ut radius ad ſinum lateris datorum minoris, ita ſinus reliqui lateris ad aliud; invenietur arcus, qui vocetur primus. Deinde fiat, ut radius ad arcum primum, ita ſinus verſus anguli verticalis ad arcum ſecundum, quem adde ſinui verſo differentiæ laterum, & fiet ſinus verſus baſis quæſitæ.

Pro-

Propoſitio XXVI. Problema.

Baſim adjacentem duobus angulis datis acutis ex iis, & ex latere uni eorum oppoſito, nec non ſpecie lateris oppoſiti alteri angulo invenire.

Fiat, ut radius ad ſecantem anguli adjacentis lateri dato, ita tangens complementi lateris dati ad tangentem primi arcûs. Deinde fiat, ut tangens anguli adjacentis lateri dato ad tangentem complementi reliqui anguli dati, ita ſinus primi arcûs ad ſinum ſecundi arcûs ſpecie conformis lateri non dato. Jam ſi latus datum eſt minus quadrante, ſumma primi, & ſecundi arcûs inventi conflabit baſim quæſitam. At ſi majus eſt quadrante, ſumma facta ex ſecundo arcu, & ex complemento primi arcûs ad ſemicirculum conflabit illam.

Propoſitio XXVII. Problema.

Latus dato angulo oppoſitum, ſpecie tamen præcognitum, ex datis duobus angulis, & latere uni eorum oppoſito invenire.

Fiat, ut ſinus anguli oppoſiti dato lateri ad ſinum dati lateris, ita ſinus reliqui anguli dati ad ſinum lateris quæſiti quadrante minoris. At, ſi debeat eſſe majus quadrante, ſubtrahatur latus inventum à gradibus 180; & habebis latus quæſitum.

Propoſitio XXVIII. Problema.

Latus utrumque unico actu ex datis angulis duobus ſimul duos rectos non excedentibus, & ex baſe ipſis adjacente invenire.

Fiat, ut ſinus complementi ſemiſummæ angulorum datorum ad ſinum complementi ſemidifferentiæ eorundem, ita tangens ſemibaſis ad tangentem ſemiſummæ laterum. Deinde fiat, ut ſinus ſemiſummæ angulorum datorum ad ſinum ſemidifferentiæ eorundem, ita tangens ſemibaſis ad tangentem ſemidifferentiæ laterum addendæ ipſi ſemiſummæ laterum, ut habeatur latus majus: demendæ, ut habeatur minus.

Pro-

Propoſitio XXIX. Problema.

Latus utrumvis ex datis angulis duobus, quorum ſaltem unus ſit acutus, & ex baſi adjacente, quæ ſit minor quadrante, invenire.

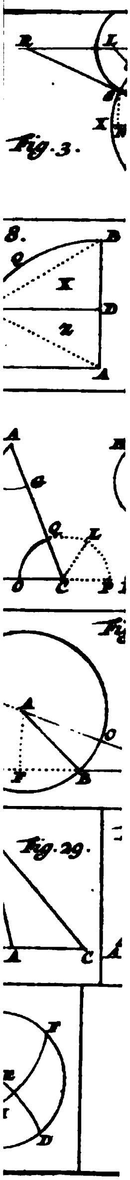
Fiat, ut radius ad tangentem anguli oppoſiti lateri quæſito, ita ſinus complementi baſis ad tangentem complementi primi inventi. Deinde fiat, ut tangens complementi baſis ad ſecantem primi inventi, ita ſinus complementi differentiæ inter primum inventum, & ſecundum datorum angulorum, ſi quæritur latus oppoſitum angulo acuto; vel ſinus complementi ſummæ factæ ex invento primo, & altero datorum angulorum, ſi quæritur latus oppoſitum angulo obtuſo ad tangentem complementi lateris quæſiti, ſi dicta ſumma, aut differentia non excedat grad. 90. vel complementi ad gradus 180. ſi excedat.

Propoſitio XXX. Problema.

Latus quodvis tanquam baſim ex datis tribus angulis invenire.

Fiat, ut radius ad ſecantem complementi alterutrius angulorum quæſitæ baſi adjacentium, ita ſecans complementi reliqui dictorum angulorum ad arcum x, qui vocetur inventum. Deinde fiat, ut radius ad arcum inventum, ita differentia duorum ſinuum verſorum (de quâ mox) ad ſinum verſus baſis quæſitæ. Unus dictorum ſinuum verſorum ſit ſinus verſus anguli verticalis, alter autem ſinus verſus differentiæ, quæ eſt inter quemvis duorum angulorum adjacentium baſi, & inter alterius item baſi adjacentis ſupplementum ad gradus 180.

F I N I S.


Fig.3.
8.
Fig.29.

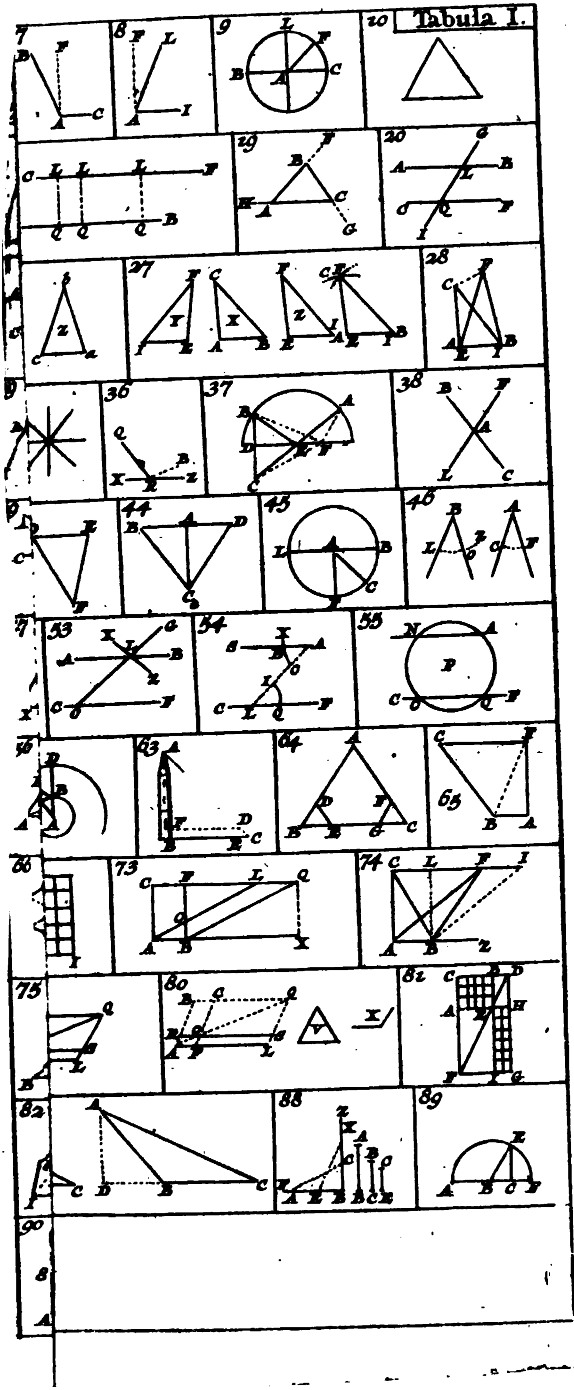
Latus
ſalt
ſit

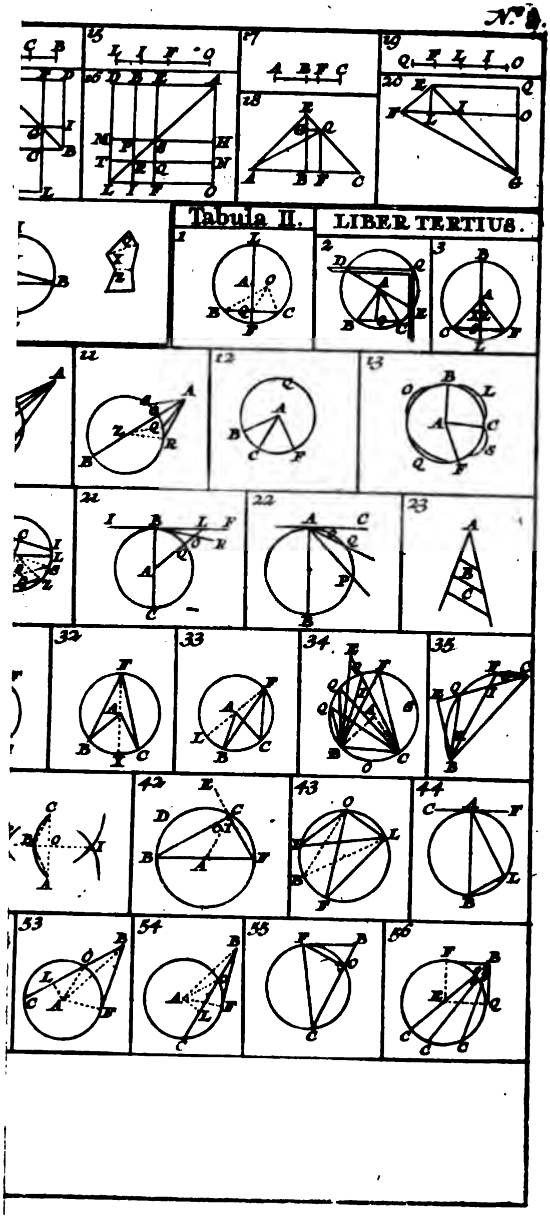
Flat,
to
menti
ti baſis
differe
angulo
ſinus c
tero d
gulo c
dicta
comp

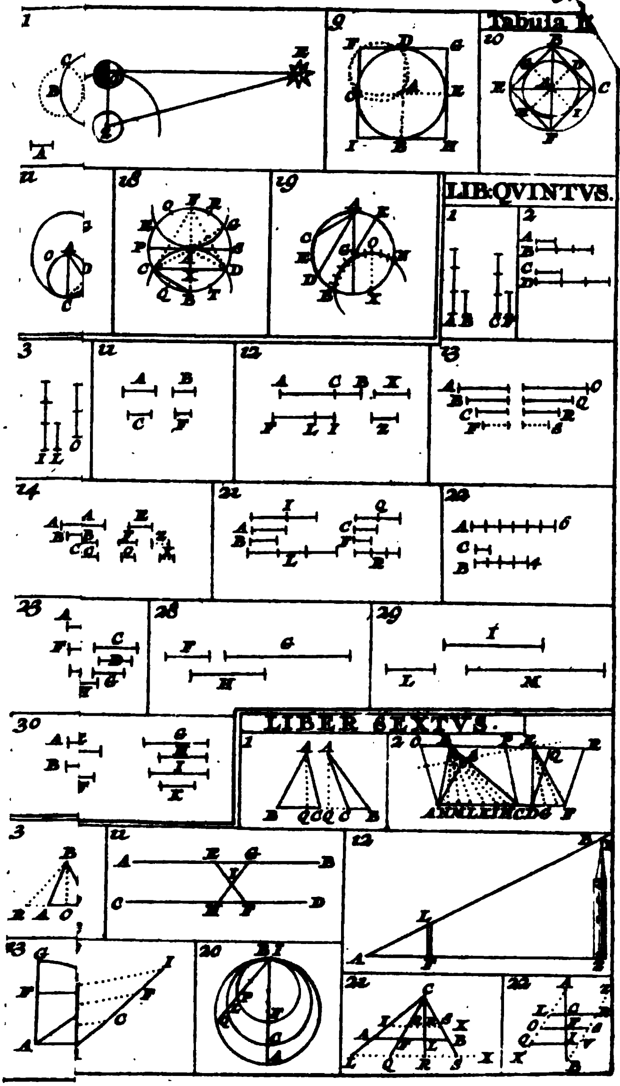
Lat
i

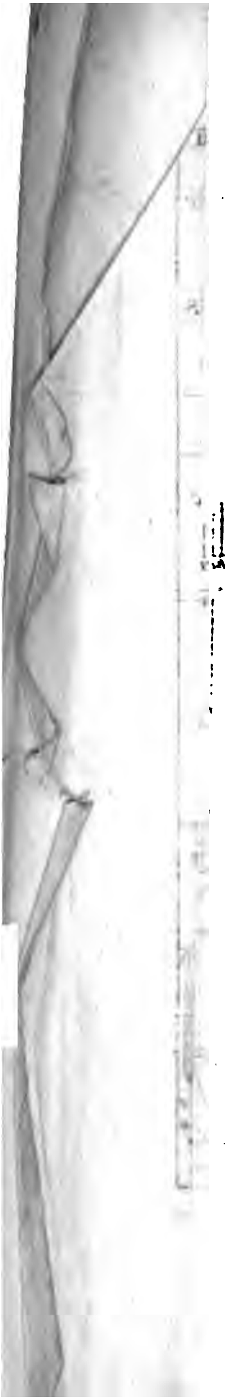
F
me
inv
diff
ve
ſin
fe
ce
m

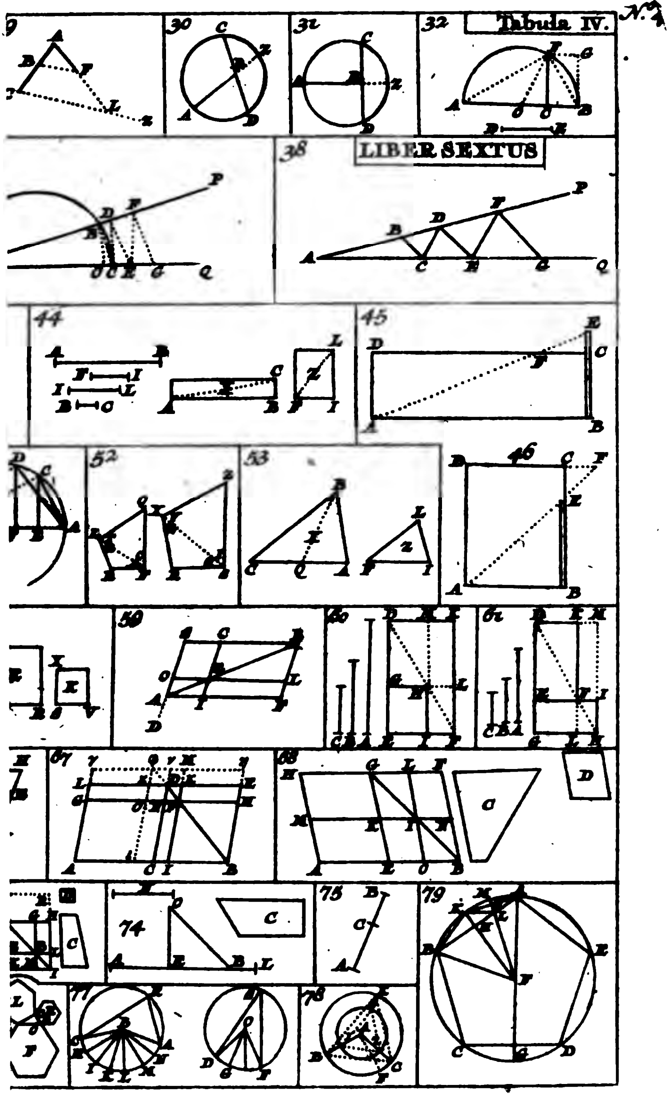
N.° 1.

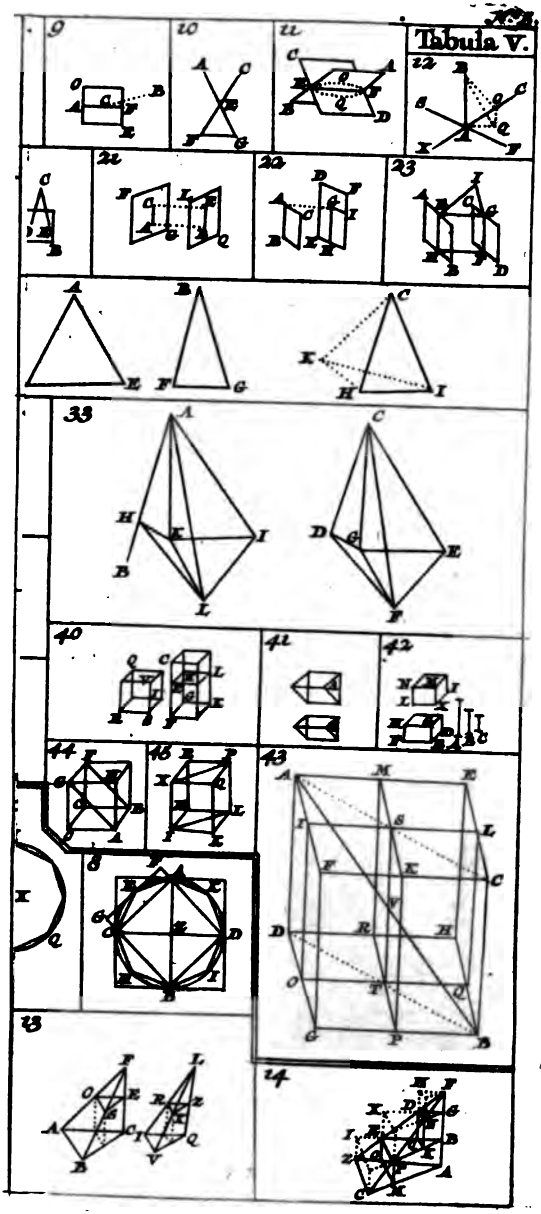

Tabula I.
7
8
9
10
19
20
27
28
36
37
38
44
45
46
53
54
55
63
64
65
66
73
74
75
80
81
82
88
89
90


Tabula II.
LIBER TERTIUS.


Tabula II
LIB. QVINTVS.
LIBER SEXTVS.




Tabula IV.
LIBER SEXTUS


Tabula V.

N°6.

